Vilius Stakėnas

Tikimybių teorijos paskaitos

Vilnius – 2007

Turinys

1 Tikimybinė erdvė

1.1. Statistiniai eksperimentai

Žinoma situacija: galime kartoti tam tikrą bandymą daugybę kartų – patikimai spėti, kuo bandymas pasibaigs, visvien neišmoksime. Tačiau galime nusakyti visų baigčių aibę.

1 pavyzdys. Lošimo kauliuką mėtė jau 1-os faraonų dinastijos Egipto gyventojai (2950-2650 pr. Kr.). Graikų legenda tvirtina, jog lošimo kauliuką nuobodžiaujantiems prie Trojos sienų graikų kareiviams pasiūlė Palamedėjus. Kauliuką mėgo ir arabai; žodis „azartas“ yra kilęs iš arabiško žodžio „alzar“, kuris reiškia tiesiog kauliuką.[1]

Meskime kauliuką ir mes – toks mūsų eksperimentas. Galimų rezultatų aibė

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\},$$

čia ω_i žymi rezultatą „iškrito i akučių“.

2 pavyzdys. Mėtykime tą patį kauliuką, kol iškris skaičius „6“ ir rašykime į eilę iškritusių akučių skaičius. Gausime skaičių eiles, pasibaigiančias šešetu, tačiau gali būti ir taip, kad šešeto negausime, tada skaičių eilė bus begalinė. Tokias eiles natūralu laikyti bandymo baigtimis, nors šiek tiek keista kalbėti apie bandymo baigtį tuo atveju, kai bandymas niekaip negali pasibaigti. Galimų baigčių, susijusių su tokiu bandymu, aibė Ω begalinė, bet skaiti. Ją sudaro baigtiniai arba begaliniai rinkiniai:

$$\omega = \langle \omega_1, \dots, \omega_{m-1}, 6\rangle, \quad \langle \omega_1, \dots, \rangle, \quad \omega_j \in \{1, 2, \dots 5\}, \quad m \geq 1.$$

3 pavyzdys. Žvilgtelėję į termometrą už lango fiksuokite, ką jis rodo. Teoriškai galimų rezultatų aibė – kontinumo galios: $\Omega = [s, S]$, čia s – termometro skalės mažiausioji reikšmė, S - didžiausioji. Tačiau vargu ar kas yra teigęs, kad termometro rodoma temperatūra lygi, tarkime $\sqrt{300}$ laipsnių šilumos.

4 pavyzdys. Mintinis eksperimentas: įsivaizduokite trajektoriją, kurią ant Žemės rutulio paviršiaus brėžia jūsų kojos, kai gyvenate įprastinę savo dieną. Galimų tokio bandymo baigčių aibę Ω sudaro uždaros kreivės (jei nakvojate namuose).

---

[1] Juliaus Cezario garsiojo posakio „alea jacta est“ pažodinis vertimas yra taipogi – „kauliukas mestas“.

- Triviali išvada: bandymai, kurių baigties negalima iš anksto numatyti, būna įvairūs.

- Netrivialus klausimas: kokie dėsningumai tokių eksperimentų atveju yra įmanomi?

- Empirinis pastebėjimas: dėsningumai išryškėja, analizuojant daug kartų pakartoto statistinio[2]

Meskime, pavyzdžiui, lošimo kauliuką N kartų, čia N tikrai didelis skaičius. Tegu N_i kartų pasirodė i akučių. Didžiulė lošėjų patirtis tvirtina, jog egzistuoja nuo paties kauliuko savybių priklausantys dydžiai p_i, kad spėjimas

$$\frac{N_1}{N} \approx p_1, \ldots, \frac{N_6}{N} \approx p_6$$

pasitvirtina labai dažnai. Tačiau dalykas nėra toks paprastas. Kai kurie eksperimentatoriai galbūt gaus žymiai besiskiriančias nuo p_i dydžių N_i/N reikšmes. Bet mes pasikliausime dauguma ir tarsime, jog baigtims ω_i galima priskirti skaičius, apibūdinančius jų pasitaikymo dažnumą.

Dažnai, įvykius susijusius su bandymu, nusakome žodžiais. Pavyzdžiui, jei bandymas yra vieno kauliuko metimas, tai gali rūpėti įvykis, „iškrito ne mažiau, kaip keturios akutės“; jeigu bandymas – kortos traukimas iš kaladės, gali būti svarbu, įvyks ar neįvyks įvykis „ištrauktoji korta yra tūzas“ ir t.t. Įvykis „iškrito ne mažiau, kaip keturios akutės“ įvyks ir tada, kai iškris keturios akutės (t.y. pasirodys baigtis ω_4), ir kai penkios, ir kai šešios. Taigi natūralu šias baigtis pavadinti palankiomis įvykiui „iškrito ne mažiau, kaip keturios akutės“, o patį įvykį tiesiog sutapatinti su baigčių aibe $\{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Matematinės teorijos pradžios taškas:

Su statistiniu bandymu susiesime jo baigčių aibę Ω. Visus kitus įvykius, kuriuos nagrinėsime, vaizduosime aibės Ω poaibiais.

Pavyzdžiui, kauliuko metimo atveju įvykį „iškrito lyginis skaičius akučių“ vaizduosime aibe $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\ \}$.

Šitaip įvykius pavertę poaibiais gauname labai „sausą“ matematinį reiškinio, kurį įtakoja atsitiktinumai, modelį ir galime kiekybiškai jį tyrinėti.

[2]Status - padėtis (lotyniškai). Statistiniu bandymu arba eksperimentu vadinsime tokį bandymą, kurio vienintelis tikslas – jo baigties fiksavimas, neanalizuojant, kokios būtent bandymo sąlygos tą baigtį lėmė. eksperimento rezultatus.

1.2. Klasikinis modelis

Tarkime, statistinio eksperimento galimų baigčių aibė yra baigtinė:

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}.$$

Taip pat tarkime, kad visos jos turi vienodas galimybes atlikus bandymą pasirodyti.[3]

Atsitiktiniais įvykiais baigčių aibės Ω poaibius $A \subset \Omega$, visų poaibių aibę žymėsime $\mathcal{P}(\Omega)$. Tikiuosi, kad žinote, kaip apibrėžiama aibių sąjunga, sankirta ir skirtumas. Šias operacijas žymėsime, kaip įprasta, ženklais $\cup, \cap, \setminus$.

Baigtinės aibės A elementų skaičių žymėsime $|A|$.

Naudosime tokius terminus:

- baigtis $\omega \in A$ vadinsime palankiomis A;
- aibę $\emptyset$ vadinsime negalimu, Ω - būtinu įvykiu;
- įvykius A ir $\overline{A} = \Omega \setminus A$ vadinsime priešingais;
- jei $A \cap B = \emptyset$, įvykius A, B vadinsime nesutaikomais.

Įvykis susijęs su realiu bandymu įvyksta, kai pasirodo palanki jam baigtis. Kuo daugiau įvykis turi palankių jam baigčių, tuo daugiau galimybių tam įvykiui atlikus bandymą įvykti. Šia idėja remiasi klasikinis tikimybės apibrėžimas, kurį pirmą kartą pradėjo naudoti Girolamo Cardano (1501-1576).

1 apibrėžimas. *Tikimybe vadinsime funkciją $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, apibrėžiamą lygybe*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Skaičių $P(A)$ vadinsime įvykio $A \subset \Omega$ tikimybe.

Elementariais įvykiais vadinami įvykiai, kuriems palanki tik viena baigtis, juos atitinka poaibiai, turintys tik vieną elementą. Taigi kiekvienam elementariajam įvykiui

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Toliau aibę, sudarytą iš vieno elemento ω žymėsime tiesiog ω ir nepaisysime subtilaus skirtumo tarp baigties ir elementaraus įvykio.

[3] Šį teiginį konkretaus bandymo atveju priimame arba atmetame remdamiesi ne formaliu įrodymu, bet tam tikra praktine bei mąstymo patirtimi. Jis leidžia mums sudaryti formalų matematinį modelį, kurį turint jau galima visai ar iš dalies pamiršti gan neapibrėžtas empirines jo atsiradimo prielaidas.

Toks yra klasikinis tikimybių skaičiavimo modelis. O kas gi tie klasikai? Matyt, vienaip ar kitaip galimybes vertino visų laikų azartinių žaidimų mėgėjai. Įprasta tikimybių teorijos pradžią sieti su prancūzų matematikų Blezo Paskalio bei Pjero Ferma darbais.[4]

> *Tradicija sako, kad Paskalį susidomėti tikimybių teorija paakinęs tūlas didikas ir azartinių lošimų mėgėjas de Merė (Chevalier de Meray). Sutikęs Paskalį pakeliui į savo dvarą, jis suformulavo jam du uždavinius, kurie ir sukėlė Paskalio susidomėjimą tikimybių arba galimybių skaičiavimu. Vienas uždavinys buvęs toks.*
>
> *De Merė uždavinys. Kuri tikimybė didesnė: gauti nors vieną šešetuką, keturis kartus metus kauliuką, ar bent vieną kartą du šešetukus, 24 kartus metus kauliukų porą? Pabandykite įspėti atsakymą.*

Taigi klasikinė tikimybinė erdvė yra matematinis modelis, aprašantis bandymą su vienodai galimomis baigtimis. Tokių bandymų pavyzdžiai: simetriško lošimo kauliuko metimas, kortos traukimas iš kaladės, rutulio traukimas iš urnos, kurioje visi rutuliai vienodi ir t. t.

Akivaizdu, jog klasikiniame modelyje

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega), \quad P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1.$$

Tačiau bandymai su vienodomis baigtimis – tikrų bandymų idealizacija. Juk nėra nei visiškai simetriškų kauliukų, nei visiškai vienodų rutulių... Taigi dažniausiai ne visos baigtys yra lygiavertės, t. y. ne visos elementariųjų įvykių tikimybės vienodos. Tačiau svarbiausia – egzistuoja intervalo $[0;1]$ skaičiai, kurie apibūdina baigčių pasirodymo galimybes, t.y. kiekvieną elementarųjį įvykį ω atitinka jo tikimybė $P(\omega)$. Šiuo pastebėjimu paremtas toks klasikinės tikimybinės erdvės apibendrinimas.

2 apibrėžimas. *Tegu Ω yra baigtinė arba skaiti aibė, $\mathcal{P}(\Omega)$ visų jos poaibių sistema, $P(\omega),\ \omega \in \Omega$, neneigiamų skaičių aibė*

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1.$$

---

[4]Pierre de Fermat (1601-1665), Blaise Pascal (1623-1662).

Paskalio vardas minimas ne tik matematikų, bet ir fizikų, ir filosofų ir teologų raštuose. Galbūt svarbiausias jo filosofinis veikalas - fragmentiškų minčių ir svarstymų rinkinys „Mintys“. Štai viena iš šio rinkinio įžvalgų: „Niekas nelaikomas nusimanančiu apie poeziją, jei neturi etiketės, kad yra poetas. Panašiai ir su matematika ir t.t. O tikrai išsilavinę žmonės nenori etiketės ir nedaro didelio skirtumo tarp poeto ir adytojo. Tikrai išsilavinę žmonės nevadinami poetais, matematikais ir t.t. Tačiau jie tokie yra ir apie visas šias sritis geba spręsti.“

Tikimybe vadinsime funkciją $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, *apibrėžiamą lygybe*

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Trejetą $\langle \Omega, \mathcal{P}(\Omega), P \rangle$ *vadinsime diskrečiąja tikimybine erdve.*

Taigi diskrečioji tikimybinė erdvė yra tikimybinis bandymo su baigtine (arba skaičia) nebūtinai vienodai galimų baigčių aibe modelis. Tačiau norėdami jį taikyti konkrečiam bandymui, turime sužinoti elementariųjų įvykių tikimybes $P(\omega)$. Niekas niekada nepasiūlys nei formulės, nei algoritmo tikslioms tikimybių reikšmėms apskaičiuoti. Praktiškai galima elgtis šitaip. Tegu $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ yra bandymo baigčių aibė; pakartokime bandymą didelį skaičių n kartų. Suskaičiuokime, kiek kartų pasirodė baigtys $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$; tegu pasirodymų skaičiai yra $n_1, n_2, \ldots, n_m$.Tada tikimybes galima skaičiuoti padarius prielaidą, kad

$$P(\omega_1) \approx \frac{n_1}{n},\ P(\omega_2) \approx \frac{n_2}{n},\ \ldots\ P(\omega_m) \approx \frac{n_m}{n}.$$

Nėra garantijos, kad šitaip skaičiuodami nepadarysime didelės klaidos, kaip kad nėra garantijos, kad pirkdami turguje negausite grąžos netikro dvidešimties litų banknoto.

Ši teorema apie nesutaikomus įvykius yra tiesiog akivaizdi.

1 teorema. *Tegu* $\langle \Omega, \mathcal{P}(\Omega), P \rangle$ *yra diskrečioji tikimybinė erdvė. Teisingos lygybės* $P(\emptyset) = 0;\ P(\Omega) = 1.$

Jei A *ir* B *yra nesutaikomi įvykiai, tai*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

1.3. Intermezzo: kelios kombinatorikos formulės

Taikant klasikinės tikimybinės erdvės modelį, dažnai tenka skaičiuoti, kiek gi elementų yra aibėje Ω bei jos poaibiuose. Uždavinius, kuriuose reikalaujama suskaičiuoti, kiek yra elementų, turinčių tam tikras savybes, nagrinėja kombinatorika. Keletą tokių uždavinių išspręskime.

Tarkime turime baigtinę aibę:

$$\mathcal{S}_N = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_N\}.$$

Parinkime $\mathcal{S}_N$ elementą, padarykime jo kopiją, grąžinkime elementą į aibę ir rinkime elementą iš naujo. Tai atlikę n kartų gausime rinkinį

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_n} \rangle,$$

kurį vadinsime **gretiniu su pasikartojimais iš N po n elementų**. Jų aibė

$$\mathcal{S}_N^n = \mathcal{S}_N \times \ldots \times \mathcal{S}_N.?? \tag{1}$$

Pažymėkime $B_N^n = |\mathcal{S}_N^n|$. Jeigu $\mathcal{S}_N$ yra N raidžių abėcėlė, tai $\mathcal{S}_N^n$ yra tos abėcėlės n ilgio žodžių aibė. Beveik akivaizdu, kad $B_N^n = N^n$.

Vėl parinkime $\mathcal{S}_N$ elementą, tačiau jo nebegrąžinkime į aibę. Rinkime iš sumažėjusios aibės naują elementą ir taip toliau. Dabar gausime rinkinį

$$\langle\sigma\rangle = \langle\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_n}\rangle, \ \sigma_{i_u} \neq \sigma_{i_v}, \ u \neq v, \tag{2}$$

kurį vadinsime **gretiniu be pasikartojimų iš N po n elementų**. Pažymėkime jų aibę $\widehat{\mathcal{S}}_N^n$, ir $A_N^n = |\widehat{\mathcal{S}}_N^n|$. Aibę $\widehat{\mathcal{S}}_N^n$, suskaidykime į nesikertančias klases

$$\mathcal{S}(i) = \{\langle\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_n}\rangle \in \widehat{\mathcal{S}_N^n} : i_1 = i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Taigi $\mathcal{S}(i)$ sudaro gretiniai su tuo pačiu pirmuoju elementu. Kadangi $|\mathcal{S}(i)| = A_{N-1}^{n-1}$, tai

$$A_N^n = N \cdot A_{N-1}^{n-1}.$$

Pasinaudoję šiuo sąryšiu bei tuo, kad su visais m $A_m^1 = m$, gausime

$$A_N^n = N(N-1)\ldots(N-n+1).$$

Dydis $A_n^n = n!$ yra tiesiog n elementų skirtingų išdėstymų į vieną eilę skaičius.

Jeigu n elementų pasirinksime negrąžindami į aibę, o po to rinkinyje surikiuosime elementus indeksų didėjimo tvarka, gausime **derinį iš N elementų po n**

$$\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_n}, \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_n, \tag{3}$$

kurį galima tiesiog interpretuoti kaip aibės $\mathcal{S}_N$ n elementų poaibį. Derinių be pasikartojimų aibę pažymėkime

$$\widehat{\mathcal{D}}_N^n, \quad C_N^n = |\widehat{\mathcal{D}}_N^n|.$$

Literatūroje dydis C_N^n dažnai žymimas ir taip: $\binom{N}{n}$. Protinga apibrėžti $C_N^0 = 1$ (iš N elementų aibės nieko nepasirinkti galime tik vienu būdu). Iš kiekvieno derinio (3) galime sudaryti $n!$ skirtingų (2) gretinių. Iš skirtingų derinių visada gauname tik skirtingus gretinius ir visi (2) gretiniai yra šitaip gaunami. Taigi

$$A_N^n = n! \cdot C_N^n.$$

Vėl rinkime elementus kaip pirmuoju atveju, tačiau nerikiuokime jų kopijų į eilę. Tik parinkę visus n elementų, sutvarkykime juos taip:

$$\overbrace{\sigma_1 \ldots \sigma_1}^{m_1}\overbrace{\sigma_2 \ldots \sigma_2}^{m_2}\ldots\overbrace{\sigma_N \ldots \sigma_N}^{m_N}, \ m_1 + m_2 + \ldots + m_N = n, \ m_i \geq 0. \tag{4}$$

(4) rinkinį vadinsime **deriniu iš N po n su pasikartojimais**, jų aibę ir skaičių pažymėkime

$$\mathcal{D}_N^n, \quad \Gamma_N^n = |\mathcal{D}_N^n|.$$

Įsivaizduokime (4) kaip spalvotų rutuliukų rinkinį: viena spalva nudažyti σ_1, kita – σ_2 ir t. t.

Tarkime turime n nespalvotų rutuliukų

$$\circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \ldots \circ\ \circ\ .$$

Dydis Γ_N^n lygus galimybių nuspalvinti šiuos rutuliukus, kad gautume (4) rinkinį, skaičiui. Parinkime $N-1$ „pertvarėlę" ir atskirkime rutuliukus, kurie bus spalvinami atitinkamai 1-ąja, 2-ąja,... N-ąja spalvomis. Jei i-oji spalva nebus naudojama, tai $i-1$-oji pertvarėlė stovės greta i-osios:

$$\circ\ \circ |\ \circ\ || \circ\ \ldots \circ |\ \circ\ . \tag{5}$$

Dydis Γ_N^n lygus pertvarėlių išdėstymo galimybių skaičiui. Sunumeravę (5) objektus (rutuliukus ir pertvarėles) skaičiais nuo 1 iki $N+n-1$, gausime, kad (5) seką nusako pertvarėlių numeriai. Juos parinkti turime tiek galimybių, kiek yra būdų parinkti $N-1$ elementą iš aibės, kurioje jų yra $N+n-1$. Šis skaičius savo ruožtu lygus derinių be pasikartojimų po $N-1$ elementą iš $N+n-1$ skaičiui.

Susumuokime savo rezultatus.

2 teorema. *Teisingi šie teiginiai:*

$$\begin{aligned} B_N^n &= N^n, \quad \Gamma_N^n = C_{N+n-1}^{N-1}, \\ A_N^n &= N(N-1)\ldots(N-n+1), \quad C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}. \end{aligned}$$

Visų derinių be pasikartojimų po n iš N elementų aibę $\widehat{\mathcal{D}}_N^n$ padalykime į dvi klases:

$$\mathcal{D}^1 = \{D : \sigma_1 \text{įeina į } D\}, \quad \mathcal{D}^2 = \{D : \sigma_1 \text{neįeina į } D\}.$$

Tada

$$|\widehat{\mathcal{D}}_N^n| = |\mathcal{D}^1| + |\mathcal{D}^2|,$$

arba

$$C_N^n = C_N^{n-1} + C_{N-1}^n.$$

Šia lygybe naudojamasi sudarant gerai žinomą Paskalio trikampį:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1. \end{array}$$

Čia m-tosios eilutės narys gaunamas, sumuojant du virš jo užrašytus $m-1$-osios eilutės elementus. Taigi $N+1$-oje eilutėje užrašyti koeficientai lygūs C_N^n.

Šių kombinatorinių formulių nuolat prireikia, taikant klasikinę tikimybių skaičiavimo schemą. Dažnai jas taikome kartu su vadinamąja daugybos taisykle: jei pirmąjį elementą galime parinkti iš n_1 elementų aibės, o antrąjį – iš n_2 elementų aibės, tai iš viso galime sudaryti $n_1 \cdot n_2$ skirtingų porų. Šią taisyklę galime naudodami Dekarto sandaugą (porų aibės sudarymo veiksmą) suformuluoti taip: jeigu A ir B yra baigtinės aibės, tai

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Štai vienas tipinis klasikinės tikimybinės erdvės taikymo pavyzdys.

5 pavyzdys. Balti ir juodi rutuliai

Urnoje yra n baltų ir m juodų rutulių. Iš urnos ištraukiami u rutuliai. Kokia tikimybė, jog bus ištraukta v baltų rutulių, $\max 0, v-m \leq v \leq \min\{n,u\}$?

Baigčių aibę sudaro deriniai be pasikartojimų iš $n+m$ elementų po u elementų. Taigi baigčių skaičius lygus C_{n+m}^u. Baigtį, kuri yra palanki įvykiui

$$A_v = \{\text{ištraukta } v \text{ baltų rutulių}\}$$

galime vaizduotis sudėtą iš dviejų derinių: iš n baltų rutulių parinkta v, iš m juodų rutulių parinkta $u-v$. Pirmąjį bei antrąjį derinius galima sudaryti atitinkamai C_n^v ir C_m^{u-v} būdais. Bendras palankių įvykiui A_v baigčių skaičius lygus šių dydžių sandaugai, taigi

$$P(A_v) = P(v) = \frac{C_n^v C_m^{u-v}}{C_{n+m}^u}.$$

Tikimybių $P(v)$ ($\max 0, v-m \leq v \leq \min(n,u)$) rinkinys vadinamas **hipergeometriniu** skirstiniu. Kodėl hipergeometriniu? Šis pavadinimas paaiškinamas tuo, kad funkcija

$$f(z) = \sum_v P(v) z^v$$

gali būti reiškiama specialiomis hipergeometrinėmis funkcijomis.

Kaip elgiasi hipergeometrinio skirstinio tikimybės?

3 teorema. *Hipergeometrinio skirstinio tikimybės tenkina sąlygą $P(v+1) \geq P(v)$ tada ir tik tada, kai*

$$v \leq \frac{nu-m+u-1}{m+n+2}.$$

Taigi hipergeometrinio skirstinio tikimybės iš pradžių didėja, o po to ima mažėti.

6 pavyzdys. Žuvys ežere

Ežere sugauta 10 žuvų, jos paženklintos ir paleistos atgal. Po kiek laiko pagauta 100 žuvų, tarp jų buvo dvi paženklintos. Kiek žuvų yra ežere?

Tarkime, ežere yra x žuvų. Tada antrąjį gaudymą galime interpretuoti, kaip 100 rutulių traukimą iš urnos, kurioje yra 10 baltų rutulių (pažymėtosios žuvys) ir $x-10$ juodų (likę žuvys). Tarp pagautųjų 100 žuvų galėjo nebūti nei vienos paženklintos, viena paženklinta, ir taip toliau. Protinga padaryti prielaidą, kad įvyko tas įvykis, kurio tikimybė didžiausia. Taigi mūsų hipergeometrinis skirstinys toks, kad tikimybė yra didžiausia, kai baltųjų rutulių skaičius $v=2$. Pasirėmę teorema galime tvirtinti, kad

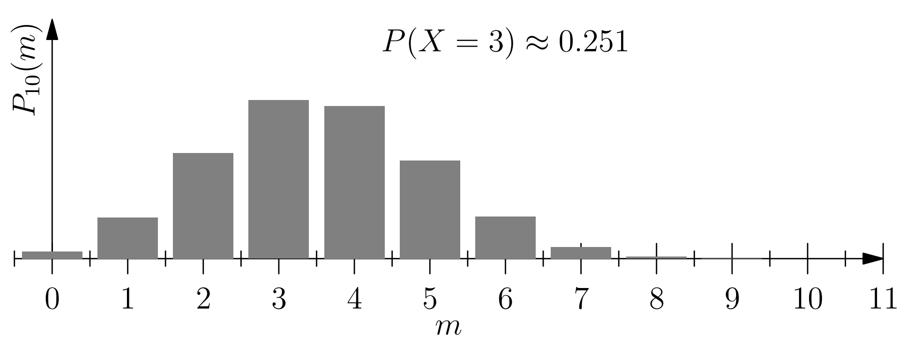
$$1 \approx \frac{nu-m+u-1}{m+n+2}, \quad n=10,\ m=x-10,\ u=100.$$

Taigi gauname $x \approx 554$.

Galbūt pagalvojote, kad toks skaičiavimas perneyg sudėtingas. Kodėl nepaskaičiavus paprasčiau. Jeigu ežere yra x žuvų, tai tikimybė pagauti paženklintą žuvį lygi $10/x$. Kadangi 100 žuvų laimikyje buvo dvi žuvys, tai šią tikimybę galime apskaičiuoti ir taip: $2/100$. Taigi

$$\frac{2}{100} = \frac{10}{x}, \quad x=500.$$

Kodėl gavome skirtingus rezultus ir kuriuo galime labiau pasikliauti? Priežastis, kodėl rezultatai skiriasi glūdi skirtingose prielaidose. Pirmojo skaičiavimo prielaida – kad įvyko tas įvykis, kurio tikimybė didžiausia. Antrojo skaičiavimo – kad tikimybė $2/100$, gauta pasinaudojus žūklės rezultatais, lygi tikimybei pagauti pažymėtą žuvį. Kuri prielaida atrodo labiau pagrįsta? Nuspręskite patys.



Hipergeometrinis skirstinys: iš urnos, kurioje yra 10 *baltų ir* 15 *juodų rutulių pasirinkti* 9 *rutuliai. Grafikas vaizduoja tikimybes, kad pasirinkta* $0, 1, ..., 9$ *balti rutuliai. Šis skirstinys dažnai pasitaiko įvairiose interpretacijose. Pavyzdžiui, urna su rutuliais gali būti gaminių partija, baltas rutulys – brokuotas gaminys ir t. t.*

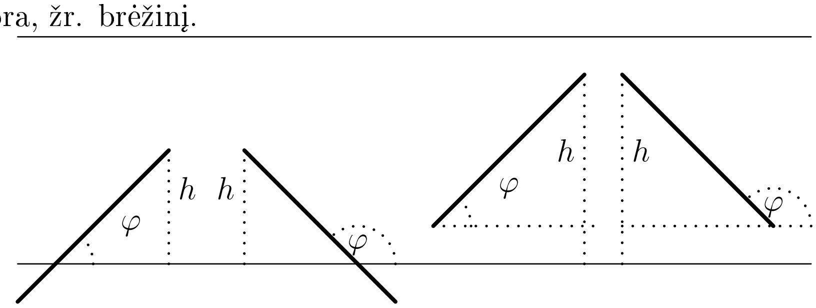
1.4. Geometrinės tikimybės

Prancūzo Ž. Biufono 1777 metais paskelbtame darbe[5] išspręstas įžymusis uždavinys apie adatą. Šis darbas davė pradžią geometriniam tikimybių skaičiavimo modeliui. Uždavinys formuluojamas taip.

7 pavyzdys. Biufono uždavinys

Plokštumoje išvesta lygiagrečių tiesių šeima. Atstumas tarp dviejų gretimų tiesių lygus a. Ant šios plokštumos metama l $(l < a)$ ilgio adata. Kokia tikimybė, jog ji kirs vieną iš lygiagrečių tiesių?

Galime manyti, kad adatos padėtį tiesių atžvilgiu nusako skaičių (h, ϕ) pora, žr. brėžinį.



Todėl eksperimento baigtimi (elementariuoju įvykiu) galime laikyti stačiakampio

$$\Omega = \{(h, \phi) : 0 \leq h \leq a, 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

tašką, o mus dominantį įvykį galime taip užrašyti:

$$A = \{\text{adata kerta tiesę}\} = \{(h, \phi) : (h, \phi) \in \Omega, h \leq l \sin \phi\}.$$

Klasikinės tikimybinės erdvės atveju tikimybę apibrėžiame santykiu

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Natūralu vietoje aibės elementų kiekio imti aibės geometrinę charakteristiką – plotą ir apibrėžti tikimybę taip:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

[5] G.L.L. Buffon (1707-1788). Minimas darbas iš tiesų parašytas 1733 metais.

čia $\mu(B)$ žymi aibės B plotą. Šitaip skaičiuodami gauname tokią tikimybės reikšmę

$$P(A) = \frac{2l}{\pi a}.$$

Gautas rezultatas nelauktai duoda būdą skaičiaus π reikšmei rasti. Meskime adatą daug kartų: tegu n yra metimų skaičius, m – adatos ir tiesių kirtimosi atvejų skaičius. Pagal didžiųjų skaičių dėsnį, kurį nagrinėsime vėliau, kuo didesnis n, tuo labiau tikėtina, jog $P(A) = 2l/(\pi a)$ mažai skiriasi nuo m/n. Taigi, π galime skaičiuoti iš formulės

$$2l/\pi a \approx m/n.$$

Galima eksperimentuoti su bet kokio ilgio l adata (pavyzdžiui, degtuku ir liniuoto popieriaus lapu). Tarkime metus tokią adatą n kartų, adata kirto atitinkamai $m_1, \ldots, m_n$ linijų. Tada

$$\frac{m_1 + \ldots + m_n}{n} \approx \frac{2l}{\pi a}$$

Pasiremdami įgyta patirtimi sudarykime teorinį modelį tikimybėms skaičiuoti tuo atveju, kai eksperimento baigtį galima interpretuoti kaip $\mathbb{R}^n$ poaibio Ω tašką, ir visos baigtys yra „lygiavertės“. Čia ir toliau $\mathbb{R}$ yra realiųjų skaičių aibė, o $\mu(A)$ žymėsime poaibio $A \subset \mathbb{R}^n$ n-matį tūrį, jeigu jis egzistuoja (kai $n = 1, \mu$ reiškia geometrinį ilgį, kai $n = 2$ – plotą). Nagrinėsime tik tuos su šiuo bandymu susijusius įvykius, kurie vaizduojami Ω poaibiais, turinčiais tūrį.

3 apibrėžimas. *Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \mu(\Omega)$ egzistuoja ir $\mu(\Omega) < \infty$. Tegu*

$$\mathcal{A} = \{A : A \subset \Omega, \mu(A) \text{ egzistuoja}\}$$

yra nagrinėjamų atsitiktinių įvykių sistema, o $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ yra funkcija, apibrėžta lygybe

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Trejetą $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$ vadinsime geometrine tikimybine erdve.

Taigi geometrinėje tikimybinėje erdvėje baigtys yra atitinkamos geometrinės srities taškai, įvykiai – šios srities poaibiai, kurie turi geometrinį matą, o jų tikimybės apibrėžiamos šių geometrinių matų santykiu. Geometrinę tikimybinę erdvę taikome, kai eksperimento baigtis – atsitiktinis geometrinio objekto pasirodymas ar pasirinkimas. Kartais atsitiktinumo interpretacija irgi būna pasirinkimo objektas. Nuo atsitiktinumo interpretacijos priklauso pats rezultatas, kaip žinomame Bertrano[6] uždavinyje.

[6] J.L.F. Bertrand (1822-1900) -prancūzų matematikas; pagrindiniai darbai – analizės bei algebros srityse.

8 pavyzdys. Bertrano uždavinys

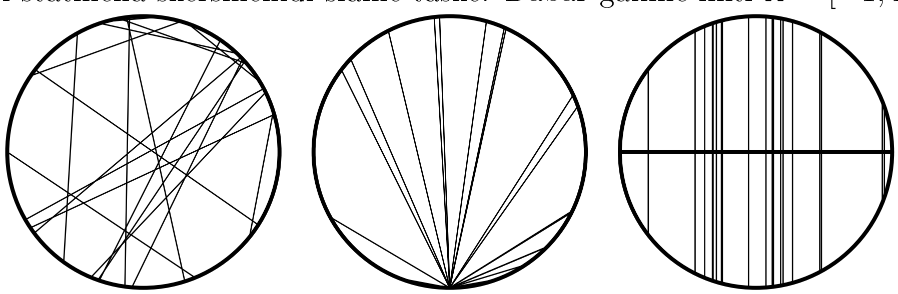
Atsitiktinai parenkama vienetinio apskritimo styga. Kokia tikimybė, jog ji ilgesnė už įbrėžto į šį apskritimą lygiakraščio trikampio kraštinę?

Galime suprasti „atsitiktinį“ stygos pasirinkimą įvairiai.

Tarkime vienetinio skritulio viduje atsitiktinai pasirenkame tašką ir imame stygą, einančią per šį tašką statmenai spinduliui, nubrėžtam per tą patį tašką. Tokiu atveju galime taikyti geometrinės tikimybinės erdvės modelį laikydami, jog Ω yra vienetinis skritulys.

Galime taipogi fiksuoti vieną apskritimo tašką P, nubrėžti liestinę šiame taške ir nagrinėti stygas, einančias per tašką P. Laikysime, jog styga parinkta, jei parinktas jos ir liestinės kampas. Tada taikydami geometrinę tikimybinę erdvę imame $\Omega = [0, \pi]$.

Pagaliau galime atsitiktinį stygos parinkimą suprasti ir taip. Fiksuojame apskritimo skersmenį ir atsitiktinai parenkame jo tašką. Nagrinėjame stygą, kuri statmena skersmeniui šiame taške. Dabar galime imti $\Omega = [-1, 1]$.



Atsitiktinį stygos parinkimą galima suprasti įvairiai

Atsakymai visais trimis atvejais skirtingi. Tikimybė, jog parinkta styga bus ilgesnė už įbrėžto apskritimo kraštinę lygi atitinkamai 1/4, 1/3 ir 1/2. Išspręskite uždavinį trimis atvejais ir įsitikinsite.

1.5. Tikimybių teorijos aksiomos

Norėdami skaičiuoti su bandymu susijusių atsitiktinių įvykių tikimybes, turime pirmiausia sudaryti bandymo matematinį modelį: apibrėžti bandymo baigčių aibę Ω, nuspręsti, kokius atsitiktinius įvykius nagrinėsime (t.y. turime apibrėžti nagrinėjamų atsitiktinių įvykių sistemą $\mathcal{A}$) ir apibrėžti tikimybių priskyrimo įvykiams taisyklę, t.y. funkciją $P : \mathcal{A} \to [0; 1]$. Visa tai padarę, gauname trejetą $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$. Tai ir yra visų mūsų skaičiavimų scena, kitaip tariant – tikimybinis bandymo modelis. Šį trejetą vadiname tiesiog tikimybine erdve.

Nagrinėjome bandymus su „vienodai galimomis“ baigtimis – klasikinį ir geometrinį modelius. Abiem atvejais įvykių sistemą $\mathcal{A}$ ir tikimybių priskyrimo funkciją P apibrėžėme pasinaudoję baigčių aibės savybėmis. Tačiau yra visokių bandymų ir visokių jas atitinkančių baigčių. Kiekvieno bandymo atskirai neišnagrinėsime. Todėl geriau, kaip įprasta matematikoje, plėtoti teoriją aksiomatiškai: fiksuoti mažiausią skaičių savybių, kurias privalo turėti trys objektai $\Omega, \mathcal{A}, P$, kad jų trejetas turėtų teisę vadintis tikimybine erdve, o visas kitas savybes įrodinėti remiantis šiomis savybėmis (aksiomomis) ir, žinoma, griežtais loginiais samprotavimais. Taip gauti teiginiai apie įvykius ir tikimybes bus teisingi visais įmanomais atvejais, nesvarbu, kas yra bandymo baigtys – skaičiai, taškai ar alaus bokalai.

Taigi, kokių savybių reikia pareikalauti iš elementariųjų įvykių aibės Ω, atsitiktinių įvykių sistemos $\mathcal{A}$ ir funkcijos $P : \mathcal{A} \to I\!R$?

Iš aibės Ω reikalausime mažiausiai. Pakaks, kad ši aibė būtų netuščia: $\Omega \neq \emptyset$.

Iš $\mathcal{A}$ pareikalausime daugiau: kad jungdami ir kirsdami poaibius (atsitiktinius įvykius) vėl gautume tos pačios šeimos elementus.

4 apibrėžimas. *Tegu Ω yra netuščia aibė. Jos poaibių sistemą $\mathcal{A}$ vadinsime σ-algebra, jeigu patenkintos tokios sąlygos:*

- $\Omega \in \mathcal{A}$;
- *jei $A \in \mathcal{A}$, tai ir $\overline{A} \in \mathcal{A}$;*
- *jei $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, \ldots,$ tai $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.*

Čia $\overline{A}$ žymi aibės A papildinį iki visos aibės Ω. Pati „skurdžiausia“ σ-algebra turi tik du elementus: $\mathcal{A}_* = \{\emptyset, \Omega\}$, pačiai „turtingiausiai“ priklauso visi aibės poaibiai: $\mathcal{A}^* = \mathcal{P}(\Omega)$.

Tiesiogiai iš apibrėžimo gauname, jog $\emptyset \in \mathcal{A}$ teisinga kiekvienai σ-algebrai. Nors apibrėžime reikalaujama, kad bet kokios skaičios aibių sistemos sąjunga vėl priklausytų $\mathcal{A}$, beveik akivaizdu, kad tai teisinga bet kokiai baigtinei aibių sistemai.

Jeigu poaibių šeima tenkina dvi pirmąsias σ-algebros apibrėžimo sąlygas, trečiąją tenkina tik su baigtinėmis poaibių sistemomis, t.y. tenkina sąlygą

- jei $A_i \in \mathcal{A}, i \in I$, yra baigtinė poaibių sistema, tai $\cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$,

tai $\mathcal{A}$ vadinama algebra.

Štai dar keletas lengvai įrodomų poaibių algebros savybių.

4 teorema. *Tegu $\mathcal{A}$ yra aibės Ω σ-algebra. Teisingi tokie teiginiai:*

- *jei $A_i, i \in I$, yra baigtinė arba skaiti aibių iš $\mathcal{A}$ šeima, tai $\cap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$;*
- *jei $A, B \in \mathcal{A}$, tai $A \backslash B \in \mathcal{A}$.*

Čia žymime $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

Kaip sudaryti įvykių σ-algebrą $\mathcal{A}$? Konkrečiu atveju pirmiausia reikia pasirūpinti įtraukti į nagrinėjamų įvykių šeimą mums įdomius įvykius, o po to papildyti sistemą įvykiais taip, kad sistema būtų σ-algebra. Pavyzdžiui, jeigu $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$, o mums labai rūpi, kad į nagrinėjamų įvykių sistemą įeitų įvykiai $\{1,2,3\}, \{3,4,5\}$ tai mažiausia σ-algebra, kuriai priklauso šie įvykiai yra tokia:

$$\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{3\}, \{4,5\}, \{1,2\}, \{1,2,4,5\}, \Omega\big\}.$$

Ar visada „svarbių“ įvykių sistemą galima papildyti iki σ-algebros? Visada.

5 apibrėžimas. *Tegu $\mathcal{S}$ yra netuščios aibės Ω poaibių sistema. Jeigu σ-algebra $\mathcal{A}$ tenkina sąlygą $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ ir turi savybę: su bet kuria kita σ- algebra $\mathcal{A}'$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}'$, teisinga $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$, tai σ- algebrą $\mathcal{A}$ vadinsime σ- algebra, generuota $\mathcal{S}$ ir žymėsime $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S})$.*

σ-algebrą $\sigma(\mathcal{S})$ galime įsivaizduoti kaip mažiausią σ-algebrą, kuri aprėpia sistemą $\mathcal{S}$.

5 teorema. *Bet kokiai poaibių sistemai $\mathcal{S}$ $\sigma(\mathcal{S})$ egzistuoja.*

Štai glaustas įrodymo išdėstymas: bent viena σ-algebra $\mathcal{A}', \mathcal{S} \subset \mathcal{A}'$, egzistuoja. Pavyzdžiui, visų Ω poaibių σ-algebra. Visų tokių σ-algebrų sankirta ir yra σ-algebra, tenkinanti generuotos σ algebros apibrėžimo sąlygas.

9 pavyzdys. Svarbus σ-algebros pavyzdys. Dažnai bandymo baigtys vaizduojamos tiesės ar didesnio matavimo erdvės taškais, o svarbūs įvykiai – intervalais. Tegu $\mathcal{S}$ yra realiųjų skaičių aibės $I\!R$ intervalų $[a,b)$ sistema. Tada $\sigma(\mathcal{S})$ vadinama Borelio[7] σ-algebra. Tiesės poaibių Borelio σ-algebrą žymėsime $\mathcal{B}$. Analogiškai apibrėšime $I\!R^n$ Borelio σ-algebrą. Jei $\mathcal{S}$ yra visų n-mačių intervalų $[a_1,b_1) \times \ldots \times [a_n,b_n)$ sistema, tai $\sigma(\mathcal{S})$ vadinsime erdvės $I\!R^n$ Borelio σ-algebra. Žymėsime: $\mathcal{B}^n$.

Borelio σ-algebros aibes vadinsime Borelio aibėmis. Pavyzdžiui, aibė, sudaryta iš vieno taško yra Borelio aibė, nes ją galima gauti, kertant skaičią intervalų sistemą:

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a, a+1/n).$$

Visos aibės, kurias paprastai nagrinėjame: uždarieji, atvirieji ir kitokie intervalai bei jų sąjungos, baigtinės skaičių aibės, taip pat – racionaliųjų, iracionaliųjų skaičių aibės yra Borelio aibės.

O dabar aptarkime, kokias savybes turi turėti įvykiams tikimybes priskirianti funkcija $P : \mathcal{A} \to I\!R$.

[7]Emile Borel (1871-1956). Paskelbė daug reikšmingų darbų matematinės analizės, tikimybių ir kitose srityse.

6 apibrėžimas. *Tegu $\mathcal{A}$ yra netuščios aibės Ω poaibių σ-algebra. Funkciją $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ vadinsime tikimybiniu matu (dažnai – tiesiog tikimybe), jei*

- $P(\Omega) = 1$;
- *jei $A_i \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i,j = 1,2,\ldots, i \neq j)$, tai*

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Priminsime, jog įvykius, kuriems $A \cap B = \emptyset$, vadiname nesutaikomais. Tikimybės apibrėžimo antrąją sąlygą vadinsime σ- adityvumo sąlyga. Taigi ši sąlyga reikalauja, kad nesutaikomų įvykių sąjungos tikimybė būtų lygi įvykių tikimybių sumai.

Kartais nagrinėjamos funkcijos $P : \mathcal{A} \to [0,1]$, kurios šią sąlygą tenkina tik baigtinėms nesutaikomų įvykių sąjungoms. Tokios funkcijos nėra tikimybiniai matai; sakome, kad jos tenkina baigtinio adityvumo savybę.

O dabar sujunkime visus tris nagrinėtus objektus į vieną.

7 apibrėžimas. *Trejetą $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$, čia $\mathcal{A}$ yra netuščios aibės Ω poaibių σ-algebra, P – tikimybinis matas, vadinsime tikimybine erdve.*

Šios tikimybių teorijos aksiomatikos autorius – rusų matematikas A.N. Kolmogorovas (1903-1987).[8] Jo knygelė apie tikimybių teorijos aksiomatinius pagrindus išleista 1933 metais.

Abi anksčiau nagrinėtos tikimybinės erdvės yra tikimybinės erdvės naujojo apibrėžimo prasme. Nors geometrinės tikimybinės erdvės atveju įsitikinti tuo anaiptol nėra trivialu!

1.6. Kelios lygybės ir nelygybės

Šiame skyriuje nagrinėsime tikimybinę erdvę $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$. Įrodysime paprasčiausias tikimybių savybes. Laikysime, kad visi nagrinėjami atsitiktiniai įvykiai priklauso įvykių σ-algebrai $\mathcal{A}$.

Priminsime, jog $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

6 teorema. *Teisingi tokie teiginiai*

[8] A.N. Kolmogorovas (1903-1987) yra vienas didžiausių XX amžiaus matematikų. Jo moksliniai interesai buvo labai platūs. Mokslinius tyrinėjimus pradėjęs realaus kintamojo funkcijų srityje vėliau jis nagrinėjo įvairius aibių teorijos, logikos, topologijos, mechanikos, dif. lygčių, informacijos teorijos, tikimybių teorijos ir kitų sričių problemas. Domėjosi įvairiais matematikos taikymais, o taip pat matematinio švietimo ir matematikos populiarinimo klausimais.

1. $P(\emptyset) = 0$;

2. lygybė

$$P(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i),$$

teisinga bet kokiai baigtinei arba skaičiai nesutaikomų įvykių sistemai $A_i, i \in I$;

3. $P(A\backslash B) = P(A) - P(A\cap B)$; *atskiru atveju* $P(A^c) = 1 - P(A)$;

4. $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$;

Įrodymas arba tiksliau – jo kontūrai.

1) Pritaikykime σ-adityvumo savybę atvejui, kai visi įvykiai negalimieji: $A_i = \emptyset$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

2) Jei I yra skaiti aibė – nieko naujo netvirtinama. Jeigu I baigtinė, papildykime ją tuščiomis aibėmis iki skaičios šeimos, pasinaudokime σ-adityvumo savybe ir lygybe $P(\emptyset) = 0$.

3) Įvykiai $A\backslash B$ ir $A\cap B$ yra nesutaikomi, o jų sąjunga yra A. Belieka pritaikyti jau įrodytą 2) dalį.

4) Įvykiai $A\backslash B$ ir B yra nesutaikomi, o jų sąjunga yra $A\cup B$, taigi vėl pakanka pritaikyti 2) dalį.

7 teorema. *Jei* A_i $(i\in I)$ *yra baigtinė arba skaiti įvykių sistema,* A – *atsitiktinis įvykis ir* $A \subset \cup_i A_i$, *tai*

$$P(A) \leq \sum_{i\in I} P(A_i). \tag{6}$$

Atskiru atveju, kai $A = \cup_i A_i$

$$P(\bigcup_{i\in I} A_i) \leq \sum_{i\in I} P(A_i). \tag{7}$$

Įrodymas. Įrodykime (6) nelygybę, kai I sudaro vienas elementas; t. y. įrodykime, jog iš $A\subset B$ išplaukia $P(A)\leq P(B)$. Iš tiesų $B = A\cup(B\backslash A)$, ir įvykiai $A, B\backslash A$ nesutaikomi. Tada iš įrodytos teoremos gauname

$$P(A) \leq P(A) + P(B\backslash A) = P(B).$$

Tegu aibė I yra begalinė, tada galime tarti, jog $i = 1, 2, \ldots$. Įvykį $A^* = \cup_i A_i$ užrašysime nesutaikomų įvykių $A_i^*, A_i^*\subset A_i$, sąjunga:

$$A^* = \cup_i A_i^*, \quad A_1^* = A_1, \quad A_{n+1}^* = A_{n+1}\backslash\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big), \quad A_n^*\subset A_n.$$

Tada iš σ-adityvumo savybės ir iš $P(A_n^*) \le P(A_n)$ gausime

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(A_i^*) \le \sum_{i\in I} P(A_i).$$

Kadangi $A \subset A^*$, tai

$$P(A) \le P\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) \le \sum_{i\in I} P(A_i).$$

Teorema įrodyta.

Panagrinėkime vieną pavyzdį. Jį nagrinėdami pasinaudosime tikimybių adityvumo savybėmis.

10 pavyzdys. Optimalaus pasirinkimo uždavinys

Tegu iš n objektų reikia pasirinkti „geriausią“. Tie objektai pasirodo mums vienas po kito; jeigu vieno nepasirinkome – pasirodo kitas, o pirmasis dingsta „amžinai“. Kokios strategijos reikia laikytis, kad tikimybė pasirinkti geriausią objektą būtų didžiausia?

Jeigu norite, galite interpretuoti šį uždavinį kaip sutuoktinio pasirinkimo problemą.

Laikysimės paprastos strategijos: tiesiog susipažinsime su pirmaisiais m objektų jų nepasirinkdami (susikursime standartą!), o paskui pasirinksime pirmąjį, kuris bus geresnis už geriausiąjį iš m pirmųjų.

Gali įvykti vienas iš nesutaikomų įvykių $H_j, j = m+1, \dots, n, n+1$,

$$\begin{aligned} H_j &= \{\text{pasirinktas i-tasis objektas}\} \quad (m+1 \le j \le n), \\ H_{n+1} &= \{\text{nepasirinktas joks objektas}\}. \end{aligned}$$

Tegu $A = \{\text{pasirinktasis objektas yra geriausias}\}$, tada

$$A = \bigcup_{j=m+1}^{n} A \cap H_j, \quad P(A) = \sum_{j=m+1}^{n} P(A\cap H_j).$$

Įvykis $A \cap H_j$ įvyksta tada, kai susipažinę su m pirmųjų objektų renkame pirmąjį geresnį už juos, tas geresnis pasirodo j-uoju ir yra apskritai pats geriausias. Skaičiuosime šio įvykio tikimybę.

Tarkime mūsų objektai yra skirtingų skaičių aibė $A = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$. Kuo skaičius didesnis – tuo geresnis, tačiau koks skaičius didžiausias mes iš anksto nežinome. Pažymėkime didžiausiąjį skaičių N. Skaičiai mums pasirodo atsitiktine tvarka vienas po kito. Taigi baigtis – kėlinys iš šių skaičių: $\omega = \langle i_1, i_2, \dots, i_n\rangle$. Iš viso yra $N = n!$ skirtingų kėlinių, t. y. baigčių.

Skaičiuokime, kiek yra baigčių $\omega = \langle i_1, i_2, \dots, i_n\rangle$, palankių $A \cap H_j$ $(m + 1 \le j \le n)$. Baigtis ω yra palanki $A \cap H_j$, jei $i_j = N$ ir $\max\{i_1, \dots, i_m\} >$

$\max\{i_{m+1},\ldots,i_{j-1}\}$, t.y. elementai $i_{m+1},\ldots,i_{j-1}$ yra „blogesni“ už geriausiąjį iš elementų $i_1,\ldots,i_m$.

Kiek gi kėlinių $\omega = \langle i_1, i_2, \ldots, i_n\rangle$, su šia savybe galime sudaryti? Skaičiuokime taip: iš skaičių aibės $A\backslash\{N\}$ parinkime $j-1$ skaičių, tai galima padaryti C_{n-1}^{j-1} būdais. Sudarysime iš jų gretinį. Didžiausiąjį iš atrinktųjų skaičių įrašykime į vieną iš pirmųjų m vietų, kitus – į likusias vietas. Šitaip galime sudaryti $mC_{n-1}^{j-1}(j-2)!$ skirtingų gretinių $\langle i_1, i_2, \ldots, i_{j-1}\rangle$, tenkinančių sąlygą $\max\{i_1,\ldots,i_m\} > \max\{i_{m+1},\ldots,i_{j-1}\}$. Papildykime tokį gretinį iki gretinio $\langle i_1, i_2, \ldots, i_n\rangle$, atitinkančio palankią įvykiui $A\cap H_j$, baigtį. Kadangi $i_j = N$, tai lieka $n-j$ skaičių ir lygiai tiek vietų jiems surašyti. Gavome, kad baigčių $\langle i_1, i_2, \ldots, i_n\rangle$, palankių $A\cap H_j$, t.y., tenkinančių sąlygas $i_j = N$ ir $\max\{i_1,\ldots,i_m\} > \max\{i_{m+1},\ldots,i_{j-1}\}$, yra

$$m\cdot C_{n-1}^{j-1}\cdot(j-2)!\cdot(n-j)! = \frac{m(n-1)!}{(j-1)!}.$$

Taigi

$$P(A) = \sum_{j=m+1}^{n} P(A\cap H_j) = \frac{m}{n}\cdot\sum_{j=m}^{n-1}\frac{1}{j}.$$

Geriausio pasirinkimo tikimybė $P(A)$ priklauso nuo strategijos, t. y. nuo m reikšmės: $P(A) = P_m(A)$. Kokiam m ši tikimybė didžiausia? Geriausios strategijos dydį m_n galime nustatyti iš sąlygos

$$P_{m_n}(A) = \max_{0\le m\le n} P_m(A).$$

Dydžiui m_n teisingi tokie ribiniai sąryšiai

$$\frac{m_n}{n}\to\frac{1}{e},\quad P_{m_n}(A)\to\frac{1}{e}\quad (n\to\infty).$$

Tad kai objektų aibė yra gausi, geriausia rinktis, įvertinus maždaug trečdalį pretendentų.

Galima suskaičiuoti tikimybę, kad pagal šią strategiją pasirinksime objektą, kuris pagal vertę yra antras trečias ir t.t.

1.7. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimybės

Dažnai svarbios ne pačios bandymo baigtys, bet tam tikri priskirti joms skaičiai. Pavyzdžiui, kauliuką galime ne šiaip sau mėtyti, bet su juo lošti. Galime susitarti, pavyzdžiui, kad išsiridenus mažiau kaip keturioms akutėms, 1 Lt pralošiame, o išsiridenus daugiau – tiek pat išlošiame. Taigi prieš bandymą mes baigtims $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ priskiriame skaičių -1, o kitoms baigtims – reikšmę 1. Taigi apibrėžiame funkciją iš baigčių aibės į reikšmių aibę $X : \Omega \to \{-1; 1\}$. Funkcijos reikšmes gauname tik po bandymo, taigi – natūralu tokią funkciją vadinti atsitiktiniu dydžiu. Kadangi pirmavaizdžiai $X^{-1}(-1) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, X^{-1}(1) = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ yra atsitiktiniai įvykiai, tai galime skaičiuoti tikimybes, kad atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes -1 ir 1

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Apibrėšime paprastąjį atsitiktinį dydį bendruoju atveju.

8 apibrėžimas. *Funkciją $\xi : \Omega \to I\!R$ vadinsime paprastu atsitiktiniu dydžiu, jei ξ įgyja reikšmes iš baigtinės aibės ir kiekvienai reikšmei x*

$$\xi^{-1}(x) = \{\omega : \xi(\omega) = x\} \in \mathcal{A}.$$

Paprasčiausius atsitiktinius dydžius galime gauti taip: suskaidykime baigčių erdvę Ω į baigtinę nesutaikomų įvykių sąjungą:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} H_i, \quad H_i \in \mathcal{A},\ H_i \cap H_j = \emptyset,\ \text{jei } i \neq j,$$

ir apibrėžkime $\xi : \Omega \to I\!R$, imdami $\xi(\omega) = x_i$, kai $\omega \in H_i$; čia $x_i \in I\!R$ fiksuoti skaičiai.

Jei $A \in \mathcal{A}$ koks nors atsitiktinis įvykis, tai jo kaip poaibio indikatorius

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \omega \in A, \\ 0, & \text{jei } \omega \notin A. \end{cases}$$

yra paprastas atsitiktinis dydis. Nesunku įsitikinti, jog su bet kokiais įvykiais A, B

$$I_{A\cup B} = I_A + I_B - I_{A\cap B},\ I_A \cdot I_B = I_{A\cap B}.$$

Jeigu ξ yra paprastas atsitiktinis dydis, x_i jo reikšmės, $H_i = \xi^{-1}(x_i)$ yra atsitiktiniai įvykiai. Tada

$$\xi(\omega) = \sum_i x_i I_{H_i}(\omega).$$

Taigi kiekvieną paprastąjį atsitiktinį dydį galima išreikšti dar paprastesniais – įvykių indikatoriais. Įvykių indikatorius galime suvokti tiesiog kaip signalus, kurie nurodo, ar įvykis įvyko, ar ne.

8 teorema. *Jei ξ, η yra paprasti atsitiktiniai dydžiai, a, b – realūs skaičiai, tai $\zeta = a\xi + b\eta$ yra taip pat paprastas atsitiktinis dydis.*

Teiginys yra teisingas ir bendruoju atveju: baigtinio skaičiaus paprastųjų atsitiktinių dydžių tiesinė kombinacija yra vėl paprastasis atsitiktinis dydis.

Įrodymas. Jei ξ yra paprastasis atsitiktinis dydis, tai $a\xi$ irgi paprastasis. Taigi pakanka teoremą įrodyti, kai $a = b = 1$. Tegu x_i yra paprastojo atsitiktinio dydžio ξ reikšmės, $G_i = \xi^{-1}(x_i)$, y_j – paprastojo atsitiktinio dydžio η reikšmės, $H_j = \eta^{-1}(y_j)$. Tada įvykiai $G_i \cap H_j$ skirtingoms poroms i, j yra nesutaikomi, o ζ sutampa su paprastuoju atsitiktiniu dydžiu

$$\sum_{i,j}(x_i + y_j)I_{G_i \cap H_j}.$$

9 apibrėžimas.

Tegu ξ yra paprastasis atsitiktinis dydis, x_i – jo reikšmės, $H_i = \xi^{-1}(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Atsitiktinio dydžio ξ vidurkiu vadinsime skaičių

$$\mathbf{E}[\xi] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(H_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(\xi = x_i).$$

Kodėl būtent taip apibrėžiame vidurkį? Panagrinėkime išsiaiškinti nagrinėdami monetos metimo bandymą. Baigčių aibę Ω sudaro dvi baigtys:

$$S = \{\text{iškrito skaičius}\},\ H = \{\text{ iškrito herbas}\}.$$

Tarkime S ir H pasirodymo tikimybės yra p ir $q = 1 - p$. Apibrėžkime paprastąjį atsitiktinį dydį ξ, $\xi(S) = 1$, $\xi(H) = 2$. Tarkime, atlikome ilgą metimų seriją ir gavome baigčių seką $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $X_m \in \{S, H\}$. Mūsų intuicija nesipriešins, jei padarysime prielaidą, jog baigčių sekoje S pasikartoja $\approx np$, H atitinkamai $\approx n(1-p)$ kartų. Sumuokime gautas ξ reikšmes; gautoji suma $\approx 1 \cdot np + 2 \cdot n(1-p)$. Tada reikšmė, tenkanti vienam metimui lygi $\approx 1 \cdot p + 2 \cdot (1-p)$. Tai ir yra matematinis dydžio ξ vidurkis.

Pastebėkime, jog atsitiktinio įvykio indikatoriui

$$\mathbf{E}[I_A] = 0 \cdot P(I_A = 0) + 1 \cdot P(I_A = 1) = P(A).$$

9 teorema. *Jei ξ, η yra paprastieji atsitiktiniai dydžiai, a, b – realieji skaičiai, $\zeta = a\xi + b\eta$, tai*

$$\mathbf{E}[\zeta] = a\mathbf{E}[\xi] + b\mathbf{E}[\eta].$$

Įrodymas. Kai vienas iš skaičių a, b lygus nuliui, lygybė išplaukia tiesiog iš vidurkio apibrėžimo. Atvejis, kai nei vienas koeficientas nėra nulis, ekvivalentus atvejui $a = b = 1$. Šį atvejį ir įrodinėsime.

Žymėjimų x_i, y_j, G_i, H_j prasmė tokia pati kaip ankstesnės teoremos įrodyme: $G_i = \xi^{-1}(x_i), H_j = \eta^{-1}(y_j)$. Tada

$$\zeta = \sum_{i,j}(x_i + y_j)I_{G_i \cap H_j}.$$

Pagal vidurkio apibrėžimą:

$$\mathbf{E}[\zeta] = \sum_{i,j}(x_i + y_j)P(G_i \cap H_j).$$

Pergrupavę dėmenis gausime

$$\mathbf{E}[\zeta] = \sum_i x_i \sum_j P(G_i \cap H_j) + \sum_j y_j \sum_i P(G_i \cap H_j). \tag{8}$$

Lieka pastebėti, jog fiksuotam i įvykiai $G_i \cap H_u, G_i \cap H_v, u \neq v$, yra nesutaikomi, o jų sąjunga lygi įvykiui $G_i = \{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$. Tada

$$P(G_i) = \sum_j P(G_i \cap H_j).$$

Analogiška lygybė teisinga ir tikimybei $P(H_j)$. Pasirėmę šiomis lygybėmis (8) sąryšyje gausime

$$\mathbf{E}[\zeta] = \sum_i x_i P(G_i) + \sum_j y_j P(H_j) = \mathbf{E}[\xi] + \mathbf{E}[\eta].$$

Teorema nesunkiai apibendrinama ir bet kokiam baigtiniam dėmenų skaičiui.

10 teorema. *Jei $\xi_1, \ldots, \xi_n$ yra paprastieji atsitiktiniai dydžiai, $a_1, \ldots, a_n$ – realieji skaičiai, tai*

$$\mathbf{E}[a_1\xi_1 + \ldots + a_n\xi_n] = a_1\mathbf{E}[\xi_1] + \ldots + a_n\mathbf{E}[\xi_n].$$

Šia vidurkio adityvumo savybe pasinaudosime išvesdami kelias formules sudėtingų įvykių tikimybėms skaičiuoti. Kaip tai daroma, galime išbandyti iškart. Lygybėje

$$I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_{A \cap B}$$

imkime vidurkius abiejose pusėse ir pasinaudokime tuo, kad $P(C) = \mathbf{E}[I_C]$ teisinga bet kokiam įvykiui C. Iškart gausime

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Ši lygybė jau įrodyta anksčiau. Apibendrinsime ją bet kokiai įvykių sąjungai

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Įvykį B galime interpretuoti kaip įvykį, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta bent vienas įvykis A_i.

11 teorema. *Bet kokiems įvykiams A_i $(i = 1, \dots, n)$ teisinga lygybė*

$$P\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} S_r, \tag{9}$$

čia

$$S_r = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_r \le n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}).$$

Įrodymas. Tegu $B = \cup_{i=1}^{n} A_i$. Iš pradžių įrodykime lygybę

$$I_B(\omega) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} X_r(\omega), \quad X_r = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_r \le n} I_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}}. \tag{10}$$

Tam pakanka parodyti, jog (10) lygybėje abi pusės lygios 0 arba 1 tuo pačiu metu. Nagrinėkime tuos ω, kurie priklauso lygiai $m, m = 0, 1, \dots, n$, įvykių A_i. Jei $m = 0$, tai $I_B(\omega) = 0$ ir kiekvienas $X_r(\omega) = 0$, taigi (10) lygybė teisinga.

Jei $m \ge 1$, tai $I_B(\omega) = 1$. Jei $r \le m$, tai egzistuoja lygiai C_m^r rinkinių $1 \le i_1 < \dots < i_r \le n$, kad $I_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}}(\omega) = 1$, todėl $X_r(\omega) = C_m^r$. Jei $r > m$, tai $X_r(\omega) = 0$. Iš šių samprotavimų gauname, jog (10) lygybės dešinės pusės suma lygi

$$\sum_{r=1}^{m} (-1)^{r-1} C_m^r = 1 - (1-1)^m = 1.$$

Taigi (10) lygybė teisinga. Imdami vidurkius abiejose šios lygybės pusėse, gausime (9). Teorema įrodyta.

Užrašykime gautąją formulę, kai $n = 2, 3$. Gausime:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2), \\ P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) \\ &- P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Dabar nagrinėkime įvykį B_k, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta lygiai k sistemos A_i $(i = 1, \dots, n)$ įvykių. Surasime šio įvykio tikimybę.

12 teorema. *Tegu A_i $(i = 1, \ldots, n)$ bet kokie įvykiai, B_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ – įvykis, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta lygiai k įvykių A_i. Teisinga lygybė*

$$P(B_k) = \sum_{r=k}^{n} (-1)^{r-k} C_r^k S_r, \tag{11}$$

dydžiai S_r apibrėžti ansktesnėje teoremoje.

Įrodymas. Įrodymo eiga panaši kaip ankstesnėje teoremoje. Iš pradžių įrodykime lygybę

$$I_{B_k}(\omega) = \sum_{r=k}^{n} (-1)^{r-k} C_r^k X_r(\omega). \tag{12}$$

Pasirinkime elementrųjį įvykį ω. Tarkime, jis priklauso lygiai m įvykių A_i $(m = 0, 1, \ldots, n)$. Įrodysime, kad visais atvejais abi (12) lygybės pusės iš tikrųjų įgyja tas pačias reikšmes.

Jei $m < k$, tai $I_{B_k}(\omega) = 0$, ir taip pat su visais $r \geq k$, $X_r(\omega) = 0$. Tada abiejose (12) pusėse yra nuliai.

Jei $m = k$, tai $I_{B_k}(\omega) = 1$, ir $X_k(\omega) = 1$, o $X_r(\omega) = 0$, kai $r > k$. Tada abiejose (12) pusėse yra vienetai.

Tegu dabar $m > k$. Kairė (12) pusė lygi nuliui, o dešinėje $X_r(\omega) = 0$, kai $r > m$ ir $X_r(\omega) = C_m^r$, kai $k \leq r \leq m$. Pertvarkę reiškinius gausime

$$\sum_{r=k}^{m} (-1)^{r-k} C_r^k C_m^r = C_m^k (1-1)^{m-k} = 0.$$

Kadangi (12) lygybė teisinga, tai (11) gausime paėmę vidurkius abiejose šios lygybės pusėse.

Parašykime gautąją formulę, pavyzdžiui, kai $n = 3$, $k = 1$. Gausime

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2(P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)) \\ &+ 3P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

11 pavyzdys. Kortų kaladė

Tegu N skirtingų kortų kaladė permaišoma. Kokia tikimybė, jog po permaišymo bent viena korta liks savo vietoje? Lygiai m $(m = 0, 1, \ldots, N)$ kortų liks savo vietoje?

Pažymėkime šias tikimybes atitinkamai $q(N), p_m(N)$. Tegu A_i – įvykis, jog i-toji korta liks savo vietoje. Elementariųjų įvykių yra lygiai tiek, kiek gali būti skirtingų kortų kaladžių, t. y. $N!$. Fiksuotiems $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}) = \frac{(N-r)!}{N!}.$$

Tada
$$S_r = \frac{C_N^r (N-r)!}{N!} = \frac{1}{r!}.$$
Dabar galime taikyti įrodytas teoremas:
$$\begin{aligned} q(N) &= P(\bigcup_{i=1}^{N} A_i) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = 1 - \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{1}{j!}, \\ p_m(N) &= \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{N-m} (-1)^n \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Pastebėkime, jog $q(N) \to 1 - \mathrm{e}^{-1}, p_m(N) \to \mathrm{e}^{-1}/m!$, kai $N \to \infty$, čia e – natūrinių logaritmų pagrindas.

1.8. Tikimybės monotoniškumas

Dabar įrodysime dvi teoremas apie „didėjančių“ ir „mažėjančių“ įvykių tikimybes.

13 teorema. *Tegu įvykiai A_i $(i = 1, \ldots)$ monotoniškai didėja :*
$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots, \quad A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n.$$
Tada $P(A_n) \to P(A)$, kai $n \to \infty$.

Įrodymas. Įvykiai $B_n = A_n \cap \overline{A_{n-1}}$ yra nesutaikomi; čia $A_0 = \emptyset$. Be to,
$$A_n = \bigcup_{m=1}^{n} B_m, \quad A = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m.$$

Pritaikę σ-adityvumo savybę gauname
$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \lim_{n \to \infty} P(A_n).$$

Analogiška teorema teisinga ir mažėjančių įvykių sekai.

14 teorema. *Tegu įvykiai A_i $(i = 1, \ldots)$ monotoniškai mažėja :*
$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots, \quad A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_n.$$
Tada $P(A_n) \to P(A)$, kai $n \to \infty$.

Įrodymas. Priešingų įvykių seka $\overline{A_n}$ yra didėjanti: $\overline{A_1} \subset \overline{A_2} \dots$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_n} = \overline{A}.$$

Čia pasinaudojome žinomu sąryšiu, siejančiu aibių papildinius bei sąjungos ir sankirtos veiksmus. Pasirėmę ką tik įrodyta teorema, gausime

$$P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n) \to P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Tai, žinoma, ekvivalentu šios teoremos tvirtinimui.

1.9. Tikimybiniai matai Borelio σ-algebroje

Jeigu aibės Ω poaibių šeimoje $\mathcal{S}$ yra daug aibių, tai jos generuotoje σ-algebroje $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S})$ – juo labiau. Kaip apibrėžti tikimybinius matus $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$? Atskirais atvejais pakanka „gerai" apibrėžti funkciją $P : \mathcal{S} \to [0, 1]$. Yra bendros teoremos, kurios garantuoja, kad P galima pratęsti iki funkcijos $P : \sigma(\mathcal{S}) \to [0, 1]$.

Dažnai elementarieji su bandymu susiję įvykiai vaizduojami skaičių tiesės taškais, o atsitiktiniai įvykiai – Borelio aibėmis. Todėl svarbu išsiaiškinti, kaip tikimybiniai matai gali būti apibrėžti Borelio σ-algebroje $\mathcal{B}$.

Tegu $\mathcal{S}$ yra intervalų

$$[a, b), \quad (-\infty, a), \quad [a, \infty), \quad (-\infty, \infty)$$

šeima, o $F : I\!R \to [0, 1)$ funkcija, turinti šias savybes:

1. *F yra nemažėjanti;*
2. *F yra tolydi iš kairės, t. y. $F(x - \epsilon) \to F(x)$, kai $\epsilon > 0, \epsilon \to 0$;*
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$

Aptarsime tikimybinio mato $P_F = P, P : \mathcal{B} \to [0, 1]$ konstrukciją, čia $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{S})$ – Borelio σ-algebra.

Visų pirma funkciją P apibrėžkime aibėje $\mathcal{S}$:

$$P([a, b)) = F(b) - F(a), \ P((-\infty, a)) = F(a), \ P([a, \infty)) = 1 - F(a), \ P(I\!R) = 1. \tag{13}$$

Funkcijos F savybės užtikrina, kad P yra σ-adityvi funkcija savo apibrėžimo aibėje, t. y. teisingas toks teiginys.

15 teorema. *Jei $I_j \in \mathcal{S}$, $(j = 1, 2, \ldots)$, yra nesikertančių intervalų sistema ir $I = \cup_j I_j$ – taip pat šeimos $\mathcal{S}$ elementas, $P : \mathcal{S} \to [0, 1]$ funkcija apibrėžta (13), tai*

$$P(I) = \sum_{i=1}^{\infty} P(I_j).$$

Detalų šio bei kitų šiame skyrelyje formuluojamų teiginių įrodymus galima rasti knygoje *J. Kubilius*, „Tikimybių teorija ir matematinė statistika“, Vilnius, 1980.

Prisiminkime, ką vadiname aibių algebra.

10 apibrėžimas. *Tegu Ω yra netuščia aibė. Jos poaibių sistemą $\mathcal{A}$ vadinsime algebra, jeigu patenkintos tokios sąlygos:*

- $\Omega \in \mathcal{A}$;
- *jei $A \in \mathcal{A}$, tai ir $A^c \in \mathcal{A}$;*
- *jei $A_j \in \mathcal{A}$ $(j \in J)$ yra baigtinė poaibių sistema, tai*

$$\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{A}.$$

Prisiminkime, jog algebros ir σ-algebros apibrėžimai skiriasi tik trečiąja sąlyga).

Dabar grįšime prie mūsų nagrinėjamų aibių. Apibrėšime:

$$\mathcal{A} = \Big\{ \bigcup_{j \in J} I_j : I_j \text{ nesikertantys intervalai iš } \mathcal{S}, \quad J - \text{ baigtinė aibė.} \Big\} \tag{14}$$

Akivaizdu, jog $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, tad galima bandyti pratęsti P iki funkcijos, apibrėžtos šioje didesnėje aibių šeimoje.

Jei $A \in \mathcal{A}$, $A = \cup_{j \in J} I_j$, kur I_j nesikertantys $\mathcal{S}$ intervalai, J – baigtinė aibė, tai apibrėšime:

$$P(A) = \sum_{i \in J} P(I_j). \tag{15}$$

Kol kas dar negalime tvirtinti, jog lygybe (15) iš tiesų apibrėžėme funkciją – juk aibę A nesikertančių intervalų sąjunga galima reikšti ne vieninteliu būdu. Būtina parodyti, jog (15) lygybe apibrėžiamas skaičius $P(A)$ nepriklauso nuo to, kuris iš aibės A užrašymo būdų yra naudojamas. Teisingas toks teiginys.

16 teorema. *(14) lygybe apibrėžta aibių sistema $\mathcal{A}$ yra algebra, o (15) yra korektiškas σ-adityvios funkcijos $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ apibrėžimas.*

Pastebėkime, jog $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{A})$.

Tikimybinio mato konstrukcijai užbaigti lieka pasiremti galingu mato teorijos rezultatu – Caratheodory[9] teorema.

17 teorema. *Tegu $\mathcal{A}$ – netuščios aibės Ω poaibių algebra, o $Q : \mathcal{A} \to [0, 1]$ σ-adityvi funkcija, $Q(\Omega) = 1$. Tada egzistuoja vienintelis tikimybinis matas $P : \sigma(\mathcal{A}) \to [0, 1]$ tenkinantis sąlygą: jei $A \in \mathcal{A}$, tai $P(A) = Q(A)$.*

Ši teorema yra teisinga bendresniame nei mūsiškis kontekste, žr. jau minėtą J. Kubiliaus knygą. Paminėsime, kad funkcija Q iki mato P pratęsiama taip:

$$P(A) = \inf\{\sum_{i\in J} Q(A_j) : J \text{ skaiti aibė, } A \subset \bigcup_{i\in J} A_j,\ A_j \in \mathcal{A}\}.$$

Taigi tikimybinis matas, apibrėžtas σ-algebroje $\mathcal{B}$ ir intervalams įgyjantis (13) reikšmes, egzistuoja.

Šio skyrelio teorija parodo, kaip apibrėžti tikimybes, kai įvykiai vaizduojami Borelio aibėmis: reikia sukonstruoti tinkamą funkciją F.

1.10. Sąlyginės tikimybės

Tarkime, egzaminui parengta n bilietų po vieną klausimą, jūs neišmokote klausimo Nr.X ir nutarėte traukti bilietą antra(s). Taigi bandymas – dviejų bilietų traukimas. Prieš bandymo pradžią apskaičiavę įvykio

$$A = \{\text{egzamino išlaikyti nepasisekė}\}$$

tikimybę, gaunate rezultatą: $P(A) = 1/n$. Tai – *apriorinė* tikimybė, gauta neturint jokios papildomos informacijos apie bandymo eigą.

Bandymas prasideda, kai ištraukiamas pirmas bilietas. Tarkime, įvyko įvykis

$$B = \{\text{pirmuoju klausimas Nr. X neištrauktas}\}.$$

Pasirėmę šia informacija jūs iš naujo galime skaičiuoti nesėkmės tikimybę. Ji lygi $\frac{1}{n-1}$. Kadangi skaičiuojant ją rėmėmės informacija, kurią mums suteikė įvykęs įvykis B, tai šią tikimybę vadiname sąlygine ir žymime $P(A|B)$. Tai – *aposteriorinė* arba sąlyginė tikimybė, gauta pasinaudojant papildoma informacija apie įvykį B. Pirmuoju atveju teko atsižvelgti į visus įvykiui A palankius elementariuosius įvykius, antruoju atveju – tik į tuos, kurie palankūs ir B.

Toliau manysime, jog tam tikra tikimybinė erdvė $\langle\Omega, \mathcal{A}, P\rangle$ fiksuota, ir nagrinėjami įvykiai priklauso $\mathcal{A}$.

[9] C. Caratheodory (1873-1950) – vokiečių matematikas, nuo 1939 metų Atėnų universiteto rektorius.

11 apibrėžimas. *Tegu A, B du atsitiktiniai įvykiai, $P(B) > 0$. Sąlygine A tikimybe su sąlyga, kad įvykis B yra įvykęs, vadinsime skaičių*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Funkcija $P(\cdot|B) : \mathcal{A} \to [0, 1]$ yra naujas tikimybinis matas, o $\langle \Omega, \mathcal{A}, P(\cdot|B) \rangle$ yra nauja tikimybinė erdvė.

Visi teiginiai, kuriuos tikimybiniam matui įrodėme ankstesniame skyrelyje, yra teisingi ir sąlyginei tikimybei. Tačiau atsiranda ir naujų, vien sąlyginei tikimybei būdingų aspektų ir jos taikymo galimybių.

18 teorema. *Tegu H_i $(i \in I)$ – baigtinė arba skaiti nesutaikomų įvykių sistema, $P(H_i) > 0$ ir $\cup_i H_i = \Omega$. Tada bet kokiam įvykiui A*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|H_i) P(H_i). \tag{16}$$

Įrodymas. Įvykį A galime išreikšti nesutaikomų įvykių sąjunga: $A = \cup_{i \in I}(A \cap H_j)$. Taigi

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap H_i).$$

Belieka pasinaudoti tuo, kad $P(A \cap H_i) = P(A|H_i)P(H_i)$.

(16) lygybė vadinama *pilnosios tikimybės formule*: apriorinė tikimybė suskaičiuojama, sudedant aposteriorines tikimybes, atitinkančias nesutaikomus įvykius arba hipotezes H_j. Šitaip įvykio tikimybės skaičiavimo uždavinį tarsi suskaidome į paprastesnius.

19 teorema. *Tegu H_i $(i \in I)$ – baigtinė arba skaiti nesutaikomų įvykių sistema, $P(H_i) > 0$ ir $\cup_i H_i = \Omega$. Tada bet kokiam įvykiui H_j*

$$P(H_j|A) = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum_{i \in I} P(A|H_i)P(H_i)}. \tag{17}$$

Įrodymas. Lygybėje

$$P(H_j|A) = \frac{P(A \cap H_j)}{P(A)}$$

pasinaudoję lygybe $P(A \cap H_j) = P(A|H_j)P(H_j)$ ir (16), gausime (17). (17) lygybė vadinama Bajeso[10] *hipotezių tikrinimo formule*. Ja kartais galime

[10]Bayes Thomas (1702-1761) – anglų matematikas. Darbas, kuriame yra ši formulė, paskelbtas po mirties – 1763 metais.

remtis, kai naudojantis tam tikra informacija reikia pasirinkti vieną iš kelių alternatyvų arba hipotezių. Tarkime, žinome, jog įvyko vienas įvykis iš nesutaikomų įvykių šeimos H_i $(i \in I)$ (teisinga viena iš kelių hipotezių). Kuris iš įvykių įvyko – nežinome, tačiau turime „netiesioginę" informaciją: įvyko įvykis A. Tarkime, reikia nuspręsti, kuria hipoteze H_i vadovautis, priimant sprendimą apie tolimesnius veiksmus. Mažiausia tikimybė suklysti bus tada, jei savo sprendimą grįsime ta hipoteze, kuriai $P(H_i|A)$ yra didžiausia. Šias tikimybes galime rasti iš Bayeso formulės.

20 teorema. *Tegu A_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ – bet kokie atsitiktiniai įvykiai, $P(A_1 \cap \dots \cdot \cap A_{n-1}) > 0$. Teisinga lygybė*

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap \dots \cdot \cap A_{n-1}).$$

Formulę galime matematinės indukcijos metodu. Ją vadinsime tikimybių sandaugos formule. Kartais ja pasinaudojus įvykio tikimybę suskaičiuoti visiškai paprasta.

12 pavyzdys. Rutuliai iš urnos

Tegu, pavyzdžiui, urnoje yra n baltų ir m juodų rutulių. Ištraukus rutulį, jis grąžinamas į urną, o be to dar įdedama k tos pačios spalvos rutulių. Po to iš urnos traukiamas antras rutulys. Kokia tikimybė, kad abu ištrauktieji rutuliai bus balti?

Jeigu spręstume uždavinį naudodamiesi klasikiniu tikimybės apibrėžimu, turėtume galvoti, kas yra bandymo baigtys ir kiek jų yra. Tačiau naudojantis tikimybių sandaugos formule, uždavinį išspręsti visai paprasta. Tegu A_1 yra įvykis, kad pirmasis rutulys yra baltas, A_2 – kad antrasis baltas. Mums reikia surasti tikimybę $P(A_1 \cap A_2)$. Beveik akivaizdu, kad

$$P(A_1) = \frac{m}{n+m}, \quad P(A_2|A_1) = \frac{m+k}{n+m+k}.$$

Sudauginę šias tikimybes gauname $P(A_1 \cap A_2)$.

Panagrinėsime keletą įdomesnių uždavinių, sprendžiamų panaudojant sąlygines tikimybes. Kiek pakeisime savo samprotavimų stilių: skaičiuosime tikimybes naudodamiesi įvykių tikimybes siejančias formules ir nelabai rūpindamiesi, kaip nusakyti trejetą, sudarantį tikimybinę erdvę. Kiekvienu atveju tai galima būtų padaryti.

13 pavyzdys. Lošimas su moneta. Du lošėjai mėto simetrišką monetą. Jei iškrinta herbas (H), pirmasis išlošia 1 Lt, antrasis – tiek pat pralošia. Jei iškrinta skaičius (S) – pirmasis pralošia, o antrasis išlošia 1 Lt. Pirmojo pradinis kapitalas lygus x, antrojo – neribotas. Pirmasis lošėjas nusiteikęs lošti, kol jo turima suma pasidarys lygi a arba – kol prasiloš iki paskutinio siūlelio. Kokia tikimybė, kad jis prasiloš?

Tikimybė prasilošti priklauso tik nuo pradinio kapitalo dydžio. Pažymėkime $p(x)$ – tikimybę prasilošti, kai pradinė turima suma lygi $x, x \leq a$. Tegu A – įvykis, kad pirmasis prasilošė. Pažymėkime H_1 įvykį, kad pirmasis išlošė 1 Lt pirmajame lošime, H_2 – kad 1 Lt pralošė. Pagal pilnosios tikimybės formulę

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2).$$

Tačiau $P(H_1) = P(H_2) = 0{,}5$, o $P(A|H_1) = p(x+1), P(A|H_2) = p(x-1)$. Taigi gauname tokį sąryšį:

$$p(x) = \frac{1}{2}(p(x+1) + p(x-1)),$$

arba

$$p(x+1) = 2p(x) - p(x-1).$$

Nagrinėkime gautą skirtuminę lygybę. Kadangi

$$p(x+1) - p(x) = p(x) - p(x-1),$$

tai seka $p(x)$ yra aritmetinė progresija: $p(x) = k + dx$. Pasinaudodami sąlygomis $p(a) = 0,\ p(0) = 1$, gauname

$$p(x) = 1 - \frac{x}{a}.$$

14 pavyzdys. Laplaso[11] dėsnis.

Jeigu n kartų mums kažkas pavyko, kokia tikimybė, kad tai pavyks $n+1$-ąjį kartą? Jeigu 30 dienų iš eilės buvo saulėta, ar 31 –ąją dieną irgi švies saulė? Formalizuokime situaciją tokiu būdu. Urnoje yra tik balti ir juodi rutuliai, bet kiek jų – nežinia. Atsitiktinai traukėme n kartų po rutulį, jį vėl grąžindami; tarkime, įvyko įvykis

$$A_n = \{\text{visi n rutuliai buvo balti }\}.$$

Kokia tikimybė, kad ir $n+1$-ąjį kartą ištrauktas rutulys bus baltas, t. y. kad įvyks įvykis A_{n+1}.

Taigi norime apskaičiuoti tikimybę $P(A_{n+1}|A_n)$. Kadangi jokios papildomos informacijos neturime, laikysime, jog rutulių urnoje yra N, o baltų iš

[11] Laplace Pierre Simon (1749-1827) – prancūzų astronomas, matematikas ir fizikas.

jų su vienodomis tikimybėmis gali būti $m = 0, 1, \ldots, N$. Taigi nagrinėjame $N+1$ poromis nesutaikomų įvykių šeimą:

$$H_m = \{\text{urnoje yra } \ m \ \text{ baltų rutulių}\}, \quad P(H_m) = \frac{1}{N+1}.$$

Nesunku suskaičiuoti, jog $P(A_n|H_m) = (m/N)^n$. Pagal pilnos tikimybės formulę gauname

$$P(A_n) = \sum_m P(A_n|H_m)P(H_m) = \frac{1}{N+1}\sum_m \left(\frac{m}{N}\right)^n.$$

Pastebėkime, kad kai $N \to \infty$, tai

$$P(A_n) \to \int_0^1 u^n \mathrm{d} = \frac{1}{n+1}.$$

Taip pat išreiškiama ir tikimybė $P(A_{n+1})$. Kadangi $A_{n+1} \subset A_n$, tai $A_n \cap A_{n+1} = A_{n+1}$, ir

$$P(A_{n+1}|A_n) = \frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)} = \frac{\sum_m \left(\frac{m}{N}\right)^{n+1}}{\sum_m \left(\frac{m}{N}\right)^n}.$$

Kai n didelis, $P(A_{n+1}|A_n) \approx (n+1)/(n+2)$.

Tai ir yra Laplaso dėsnis. Kokiais atvejais juo galima pasikliauti? Atsakymą duoti nėra taip paprasta. Tačiau galima pateikti paprastą pavyzdį, kai jis tikrai netinka. Tarkime, dešimt kartų iš eilės metus simetrišką monetą atvirto herbas. Jeigu manysite, kad didelė tikimybė, jog vienuoliktame metime irgi pasirodys herbas, – klysite. Tačiau jeigu nežinote, ar moneta simetriška, tada dešimtyje metimų gavus herbą galvoti, kad vienuoliktajame irgi bus tas pats – logiška!

1.11. Nepriklausomi įvykiai. Bernulio schema

Tarkime $\langle \Omega, \mathcal{A}, P\rangle$ – tikimybinė erdvė, $A, B \in \mathcal{A}$. Jeigu tikimybės $P(A)$ ir $P(A|B)$ yra skirtingos, natūralu manyti, kad įvykis A priklauso vienas nuo B. Jeigu $P(A) = P(A|B)$, galime sakyti, kad A nepriklauso nuo B. Tačiau formaliame apibrėžime tektų atskirai aptarti atvejį, kai $P(B) = 0$, nes šiuo atveju sąlyginės tikimybės nesame apibrėžę. Kita vertus lygybėje $P(A) = P(A|B)$ įvykiai „dalyvauja“ nevienodai.

Iš $P(A) = P(A|B)$ išplaukia, kad

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Pastaroji lygybė prasminga su bet kokiais įvykiais A, B ir abu jie įeina į lygybę vienodai. Tad su ja ir formuluosime įvykių nepriklausomumo sąvoką.

12 apibrėžimas. *Atsitiktinius įvykius $A, B \in \mathcal{A}$ vadinsime nepriklausomais, jei*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Pavyzdžiui, tegu A, B, C yra atsitiktiniai įvykiai, susiję su kauliuko metimu:

$$\begin{aligned}
A &= \{\text{iškritusių akučių skaičius dalijasi iš } 2\}, \\
B &= \{\text{iškritusių akučių skaičius dalijasi iš } 3\}, \\
C &= \{\text{iškritusių akučių skaičius didesnis už } 2\}
\end{aligned}$$

.

Nesunku pasinaudojus apibrėžimu patikrinti, kad įvykiai A, B ir A, C yra nepriklausomi, o įvykiai B, C – priklausomi.

Kaip formuluoti kelių atsitiktinių įvykių nepriklausomumo sąvoką? Tarkime, tokių įvykių yra trys. Jeigu jie būtų tikrai nepriklausomi, tai iš to, kad įvyko du, neturėtume gauti jokios informacijos apie trečiąjį. Galbūt pakanka pareikalauti, kad bet kurie du iš trijų įvykių būtų nepriklausomi? Paprastas pavyzdys rodo, kad ne.

15 pavyzdys. Ruletė

Tarkime, ruletės skritulys padalytas į keturis ketvirčius, kurie sužymėti skaičiais $0, 1, 2, 3$, o lošėjų yra trys. Jei ruletės strėlė sustoja 0 ketvirtyje – laimi visi, jei 1 – tik pirmasis ir taip toliau. Nagrinėkime įvykius A_1, A_2, A_3, kurie atitinkamai reiškia, kad laimėjo pirmasis, antrasis ir trečiasis. Nesunku įsitikinti, kad kiekviena pora iš šio trejeto yra nepriklausoma. Tačiau jeigu žinome, kad įvyko A_1 ir A_2, tai galėsime padaryti išvadą, kad įvyko ir trečiasis įvykis. Taigi sakyti, kad visi trys įvykiai yra nepriklausomi, negalime.

Nepriklausomų įvykių sistemą apibrėšime taip.

13 apibrėžimas. *Sakysime, kad atsitiktinių įvykių sistemą $\mathcal{S} = \{A_\lambda \in \mathcal{A} : \lambda \in \Lambda\}$, sudaro tarpusavyje nepriklausomi įvykiai, jei bet kuris įvykis $A_\lambda \in \mathcal{S}$ nepriklauso nuo bet kurio įvykio $\cap_{j \in J} A_j$, čia $J \subset \Lambda$ yra baigtinė aibė, $\lambda \notin J$.*

Kiek pagalvojus, galime įsitikinti, kad sistemą $\mathcal{S} = \{A_\lambda \in \mathcal{A} : \lambda \in \Lambda\}$ tada ir tik tada sudaro nepriklausomi įvykiai, kai visiems skirtingiems $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, teisnga lygybė

$$P(A_{\lambda_1} \cap \ldots \cap A_{\lambda_n}) = P(A_{\lambda_1}) \cdots P(A_{\lambda_n}).$$

Negalimas įvykis yra nepriklauso nuo bet kurio kito įvykio. Tai taip pat teisinga ir būtinajam įvykiui. Įsitikinsime, kad įvykių poros nepriklausomumui nedaro įtakos, jeigu vieną arba abu juos keičiame priešingais. Patogumo dėlei žymėkime: $A^1 = A, A^0 = A^c$.

21 teorema. *Jei egzistuoja indeksai $i_0, j_0 \in \{0,1\}$, kad įvykiai A^{i_0}, B^{j_0} yra nepriklausomi, tai A^i, B^j yra nepriklausomi įvykiai su bet kokia indeksų pora $i, j \in \{0,1\}$.*

Įrodymas. Pakaks parodyti, kad iš A, B nepriklausomumo išplaukia $\overline{A}, B$ nepriklausomumas. Tačiau tai išplaukia iš paprastų lygybių grandinėlės:

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) = P(B)(1 - P(A)).$$

Teoremą nesunku apibendrinti tarpusavyje nepriklausomų atsitiktinių įvykių sistemai.

22 teorema. *Jeigu sistemą $\mathcal{S} = \{A_\lambda \in \mathcal{A} : \lambda \in \Lambda\}$, sudaro tarpusavyje nepriklausomi įvykiai, tai su bet kokiais $i_\lambda \in \{0,1\}$ sistemą $\mathcal{S}^* = \{A_\lambda^{i_\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$ taip pat sudaro tarpusavyje nepriklausomi įvykiai.*

Pritaikysime šią nepriklausomų įvykių savybę įdomiam teiginiui įrodyti. Šis teiginys tikimybių teorijoje paprastai vadinamas Borelio- Cantelli lema.[12]

Jei $A_1, A_2, \ldots$ yra begalinė įvykių seka, tai Ω poaibis B, sudarytas iš tų $\omega \in \Omega$, kurie priklauso be galo daugeliui A_i, yra įvykis, t. y. priklauso $\mathcal{A}$. Iš tiesų, jei $\omega \in B$, tai $\omega \in B_m, B_m = \cup_{n \geq m} A_n$. Todėl $\omega \in \cap_m B_m$. Teisingas ir atvirkštinis teiginys. Taigi $B = \cap_m B_m$. Įvykis B paprastai vadinamas įvykių A_n viršutine riba ir žymimas $\limsup A_n$. Taigi

$$\limsup A_n = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} A_n.$$

Įsivaizduokime, pavyzdžiui, kad monetą metame be galo daug kartų. Tegu A_i yra įvykis, kad i-ajame metime iškrito herbas. Tada įvykį $\limsup A_n$ žodžiais galime nusakyti taip: metus monetą be galo daug kartų, herbas pasirodė taip pat be galo daug kartų. Tokiu atveju skaičius galėjo pasirodyti baigtinį skaičių kartų, tačiau galėjo pasirodyti ir be galo daug kartų.

23 teorema.

Tegu seką $A_1, A_2, \ldots,$ sudaro tarpusavyje nepriklausomi įvykiai, $p_n = P(A_n)$,

$$\sum_n p_n = \infty.$$

Tada tikimybė, jog įvyks be galo daug įvykių A_n, lygi 1.

[12] Cantelli Francesco Paolo (1875 -?) – italų matematikas, ekonomikos ir prekybos aukštosios mokyklos Romoje profesorius. Darbai iš matematinės statistikos srities.

Įrodymas. Tegu Byra įvykis, kuris reiškia, kad įvyks be galo daug įvykių A_n, $B_m = \cup_{n\geq m} A_n$. Tada $B = \cap_m B_m$. Kadangi įvykiai B_m yra mažėjantys, tai $P(B) = \lim_{m\to\infty} P(B_m)$. Tad pakaks įrodyti, kad $P(B_m) \to 1$ arba $P(\overline{B_m}) \to 0$, kai $m \to \infty$.

Naudodamiesi aibių papildinių (kitaip tariant – priešingojo įvykio sudarymo veiksmų) savybe, gauname $\overline{B_m} = \cap_{n\geq m}\overline{A_n}$, o įvykiai $\overline{A_n}$ nepriklausomi.

Todėl turime

$$P(\overline{B_m}) = P(\bigcap_{n\geq m} \overline{A_n}) \leq P(\bigcap_{m\leq n\leq m+t} \overline{A_n}) = (1-p_m)(1-p_{m+1})\dots(1-p_{m+t}).$$

Tačiau gautosios nelygybės dešinės pusės reiškinys artėja prie nulio, kai $t \to \infty$. Taigi $P(\overline{B_m}) = 0$.

Teorema įrodyta. Iki šiol nagrinėjome tikimybines erdves, kurios tinka pavieniams statistiniams bandymams aprašyti. Dabar nagrinėsime statistinių bandymų seką.

Tarkime, n kartų kartojamas bandymas, kurio baigčių aibė $\Omega_1 = \{0, 1\}$. Vadinsime pirmąją baigtį *nesėkme*, antrąją – *sėkme*. Bandymų serijos baigčių aibė yra

$$\Omega = \Omega_1^n = \{\langle\omega_1, \dots, \omega_n\rangle : \omega_i = 0, 1\}.$$

Reikia apibrėžti baigčių $\omega = \langle\omega_1, \dots, \omega_n\rangle$ tikimybes. Baigtį ω galime interpretuoti kaip įvykių sankirtą: pirmajame bandyme pasirodė ω_1, antrajame – ω_2 ir t.t. Pažymėję $P(\omega_m|\omega_1, \dots, \omega_{m-1})$ tikimybę, kad m-ajame bandyme pasirodė baigtis ω_m su sąlyga, kad ankstesniuose bandymuose pasirodė baigtys $\omega_1, \dots, \omega_{m-1}$ tikimybę $P(\omega)$ galime apibrėžti pasinaudoję tikimybių sandaugos teorema:

$$P(\omega) = P(\omega_1)P(\omega_2|\omega_1) \cdot \ldots \cdot P(\omega_n|\omega_1, \dots, \omega_{n-1}).$$

Tarkime dabar, kad bandymai nepriklauso vienas nuo kito, o sėkmės tikimybė visuose bandymuose yra ta pati ir lygi p $(0 \leq p \leq 1)$, o nesėkmės – $q = 1-p$. Tada $P(\omega_m|\omega_1, \dots, \omega_{m-1}) = P(\omega_m)$, čia $P(\omega_m) = p$, jei $\omega_m = 1$ (sėkmė) ir $P(\omega_m) = q$, jei $\omega_m = 0$ (nesėkmė). Galime abi šias lygybes užrašyti sujungti į vieną: $P(\omega_m) = p^{\omega_m} q^{1-\omega_m}$.

Tada baigties $\omega \in \Omega^n, \omega = \langle\omega_1, \dots, \omega_n\rangle$ tikimybė:

$$P(\omega) = P(\omega_1)\cdots P(\omega_n) = p^{\omega_1}q^{1-\omega_1} \cdot p^{\omega_2}q^{1-\omega_2} \cdot \ldots \cdot p^{\omega_n}q^{1-\omega_n}$$

Pažymėję $s(\omega) = \omega_1 + \ldots + \omega_n$, gausime

$$P(\omega) = p^{s(\omega)}q^{n-s(\omega)}.$$

Sudarėme diskrečiąją tikimybinę erdvę $\langle\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P\rangle$. Ji vadinama Bernulio schema.[13]

14 apibrėžimas. *Bernulio schema vadiname diskrečiąją tikimybinę erdvę $\langle\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P\rangle$, čia*

$$\Omega=\{\langle\omega_1,\ldots,\omega_n\rangle:\omega_i\in\{0,1\}\},\quad \mathcal{P}(\Omega) \textit{yra visų} \Omega \textit{poaibių } \sigma\textit{-algebra},$$

kiekvienam elementariajam įvykiui $\omega\in\Omega,\omega=\langle\omega_1,\ldots,\omega_n\rangle$,

$$P(\omega)=p^{s(\omega)}q^{n-s(\omega)},\quad s(\omega)=\omega_1+\ldots+\omega_n.$$

Bernulio schema yra n vienodų ir nepriklausomų bandymų su dviem baigtimis ir tomis pačiomis šių baigčių tikimybėmis matematinis modelis. Vieną baigtį paprastai vadiname sėkme, kitą – nesėkme. Tokio bandymo pavyzdys – monetos metimas.

Dažnai svarbu suskaičiuoti tikimybę, kad bandymą pakartoję m kartų, gausime m sėkmių.

24 teorema. *Tegu S_n – sėkmių skaičius n nepriklausomų bandymų serijoje su sėkmės ir nesėkmės viename bandyme tikimybėmis $p,q=1-p,\ 0\le p\le 1$. Tada*

$$P(S_n(\omega)=m)=C_n^m p^m q^{n-m},\quad m=0,1,\ldots,n.$$

Įrodymas. Tikimybę skaičiuosime naudodami Bernulio schemą. Elementarieji įvykiai yra gretiniai $\langle\omega_1,\ldots,\omega_n\rangle$, čia $\omega_i=1$, jei i-ajame bandyme buvo sėkmė ir $\omega_i=0$, jei nesėkmė. Kad būtų $S_n(\omega)=m$, lygiai m elementų ω_i turi būti lygūs vienetui, o kiti nuliui. Tada

$$s(\omega)=\omega_1+\ldots+\omega_n=m,\quad P(\omega)=p^m q^{n-m}.$$

Lieka suskaičiuoti, kiek yra ω, kuriuose yra lygiai m vienetų. Šis kiekis lygus derinių iš n po m skaičiui. Taigi skaičiuodami $P(S_n=m)$ turime susumuoti C_n^m dėmenų, kurie visi lygūs $p^m q^{n-m}$. Teorema įrodyta.

Tikimybių rinkinį

$$P(S_n(\omega)=m)=C_n^m p^m q^{n-m},\quad m=0,1,\ldots,n.$$

vadiname **binominiu skirstiniu**. Bernulio schema ir binominis skirstinys pasirodo įvairiuose tikrovės reiškinių modeliuose. Pavyzdžiui, naudodamiesi

[13] Jakobas Bernulis (1654-1705) – šveicarų matematikas, vienas iš garsios mokslininkų dinastijos atstovų. Jo veikalas „Ars conjectandi" padarė didelę įtaką tikimybių teorijos raidai. Tačiau Jakobas Bernulis yra taip pat ir daugelio kitų svarbių matematinių veikalų autorius. Pavyzdžiui, jis ir jo brolis Johanas laikomi va- riacinio skaičiavimo pradininkais.

Bernulio schema galime tyrinėti atsitiktinį dalelės klaidžiojimą plokštumos taškais, kurių koordinatės yra sveikieji skaičiai.

16 pavyzdys. Dalelės klaidžiojimas
Su Bernulio schemos elementariuoju įvykiu $\langle\omega_1, \ldots, \omega_n\rangle$ susiekime laužtę, kuri jungia plokštumos taškus

$$\langle 0; 0\rangle,\ \langle 1; \omega_1\rangle,\ \langle 2; \omega_1 + \omega_2\rangle, \ldots, \langle n; \omega_1 + \ldots + \omega_n\rangle.$$

Tada tuos ω, kuriems $S_n(\omega) = m$ atitinka laužtės, kurios baigiasi taške $\langle n; m\rangle$. Mūsų laužtės gali tik „kilti“ į viršų. Tačiau jeigu bandymo baigtis pažymėtume -1 ir 1, o laužtes apibrėžtume analogiškai, tai laužtės ir „kiltų“ ir „smigtų“.

Apibendrinkime Bernulio schemą. Tarkime, kad vieno bandymo skirtingų baigčių yra ne dvi, bet r $(r \geq 2) : \Omega_1 = \{1; 2; \ldots; r\}$, o šių baigčių tikimybės lygios atitinkamai

$$p_1, \ldots, p_r, \quad 0 \leq p_i \leq 1, \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1.$$

Tarkime, tą patį bandymą kartojame n kartų ir vienas bandymas nedaro įtakos kitam. Tada tokios bandymų sekos baigtys yra gretiniai

$$\omega = \langle n; \omega_1, \ldots, \omega_n\rangle, \quad \omega_i \in \{1; 2; \ldots; r\},$$

o jų tikimybės

$$P(\omega) = p_{\omega_1} p_{\omega_2} \ldots p_{\omega_n}.$$

Tikimybinę erdvę, kuri aprašo n nepriklausomų vienodų bandymų su baigčių skaičiumi r seką vadinsime polinomine schema.

15 apibrėžimas. *Polinomine schema vadiname diskrečiąją tikimybinę erdvę* $\langle\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\rangle$, *čia*

$\Omega = \{\langle\omega_1, \ldots, \omega_n\rangle : \omega_i \in \{1, 2, \ldots, r\}\}, \quad \mathcal{P}(\Omega)$*yra visų*$\Omega$ *poaibių* σ*-algebra,*

kiekvienam elementariajam įvykiui $\omega \in \Omega, \omega = \langle\omega_1, \ldots, \omega_n\rangle$,

$$P(\omega) = p_{omega_1} \cdot p_{omega_2} \cdots p_{omega_n}.$$

25 teorema. *Tegu* S_n^i – n *vienodų ir nepriklausomų bandymų serijoje pasirodžiusių baigčių* i *skaičius,* $p_1, p_2, \ldots, p_r$ – *baigčių* $1, 2, \ldots, r$ *pasirodymo tikimybės viename bandyme. Tada su visais* $m_i \geq 0,\ m_1 + \ldots + m_r = n$,

$$P(S_n^1 = m_1, \ldots, S_n^r = m_r) = \frac{n!}{m_1! \ldots m_r!} p^{m_1} \cdot \ldots \cdot p^{m_r},$$

čia $m_i \geq 0, \quad m_1 + \ldots + m_r = n.$

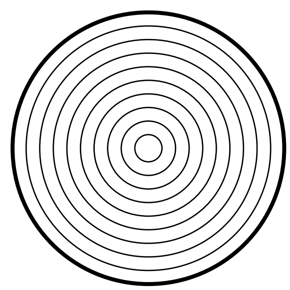
Šis tikimybių rinkinys vadinamas **polinominiu skirstiniu**.

Naudojantis polinomine schema galime skaičiuoti, pavyzdžiui, tikimybes, susijusias su lošimo kauliuko metimų serija ir t.t.

2 Atsitiktiniai dydžiai

2.1. Atsitiktinio dydžio sąvoka

Tegu $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$ yra tikimybinė erdvė. Nagrinėsime funkcijas $\xi : \Omega \to I\!R$, jos priskiria elementariesiems įvykiams skaičius. Įvairiuose uždaviniuose tenka skaičiuoti tikimybes, kad funkcijų reikšmės priklauso vienai ar kitai aibei. Tačiau tai ne visada gali būti įmanoma padaryti. Įsivaizduokime, pavyzdžiui, kad šaudoma į taikinį: jei pataikoma į centrinį skritulį, gaunama 10 taškų, jei į pirmąjį koncentrinį žiedą – 9 ir taip toliau. Elementariaisiais įvykiais galime laikyti taikinio taškus. Tačiau jei domimės pelnytais taškais, tai pakaks nagrinėti įvykių σ-algebrą, kurią generuoja centrinis skritulys ir koncentriniai žiedai.



Centrinis skritulys ir koncentriniai žiedai generuoja σ-algebrą, kurioje yra iš viso 2^{10} aibių. Tačiau jeigu norėtume nagrinėti taško atstumo iki skritulio centro funkciją, tai šios σ-algebros atžvilgiu ši funkcija nebūtų atsitiktinis dydis. Kad tokią funkciją galėtume nagrinėti kaip atsitiktinį dydį, turėtume pakeisti σ-algebrą.

Žinodami, su kokiomis tikimybėmis pataikoma į šias aibes, galėsime suskaičiuoti ir visų kitų mūsų σ-algebros įvykių tikimybes. Tegu ξ yra atstumas nuo taško,į kurį pataikėme iki skritulio centro. Ne visas su šia funkcija susijusias tikimybes galėsime suskaičiuoti. Taigi ši funkcija nėra „suderinta“ su mūsų nagrinėjamu tikimybinės erdvės modeliu.

Todėl tikslinga atsitiktiniais dydžiais vadinti tik tas funkcijas, kurios yra „suderintos“ su tikimybinės erdvės struktūra. Dabar apibrėšime šią savoką matematiškai.

Jau anksčiau apibrėžėme paprastuosius atsitiktinius dydžius. Tai funkcijos $\xi : \Omega \to I\!R$, kurių reikšmių aibė baigtinė, o kiekvienai reikšmei x teisingas sąryšis $\xi^{-1}(x) \in \mathcal{A}$. Dabar apibendrinsime šią sąvoką.

16 apibrėžimas. *Funkciją $\xi : \Omega \to I\!R$ vadinsime atsitiktiniu dydžiu, jei su kiekviena Borelio aibe $B \in \mathcal{B}$*

$$\{\omega : \xi(\omega) \in B\} = \xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}. \tag{18}$$

Funkciją $\xi : \Omega \to I\!\!R^n$ vadinsime atsitiktiniu vektorium, jei (18) galioja su kiekviena Borelio aibe $B \in \mathcal{B}^n$.

Taigi jei ξ yra atsitiktinis dydis, tai galima skaičiuoti, pavyzdžiui, tokias tikimybes:

$$P(a < \xi(\omega) < b), \quad P(\xi(\omega) \geq b), \quad P(\xi(\omega) \text{yra racionalusis skaičius })$$

ir t. t.

Jei $\xi = \langle \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle$ yra atsitiktinis vektorius, tai nesunku įsitikinti, kad kiekviena jo komponentė yra atsitiktinis dydis. Iš tiesų, su kiekviena tiesės Borelio aibe B

$$\xi_1^{-1}(B) = \{\omega : \xi_1(\omega) \in B, \xi_j(\omega) \in I\!\!R,\ j = 2, ..., n\} = \xi^{-1}(B \times I\!\!R \times \ldots \times I\!\!R) \in \mathcal{A}.$$

Kadangi Borelio aibių yra neaprėpiamai daug, tai tiesioginis (18) sąlygos tikrinimas – beviltiškas darbas. Nuo jo mus išvaduoja toks paprastas teiginys.

26 teorema. *Tegu $\mathcal{S}$ – aibės $I\!\!R$ poaibių sistema ir $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}$. Funkcija $\xi : \Omega \to I\!\!R$ yra atsitiktinis dydis tada ir tik tada, kai su kiekviena aibe $B \in \mathcal{S}$ teisingas sąryšis $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Įrodymas. Netrivialus tik sąlygos pakankamumas. Jį ir įrodinėsime. Apibrėžkime

$$\mathcal{B}' = \{B : B \subset I\!\!R, \xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Iš teoremos sąlygos turime $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}'$. Jeigu parodysime, jog $\mathcal{B}'$ yra σ-algebra, tai iš karto gausime $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ (nes $\mathcal{B}$ yra mažiausia σ-algebra, aprėpianti $\mathcal{S}$), o tai reiškia, kad ξ yra atsitiktinis dydis.

Reikia patikrinti, kad $\mathcal{B}'$ tenkina σ-algebros apibrėžimo sąlygas. Patikrinsime vieną jų. Kitos tikrinamos analogiškai.

Tegu $B_i \in \mathcal{B}'$ $(i \in I)$, čia I – baigtinė arba skaiti aibė. Reikia parodyti, kad $B = \cup_{i \in I} B_i$ irgi $\mathcal{B}'$ elementas. Tai ekvivalentu tvirtinimui, kad $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Tačiau

$$\xi^{-1}(B) = \xi^{-1}\big(\bigcup_{i \in I} B_i\big) = \bigcup_{i \in I} \xi^{-1}(B_i).$$

Kadangi $\mathcal{A}$ yra σ -algebra, o $\xi^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}$, tai $\in \mathcal{A}$.

Priminsime, kad Borelio σ-algebrą generuoja intervalai $[a, b)$. Tačiau pakanka imti tik begalinius intervalus $(-\infty, b)$. Iš įrodyto teiginio iškart gauname, kad norėdami patikrinti, ar ξ yra atsitiktinis dydis galime apsiriboti (18) sąlygos tikrinimu, kai $B = (-\infty, x), x \in I\!R$. Nesunku suformuluoti analogišką teiginį ir atsitiktiniams vektoriams.

17 apibrėžimas. *Funkciją $f : I\!R^n \to I\!R^m$ vadinsime Borelio funkcija, jei su kiekviena Borelio aibe $B \in \mathcal{B}^m$*

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n. \tag{19}$$

Tikrinant ar $f : I\!R^n \to I\!R^m$ yra Borelio funkcija, taip pat nebūtina (19) sąlygą tikrinti kiekvienai Borelio aibei $B \in \mathcal{B}^m$. Jei $\mathcal{B}^m = \sigma(\mathcal{S})$, tai pakanka minėtą sąlygą patikrinti aibėms $B \in \mathcal{S}$. Dažnai patogu naudoti generuojančią $\mathcal{B}^m$ intervalų sistemą

$$\mathcal{S} = \{(-\infty, b_1) \times \ldots \times (-\infty, b_m) : b_i \in I\!R\}.$$

Toliau šiame skyrelyje nagrinėsime, kokie veiksmai su atsitiktiniais dydžiais arba vektoriais vėl duoda atsitiktinius dydžius ir atsitiktinius vektorius. Atsakymas labai paprastas – algebriniai veiksmai (sudėtis, atimtis, daugyba ir dalyba), o taip pat ir analizės operacijos su atsitiktiniais dydžiais (ribos, minimumai ir maksimumai) vėl duoda atsitiktinius dydžius. Skaitytojas, kuriam neįdomu sužinoti, kaip tai matematiškai įrodoma, gali įrodymus praleisti ir vėl skaityti nuo kito skyrelio pradžios.

27 teorema. *Tegu $\xi : \Omega \to I\!R^n$ yra atsitiktinis vektorius, o $f : I\!R^n \to I\!R^m$ – Borelio funkcija. Tada $\eta = f(\xi)$ yra taip pat atsitiktinis vektorius.*

Įrodyti teiginį galime tiesiogiai patikrinę, kad η tenkina atsitiktinio dydžio apibrėžimo sąlygas.

Išvada. *Jei $\xi : \Omega \to I\!R$ yra atsitiktinis dydis, o c konstanta, tai $\xi + c, c\xi, |\xi|, \xi^2$ irgi yra atsitiktiniai dydžiai.*

Įrodymas. Pakanka įsitikinti, kad funkcijos $f(x) = x + c, cx, |x|, x^2$ yra Borelio funkcijos. (19) sąlygą pakanka tikrinti intervalams. Iš tikrųjų, pavyzdžiui, funkcijai $f(x) = x^2$ ir $B = (-\infty, u)$ turime:

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset, & \text{jei } u \le 0, \\ (-\sqrt{u}, \sqrt{u}), & \text{jei } u > 0, \end{cases}$$

taigi visais atvejais $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$.

Naudojant Borelio funkcijas iš atsitiktinių vektorių galime gauti naujus atsitiktinius vektorius, iš atsitiktinių dydžių – naujus atsitiktinius dydžius. Atsitiktinius dydžius sudėdami, atimdami, daugindami ir dalydami taip pat gauname naujus atsitiktinius dydžius.

28 teorema. *Tegu $\xi, \eta : \Omega \to I\!R$ yra atsitiktiniai dydžiai. Tada $\xi \pm \eta$, $\xi \cdot \eta$, ξ/η (jei $\eta \ne 0$) yra irgi atsitiktiniai dydžiai.*

Įrodymas. Įrodykime, kad $\xi+\eta$ yra atsitiktinis dydis. Pakaks įsitikinti, kad su kiekvienu fiksuotu u

$$\{\omega : \xi(\omega) + \eta(\omega) < u\} \in \mathcal{A}.$$

Jeigu teisinga nelygybė $\xi(\omega) + \eta(\omega) < u$, tai teisinga ir nelygybė $\xi(\omega) < u - \eta(\omega)$. Kadangi racionaliųjų skaičių aibė yra visur tiršta (tarp bet kurių dviejų skaičių visada yra ir racionaliųjų), tai galėsime rasti racionalųjį skaičių q, kad būtų teisinga ir nelygybė $\xi(\omega) < q < u - \eta(\omega)$. Kita vertus, jei su kokiu nors q teisinga ši nelygybė, tai teisinga ir nelygybė $\xi(\omega) + \eta(\omega) < u$. Pasinaudoję tokiais samprotavimais, užrašykime:

$$\begin{aligned}\{\omega : \xi(\omega) + \eta(\omega) < u\} &= \bigcup_q \{\omega : \xi(\omega) < q < u - \eta(\omega)\} \\ &= \bigcup_q \{\omega : \xi(\omega) < q\} \cap \{\omega : \eta(\omega) < u - q\},\end{aligned}$$

čia sąjungos imamos pagal visus racionaliuosius skaičius. Tačiau racionaliųjų skaičių aibė yra skaiti, todėl paskutinėje sąjungoje jungiama skaiti įvykių, priklausančių σ-algebrai $\mathcal{A}$, sistema. Tada ir sąjungos rezultatas turi priklausyti šiai σ-algebrai, t.y,

$$\{\omega : \xi(\omega) + \eta(\omega) < u\} \in \mathcal{A}.$$

Kadangi $-\eta$ irgi yra atsitiktinis dydis, tai pasinaudoję jau įrodytu teiginiu gausime, kad $\xi - \eta$ yra atsitiktinis dydis.

Pasinaudoję jau įrodytais faktais, teoremos išvada ir lygybe

$$\xi \cdot \eta = \frac{1}{4}(\xi + \eta)^2 - \frac{1}{4}(\xi - \eta)^2,$$

gausime, kad $\xi \cdot \eta$ yra atsitiktinis dydis.

Į ξ/η galime žvelgti kaip į atsitiktinių dydžių ξ ir $1/\eta$ sandaugą. Kad $\frac{1}{\eta}$ yra atsitiktinis dydis įrodyti nesunku. Tada ir sandauga $\xi \cdot \frac{1}{\eta}$ yra atsitiktinis dydis. Teorema įrodyta.

Įsitikinsime, kad analizinės (infinimumo bei supremumo, viršutinės ir apatinės ribų) operacijos su atsitiktiniais dydžiais irgi duoda atsitiktinius dydžius. Priminsime, kad skaičių sekos x_n apatinė ir viršutinė ribos apibrėžiamos taip:

$$\liminf_n x_n = \sup_n \inf_{k \geq n} x_k, \quad \limsup_n x_n = \inf_n \sup_{k \geq n} x_k,$$

kitaip tariant $\liminf x_n$ yra mažiausias sekos x_n ribinis taškas, o $\limsup x_n$ – didžiausias.

29 teorema. *Tegu* $\xi_n : \Omega \to I\!R$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *yra atsitiktiniai dydžiai. Tada funkcijos*

$$\eta_1 = \inf_n \xi_n, \quad \eta_2 = \sup_n \xi_n, \quad \eta_3 = \liminf_n \xi_n, \quad \eta_4 = \limsup_n \xi_n$$

irgi yra atsitiktiniai dydžiai.

Jei ξ_n *yra atsitiktinių dydžių seka ir su kiekvienu* $\omega \in \Omega$ *seka* $\xi_n(\omega)$ *konverguoja, tai riba* $\xi(\omega) = \lim_n \xi_n(\omega)$ *irgi yra atsitiktinis dydis.*

Įrodymas. Skaičių sekos minimumas yra mažesnis už u, tada ir tik tada, kai bent vienas jos narys yra mažesnis už u. taigi

$$\{\omega : \eta_1(\omega) < u\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : \xi_n(\omega) < u\} \in \mathcal{A}.$$

Ši lygybė reiškia, kad η_1 yra atsitiktinis dydis.

Dydžius η_2, η_3, η_4 galime išreikšti taip:

$$\eta_2 = -\inf_n(-\xi_n), \quad \eta_3 = \sup_n \inf_{k \geq n} \xi_k, \quad \eta_4 = \inf_n \sup_{k \geq n} \xi_k.$$

Kadangi jau įrodėme, jog imdami atsitiktinių dydžių sekos infinimumą, vėl gauname atsitiktinį dydį, tai iš η_2 išraiškos išplaukia, jog η_2 yra atsitiktinis dydis, t. y. atsitiktinių dydžių supremumas yra atsitiktinis dydis. Iš η_3, η_4 išraiškų išplaukia, kad šie dydžiai irgi yra atsitiktiniai.

Jeigu atsitiktinių dydžių reikšmių seka $\xi_n(\omega)$ konverguoja su visais ω, tai riba lygi apatinei ribai $\liminf \xi_n(\omega)$, (o taip pat ir viršutinei ribai $\liminf \xi_n(\omega)$). Taigi funkcija, priskirianti ω ribines sekos $\xi_n(\omega)$ reikšmes, yra atsitiktinis dydis.

Tačiau atsitiktinių dydžių seka gali konverguoti tik kai kuriems ω. Ar galime apie konvergavimo aibę kalbėti kaip apie atsitiktinį įvykį? Taip.

30 teorema. *Tegu* ξ_n *yra atsitiktinių dydžių seka. Tada aibė*

$$A = \{\omega : \lim_{n \to \infty} \xi_n(\omega) \ egzistuoja\}$$

yra atsitiktinis įvykis.

Įrodymas. Jeigu kokiam nors $\omega \in \Omega$ $\lim_n \xi_n(\omega)$ egzistuoja, tai seka $\xi_n(\omega)$ tenkina Caushy kriterijų:

kiekvienam natūriniam k *egzistuoja* $n = n(\omega)$, *kad*

$$|\xi_u(\omega) - \xi_v(\omega)| < \frac{1}{k}, \text{ kai } u, v \geq n(\omega)$$

Tada visų ω, su kuriais seka tenkina kriterijų, aibę A galime užrašyti šitaip:

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{u=n}^{\infty} \bigcap_{v=n}^{\infty} \{\omega : |\xi_u(\omega) - \xi_v(\omega)| < \frac{1}{k}\}.$$

Iš šios išraiškos išplaukia, kad $A \in \mathcal{A}$.

2.2. Atsitiktiniai dydžiai ir jų skirstiniai

Visiems tyrinėjimams, kuriuos atliksime šiame skyrelyje, reikia tikimybinės erdvės. Įsivaizduokime, kad ją jau pasirinkome: $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$ yra tikimybinė erdvė.

Nagrinėsime atsitiktinius dydžius $\xi : \Omega \to I\!R$ bei atsitiktinius vektorius $\xi : \Omega \to I\!R^m$. Visų pirma su jais susiesime tam tikras funkcijas.

18 apibrėžimas. *Tegu $\xi : \Omega \to I\!R^m$ – atsitiktinis vektorius, $\xi = \langle \xi_1, \ldots, \xi_m \rangle$. Jo pasiskirstymo funkcija vadinsime funkciją $F_\xi : I\!R^m \to [0, 1]$, apibrėžiamą taip:*

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_m) = P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_m < x_m).$$

Jei $m = 1$, tai ξ yra atsitiktinis dydis, o $F_\xi(x) = F_\xi(x)$ – vieno kintamojo funkcija: $F_\xi(x) = P(\xi < x)$.

Taigi atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija tarsi „saugo“ visas tikimybes $P(\xi < x)$. Naudojantis šia funkcija galima skaičiuoti ir kitas su atsitiktiniu dydžiu susijusias tikimybes, pavyzdžiui,

$$P(a \le \xi < b) = P(\xi < b) - P(\xi < a) = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Toliau dažniausiai nagrinėsime atsitiktinius dydžius ir jų pasiskirstymo funkcijas.

Pirmiausia ištirkime paprasčiausias pasiskirstymo funkcijų savybes.

31 teorema. *Atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo funkcija F_ξ turi šias savybes:*

1. *F_ξ yra nemažėjanti funkcija;*
2. *F_ξ yra tolydi iš kairės;*
3. *$\lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0, \lim_{x \to \infty} F_\xi(x) = 1.$*

Įrodymas. Žymėsime $A_x = \{\omega : \xi(\omega) < x\}$. Tada $F_\xi(x) = P(A_x)$.

1) Jei $x < y$, tai $A_x \subset A_y$. Tada $P(A_x) \le P(A_y)$.

2) Jei $x_1 < x_2 < \ldots < x, \lim_{n\to\infty} x_n = x$, tai $A_{x_1} \subset A_{x_2} \subset \ldots$ ir $\cup_n A_{x_n} = A_x$. Pasirėmę teorema apie tikimybių monotoniškumą, gausime:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_{x_n}) = P(A_x), \quad \text{arba} \quad \lim_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = F_\xi(x).$$

Šis sąryšis ekvivalentus teoremos teiginiui.

3) Tegu $x_1 < x_2 < \ldots, \lim_n x_n = \infty$. Tada $\cup_n A_{x_n} = \Omega$. Įrodymui, kad $\lim_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1$ užbaigti vėl pakanka pasiremti tikimybių monotoniškumo savybe.

Tegu $x_1 > x_2 > \dots, \lim_n x_n = -\infty$. Tada $\cap_n A_{x_n} = \emptyset$. Teiginys

$$\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$$

vėl gaunamas iš tikimybių monotoniškumo savybės.

Funkcija F_ξ turi visas tas savybes, kurių reikia tikimybiniam matui $P_F : \mathcal{B} \to [0\ ,\ 1]$ konstruoti, naudojantis tuo būdu, kuris aprašytas skyrelyje apie Borelio σ-algebros matų konstravimą. Žymėsime šį matą P_ξ ir vadinsime jį atsitiktinio dydžio ξ **skirstiniu.**

Tad su kiekvienu atsitiktiniu dydžiu galime susieti tikimybinę erdvę $\langle I\!R, \mathcal{B}, P_\xi\rangle$. Atsitiktiniam vektoriui taip pat galime sukonstruoti analogišką tikimybinę erdvę.

Yra visokių atsitiktinių dydžių. Išskirsime svarbiausias atsitiktinių dydžių klases.

19 apibrėžimas. *Jeigu atsitiktinio dydžio (arba atsitiktinio vektoriaus) reikšmių aibė yra baigtinė arba skaiti, tai tokį atsitiktinį dydį vadinsime diskrečiuoju.*

Pavyzdžiui, visi paprastieji atsitiktiniai dydžiai, kuriuos nagrinėjome anksčiau, yra diskretieji atsitiktiniai dydžiai.

Tegu ξ yra diskretusis atsitiktinis dydis. Tada jo reikšmes galima sunumeruoti. Tarkime, šios reikšmės yra $s_i, i \in I$, čia I yra baigtinė arba begalinė tačiau skaiti indeksų (numerių) aibė. Įvykiai $\{\omega : \xi(\omega) = s_i\}$, $(i \in I)$ yra nesutaikomi, o jų sąjunga – visa baigčių aibė Ω. Taigi

$$\sum_{i\in I} P(\xi(\omega) = s_i) = 1.$$

Savo ruožtu

$$F_\xi(x) = \sum_{\substack{s_i<x,\\ i\in I}} P(\xi(\omega) = s_i). \tag{20}$$

Diskrečiojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija turi trūkius taškuose s_i, kuriuose $P(\xi(\omega) = s_i) > 0$. Iš tikrųjų, jei $\epsilon > 0$, tai

$$F_\xi(s_i+\epsilon) - F_\xi(s_i-\epsilon) = \sum_{s_i-\epsilon<s_j<s_i+\epsilon} P(\xi(\omega) = s_j) > P(\xi(\omega) = s_i).$$

Todėl

$$\lim_{\epsilon\to 0}\big(F_\xi(s_i+\epsilon)-F_\xi(s_i-\epsilon)\big) \geq P(\xi(\omega) = s_i) > 0, \quad \text{t.y.} \quad \lim_{x\to s_i-0} F_\xi(x) \neq \lim_{x\to s_i+0} F_\xi(x).$$

Iš tikrųjų nesudėtinga įsitikinti, kad pasiskirstymo funkcijos šuolis taške s_i yra tiksliai lygus $P(\xi(\omega) = s_i)$.

Taigi diskrečiųjų atsitiktinių dydžių (o taip pat ir vektorių) pasiskirstymo funkcijos yra „sutrūkusios".

20 apibrėžimas. *Jeigu atsitiktinio dydžio (atsitiktinio vektoriaus) ξ pasiskirstymo funkcija F_ξ yra visur tolydi, tai ją vadinsime tolydžiu.*

Išskirsime atskirą tolydžiųjų dydžių, kuriems teisinga lygybė, analogiška (20) lygybei, klasę. Sumą, suprantama, keisime integralu.

21 apibrėžimas. *Atsitiktinį dydį ξ vadinsime absoliučiai tolydžiu, jei egzistuoja neneigiama integruojama funkcija $p_\xi(s)$, kad*

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(s)ds.$$

Funkciją $p_\xi(s)$ vadinsime atsitiktinio dydžio ξ tankiu. Atsitiktinį vektorių $\xi : \Omega \to I\!R^m$ vadinsime absoliučiai tolydžiu, jei egzistuoja neneigiama integruojama funkcija $p_\xi(s_1, \ldots, s_m)$, kad

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_m) = \int_{\{s_1<x_1,\ldots,s_m<x_m\}} p_\xi(s_1, \ldots, s_m)ds_1 \cdot \ldots \cdot ds_m.$$

Funkciją $p_\xi(s_1, \ldots, s_m)$ vadinsime atsitiktinio vektoriaus ξ tankiu.

Iš matematinės analizės kurso teoremos apie integralo su kintamu viršutiniu rėžiu išvestinę gauname, kad beveik visiems x teisingas toks atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcijos ir tankio (jei jis egzistuoja) sąryšis:

$$F'_\xi(x) = p_\xi(x).$$

Taigi žinodami atsitiktinio dydžio tankį, pasiskirstymo funkciją gauname integruodami, o žinodami pasiskirstymo funkciją – tankį gauname diferencijuodami.

17 pavyzdys.

Vienetinėje atkarpoje atsitiktinai parenkamas taškas, atstumą nuo parinktojo taško iki atkarpos vidurio pažymėkime ξ. Raskime šio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkciją, jei visi taškai turi vienodas galimybes būti parinkti.

Taikysime geometrinių tikimybių schemą. Nesunku įsitikinti, kad

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei} \le 0, \\ 2x, & \text{jei } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{jei } x \ge \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Atsitiktinis dydis ξ turi ir tankį:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \notin [0; 1], \\ 2, & \text{jei } x \in [0; 1]. \end{cases}$$

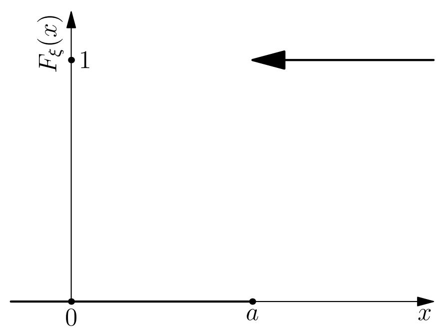
2.3. Diskretieji atsitiktiniai dydžiai

Šiame skyriuje nagrinėsime svarbius diskrečiųjų atsitiktinių dydžių pavyzdžius.

18 pavyzdys. Išsigimęs atsitiktinis dydis ir jo skirstinys

Gali būti, kad atsitiktinis dydis įgyja vienintelę reikšmę, t.y. yra toks skaičius a, kad $P(\xi = a) = 1$. Tokį atsitiktinį dydį vadinsime išsigimusiu, jo pasiskirstymo funkcija:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \le a, \\ 1, & \text{jei } x > a. \end{cases}$$



Išsigimusio skirstinio pasiskirstymo funkcija turi vieną, tačiau didelį trūkį.

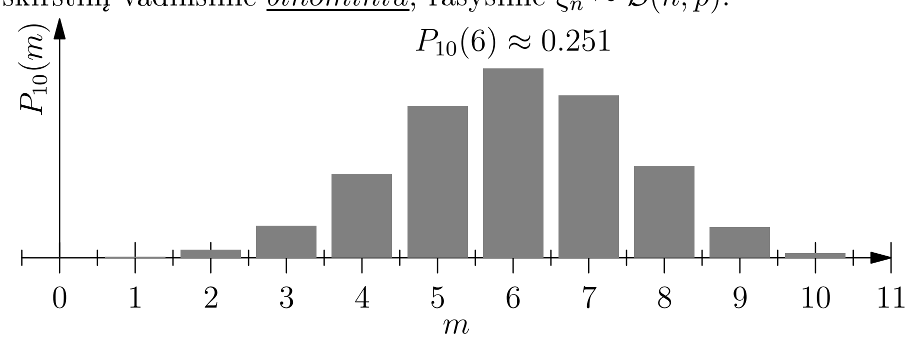
Žinoma, tokio dydžio galima ir nevadinti atsitiktiniu, tačiau teorija tuo paprastesnė, kuo išimčių ir atskirų atvejų yra mažiau.

19 pavyzdys. Binominis skirstinys

Nagrinėkime Bernulio schemą; tegu n – bandymų skaičius, p – sėkmės tikimybė, ξ_n – sėkmių skaičius atlikus n bandymų. Jau žinome, jog šio dydžio reikšmių aibė yra $\mathcal{S}_\xi = \{0, 1, \ldots, n\}$ ir

$$F_\xi(x) = \sum_{\substack{0 \le s < x \\ s \le n}} C_n^s p^s (1-p)^{n-s}.$$

Šį skirstinį vadinsime <u>*binominiu*</u>, rašysime $\xi_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.



Bernulio skirstinio $\mathcal{B}(10, 0, 6)$ tikimybės $P_{10}(m) = P(\xi_{10} = m)$.

20 pavyzdys. Paskalio skirstinys

Nagrinėkime Bernulio schemą kaip ankstesiajame pavyzdyje, tačiau bandymus kartokime tol, kol „surinksime" n sėkmių. Tegu θ_n – atliktų bandymų skaičius, o $\eta_n = \theta_n - n$. Tada η_n yra atsitiktinis dydis, jo reikšmė lygi nesėkmių, gautų atliekant bandymus iki surenkama n sėkmių, skaičiui. Dydžio reikšmių aibę sudaro visi neneigiami sveikieji skaičiai: $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\eta_n} = \{0, 1, \ldots, \}$, ir

$$F_\eta(x) = \sum_{0 \leq s < x} C^s_{n+s-1} p^n (1-p)^s.$$

Atsitiktinio dydžio η_n skirstinį vadinsime *Paskalio* skirstiniu, rašysime: $\eta_n \sim \mathcal{B}^-(n, p)$. [14]

Dydžio η_1 (jo reikšmė – nesėkmių iki pirmosios sėkmės skaičius) skirstinys vadinamas *geometriniu.* Tikimybės

$$P(\eta_1 = m) = pq^m, \quad q = 1 - p,$$

yra tiesiog geometrinės progresijos nariai.

21 pavyzdys. Puasono skirstinys

Tai tiek teorijai, tiek taikymams labai svarbus skirstinys. Jį taipogi „atrasime" nagrinėdami Bernulio schemas.

32 teorema. *Tegu atliekama n Bernulio schemos su sėkmės tikimybe p_n bandymų, tegu ξ_n – sėkmių skaičius šioje bandymų serijoje. Jeigu egzistuoja teigiamas skaičius λ, kad $np_n \to \lambda$, kai $n \to \infty$, tai su kiekvienu $m = 0, 1, \ldots$*

$$P(\xi_n = m) = C^m_n p^m_n q^{n-m}_n \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

čia $q_n = 1 - p_n$.

Įrodymas. Pažymėję $\lambda_n = np_n$ ir pasinaudoję binominių koeficientų išraiška faktorialais, gausime

$$P(\xi_n = m) = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} \Big(\frac{\lambda_n}{n}\Big)^m \Big(1 - \frac{\lambda_n}{n}\Big)^{n-m} =$$
$$\frac{\lambda^m_n}{m!} \Big(1 - \frac{\lambda_n}{n}\Big)^n \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big) \ldots \Big(1 - \frac{m-1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{\lambda_n}{n}\Big)^{-m}.$$

[14] Toks žymėjimas paaiškinamas tuo, jog Paskalio skirstinys – atskiras taip vadinamojo neigiamo binominio skirstinio atvejis.

Nagrinėkime kiekvieno daugiklio elgesį, kai $n \to \infty$. Kadangi m – fiksuotas, $\lambda_n \to \lambda$, kai $n \to \infty$, tai $\lambda_n^m \to \lambda^m$,

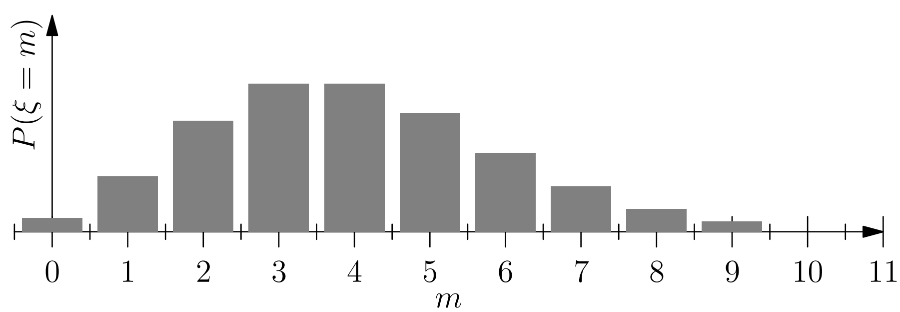
$$\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \to e^{-\lambda},$$

o visi kiti daugikliai artėja prie vieneto.

22 apibrėžimas. *Jeigu atsitiktinis dydis ξ įgyja sveikas neneigiamas reikšmes su tikimybėmis*

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

čia $\lambda > 0$, tai sakysime, kad ξ reikšmės pasiskirstę pagal Puasono[15] dėsnį (arba Puasono skirstinį) su parametru λ. Simboliškai rašysime $\xi \sim \mathcal{P}(\lambda)$.



Puasono skirstinio su parametru $\lambda = 4$ tikimybės.

Taigi šiame skyrelyje įrodyta teorema teigia, kad binominio skirstinio tikimybės, kai bandymų skaičius n yra didelis, o sėkmės tikimybė p yra maža, artimas Puasono skirstinio su parametru $\lambda = np$ tikimybėms. Todėl binominio skirstinio tikimybes, kurias tiksliai skaičiuoti gali būti sunku, galime keisti Puasono skirstinio tikimybėmis.

2.4. Absoliučiai tolydūs skirstiniai

Jeigu atsitiktinis dydis ξ yra absoliučiai tolydus, tai egzistuoja tankis, t. y. tokia neneigiama funkcija $p(u)$, kad

$$F_\xi(x) = P(\xi \in (-\infty, x)) = \int_{-\infty}^{x} p(u) du.$$

[15]Simeon Deni Poisson (1781-1840) – prancūzų matematikas. Parašė apie 350 darbų iš įvairių matematikos ir jos taikymų sričių: mechanikos, matematinės fizikos, taip pat ir tikimybių teorijos.

Pasirėmę šia lygybe bet kokiam intervalui $B = [a; b)$ gautume:

$$P(\xi \in B) = \int_B p(u)du.$$

Ši lygybė teisinga ne tik intervalams, bet ir bet kokioms Borelio aibėms. Kai $B = I\!R$, tai

$$P(\xi \in I\!R) = \int_{-\infty}^{infty} p(u)du = 1.$$

Panagrinėsime kelis svarbius absoliučiai tolydžių skirstinių pavyzdžius.

22 pavyzdys. Tolygusis skirstinys

Ruletė: vienetinis apskritimas ir besisukanti strėlė. Jai sustojus pasirenkame apskritimo tašką, į kurį nukreipta strėlė. Galime nustatyti abipus vienareikšmę vienetinio apskritimo C ir vienetinio intervalo $I = [0, 1)$ taškų atitiktį $\psi : I \to C$; čia $\psi(t)$ yra vienetinio apskritimo taškas, kurio polinės koordinatės $\rho = 1, \phi = 2\pi t$.

Tada galime tarti, kad su rulete atsitiktinai pasirenkame skaičių ξ iš vienetinio intervalo. Dydis ξ yra atsitiktinis ir visos jo reikšmės „turi vienodas galimybes pasirodyti“. Naudodami geometrinių tikimybių modelį gauname

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \leq 0, \\ x, & \text{jei } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{jei } x > 1. \end{cases}$$

Taigi ξ yra absoliučiai tolydus atsitiktinis dydis, turintis tankį

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \notin [0, 1]\ , \\ 1, & \text{jei } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Sakysime, dydis tolygiai pasisikirstęs intervale $[0; 1]$, kitaip tariant, ξ skirstinys yra *tolygusis*.

Panašiai apibrėžiame ir tolygųjį skirstinį intervale $[a; b]$.

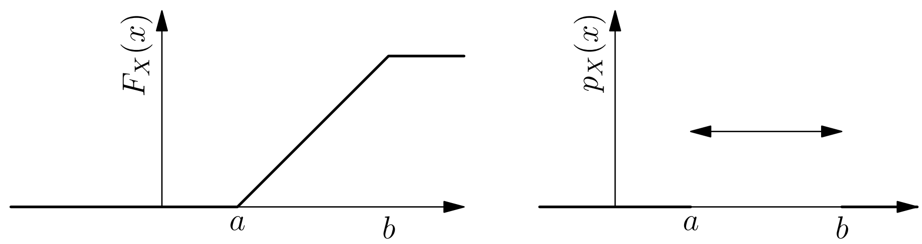
23 apibrėžimas. *Sakysime, kad atsitiktinis dydis yra tolygiai pasiskirstęs intervale* $[a; b]$, *jeigu jis turi tankį* $p_\xi(x)$, *kuris lygus nuliui, kai* $x \notin [a; b]$, *o visiems* $x \in [a; b]$ $p_\xi(x)$ *įgyja tą pačią reikšmę.*

Tarkime $p_\xi(x) = c$. Kadangi tankio integralas pagal visą tiesę turi būti lygus vienetui, tai

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = c\int_a^b dx = c(b-a), \quad c = \frac{1}{b-a}.$$

Taigi tolygiai intervale $[a;b]$ pasiskirsčiusio atsitiktinio dydžio tankis yra

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \notin [a;b], \\ \frac{1}{b-a}, & \text{jei } x \in [a;b]. \end{cases}$$



Tolygiai intervale $[a;b]$ pasiskirsčiusio atsitiktinio dydžio pasikirstymo funkcijos ir tankio grafikai.

23 pavyzdys. Eksponentinis skirstinys

Radžio atomas skyla, virsdamas radono atomu ir išspinduliuodamas alfa dalelę:

$$Ra \to Rn + \alpha.$$

Tarkime, ξ yra laikotarpis nuo atomo stebėjimo pradžios iki skilimo momento. Atomas nėra svarstantis ir skilimui vidujai besiruošiantis subjektas: jeigu praėjus laikotarpiui s jis vis dar nėra skilęs, tai tikimybė kad jis dar ištvers laiko intervalą t, yra ta pati, koks bebūtų s. Šią savybę analiziškai užrašysime taip:

$$P(\xi \geq t+s | \xi \geq s) = P(\xi \geq t).$$

Pažymėję $G(t) = P(\xi \geq t)$ ir pasirėmę tuo, jog

$$P(\xi \geq t+s | \xi \geq s) = \frac{P(\xi \geq t+s)}{P(\xi \geq s)},$$

gauname

$$G(t+s) = G(t)G(s). \tag{21}$$

Analizės metodais galime išspręsti funkcinę (21) lygtį. Sprendiniai yra funkcijos

$$G(t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0;$$

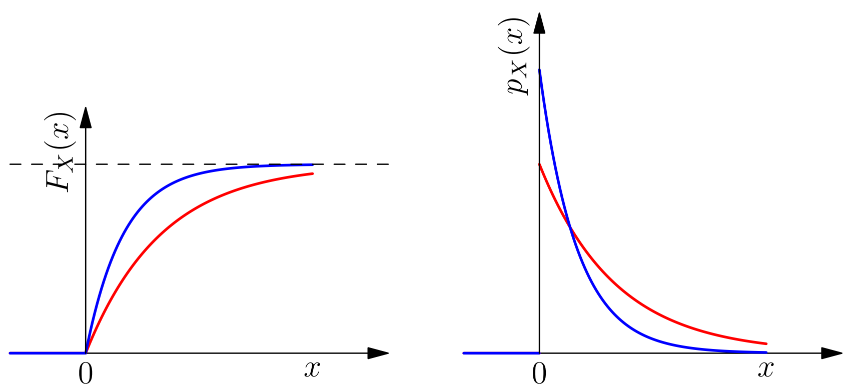
čia $\lambda > 0$ – parametras, priklausantis nuo fizinių radono savybių. Dabar

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}, & \text{kai } x > 0. \end{cases}$$

Taigi ξ yra absoliučiai tolydus atsitiktinis dydis, turintis tankį

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{kai } x > 0. \end{cases} \tag{22}$$

24 apibrėžimas. *Jeigu atsitiktinis dydis ξ turi tankį, užrašomą (22) lygybe, kurioje $\lambda > 0$, tai sakysime, kad atsitiktinis dydis pasiskirstęs pagal eksponentinį dėsnį, o jo skirstinį vadinsime eksponentiniu. Simboliškai rašysime: $\xi \sim \mathcal{E}(\lambda)$.*



Eksponentinių skirstinių pasiskirstymo funkcijų ir tankių grafikai

Eksponentinis skirstinys yra atskiras gama skirstinių šeimos atvejis. Gama skirstinį atitinkantis tankis lygus nuliui neigiamoms argumento reikšmėms, o teigiamoms – apibrėžiamas panaudojant du teigiamus parametrus:

$$p(x|\lambda, \eta) = \frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)} x^{\eta-1} e^{-\lambda x},$$

čia $\Gamma(\eta)$ yra vadinamoji gama funkcija, kuri teigiamiems η gali būti užrašyta integralu

$$\Gamma(\eta) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{\eta-1} dt.$$

Jei atsitiktinio dydžio ξ skirstinys – gama skirstinys su parametrais λ, η, rašysime $\xi \sim \mathcal{G}(\lambda, \eta)$.

24 pavyzdys. Normalusis skirstinys

Nagrinėkime Bernulio schemą, tegu p – sėkmės tikimybė viename bandyme, o n – bandymų skaičius. Nagrinėkime schemą su vis didesniu bandymų skaičiumi n.

Teisinga tokia teorema.

33 teorema. *Tegu sėkmės tikimybė Bernulio schemoje lygi p , o ξ_n – sėkmių skaičius po n bandymų. Tada bet kokiam x*

$$P\left(\omega : \frac{\xi_n(\omega) - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt, \quad n \to \infty.$$

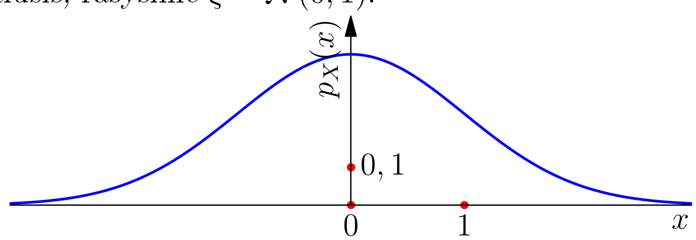
Ši teorema vadinama Muavro-Laplaso integraline teorema.

Šioje teoremoje pasirodo labai svarbus tikimybių teorijoje skirstinys.

25 apibrėžimas. *Jeigu atsitiktinis dydis ξ turi tankį*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

tai sakysime, kad jis pasiskirstęs pagal standartinį normalųjį dėsnį, jo skirstinį vadinsime standartiniu normaliuoju. Jeigu ξ skirstinys yra standartinis normalusis, rašysime $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$.



Standartinio normaliojo dėsnio tankis.

Normalųjį skirstinį apibrėšime ir n-mačiu atveju.

26 apibrėžimas. *Sakysime, kad atsitiktinio vektoriaus $\xi : \Omega \to I\!R^n$ skirstinys yra standartinis normalusis, jei ξ yra absoliučiai tolydus atsitiktinis vektorius, turintis tankį*

$$p_\xi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \Big\}.$$

Panagrinėsime absoliučiai tolydžiųjų atsitiktinių dydžių ir vektorių savybes. Jei ξ yra absoliučiai tolydus atsitiktinis dydis, p_ξ – šio atsitiktinio dydžio tankis, B yra Borelio aibė, tai

$$P(\xi \in B) = \int_B p_\xi(u) du.$$

Analogiška lygybė teisinga ir atsitiktiniams vektoriams. Tegu $\xi = \langle \xi_1, \ldots, \xi_m \rangle, \xi : \Omega \to I\!R^m$, absoliučiai tolydus atsitiktinis vektorius, p_ξ šio atsitiktinio vektoriaus tankis, $B \in \mathcal{B}^m$ – bet kokia Borelio aibė. Tada

$$P(\xi \in B) = \int_B p_\xi(u_1, u_2, \ldots, u_m) du_1 du_2 \ldots du_m. \tag{23}$$

Imkime

$$B = (-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \ldots \times (-\infty, x_{m-1}) \times I\!R.$$

Tada $P(\xi \in B) = P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_{m-1} < x_{m-1}) = F_{\xi'}(x_1, \ldots, x_{m-1})$, čia $\xi' = \langle \xi_1, \ldots, \xi_{m-1} \rangle$. Pritaikę (23) formulę gausime:

$$F_{\xi'}(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}) = \int_{\substack{u_i < x_i \\ i=1,\ldots,m-1}} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(u_1, u_2, \ldots, u_m) du_m \Big) du_1 du_2 \ldots du_{m-1}.$$

Jeigu pažymėsime:

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(u_1, u_2, \ldots, u_m) du_m,$$

tai gausime

$$F_{\xi'}(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}) = \int_{\substack{u_i < x_i \\ i=1,\ldots,m-1}} f(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}) du_1 \ldots du_{m-1},$$

taigi $f(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1})$ yra „trumpesnio“ atsitiktinio vektoriaus tankis. Suformuluokime gautąjį rezultatą kaip teoremą:

34 teorema. *Jeigu absoliučiai tolydaus atsitiktinio vektoriaus $\xi = \langle \xi_1, \ldots, \xi_m \rangle$ tankis yra $p_\xi(u_1, \ldots u_m)$, tai atsitiktinis vektorius $\xi' = \langle \xi_1, \ldots, \xi_{m-1} \rangle$ taip pat yra absoliučiai tolydus ir jo tankis yra*

$$p_{\xi'}(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(u_1, u_2, \ldots, u_m) du_m.$$

Beveik akivaizdu, kaip gauti kitų „trumpesnių“ atsitiktinių vektorių tankius – reikia „ilgojo“ vektoriaus tankį suintegruoti pagal tam tikras komponentes. Teiginį apie atsitiktinių vektorių tankius neformaliai galime suformuluoti taip: „trumpesniojo" atsitiktinio vektoriaus tankį gauname iš „ilgesniojo“ atsitiktinio vektoriaus tankio, suintegravę pastarąjį pagal „nereikalingas“ komponentes.

25 pavyzdys.

Atsitiktinis vektorius $\xi = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ įgyja reikšmes iš aibės

$$\Delta = \{< u_1, u_2 >: u_1, u_2 \geq 0, u_1 + u_2 \leq 1\},$$

visos reikšmės yra vienodai galimos. Raskime tankius $p_\xi(u_1, u_2)$ ir $p_{\xi_1}(u)$.

Plokštumoje aibė Δ reiškia trikampį, kurio plotas $s(\Delta) = 1/2$. Jei B – bet kokia išmatuojama plokštumos aibė, tai

$$P(\xi \in B) = \frac{s(\Delta \cap B)}{s(\Delta)} = 2s(B \cap \Delta) = \int_B 2I_\Delta(u_1, u_2)du_1du_2.$$

Taigi

$$p_\xi(u_1, u_2) = \begin{cases} 2, & < u_1, u_2 > \in \Delta, \\ 0, & < u_1, u_2 > \notin \Delta. \end{cases}$$

Tada

$$p_{\xi_1}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(u, u_2)du_2.$$

Kai $u < 0$ arba $u > 1$, $p_{\xi_1}(u) = 0$, kai $0 \leq u \leq 1$

$$p_{\xi_1}(u) = \int_0^u 2du_2 = 2u.$$

Jei ξ yra atsitiktinis dydis, o ϕ – Borelio funkcija, tai $\eta = \phi(\xi)$ irgi yra atsitiktinis dydis. Jeigu ξ turi tankį, ar η taip pat turi tankį? Apsiribosime monotoninės, tolydžiai diferencijuojamos funkcijos ϕ atveju.

35 teorema. *Jei $\xi : \Omega \to I\!R$ yra atsitiktinis dydis, o $\phi : I\!R \to I\!R$ – monotoninė tolydžiai diferencijuojama funkcija, tai atsitiktinio dydžio $\eta = \phi(\xi)$ tankis yra*

$$p_\eta(t) = p_\xi(\phi^{-1}(t)) \cdot |\phi'(\phi^{-1}(t))|^{-1}.$$

Įrodymas. Įrodymas remiasi kintamojo keitimo integrale formule. Tegu ϕ – monotoniškai didėjanti funkcija. Tada turime

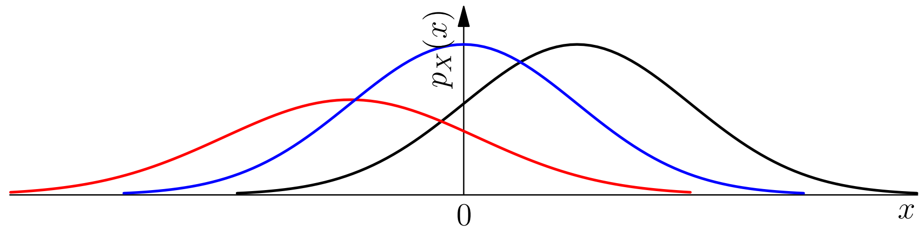
$$F_\eta(y) = P(\phi(\xi) < y) = P(\xi < \phi^{-1}(y)) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(y)} p_\xi(u)du.$$

Dabar belieka pakeisti kintamąjį u kintamuoju t, kad galiotų sąryšis $t = \phi(u)$.

26 pavyzdys. Tegu $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$, o $\eta = a + \sigma\xi$, čia $\sigma > 0$. Tada pritaikę teoremos išvadą gausime, jog atsitiktinis dydis η turi tankį

$$p_\eta(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(x - a)^2 \right\}.$$

Sakysime, kad η skirstinys yra normalusis su parametrais a, σ ir rašysime $\eta \sim \mathcal{N}(a, \sigma)$.



Normaliųjų dydžių tankiai. Dydžio $\eta \sim \mathcal{N}(a, \sigma)$ tankio grafikas simetriškas tiesės $x = a$ atžvilgiu. Kuo mažesnė σ reikšmė, tuo statesnis tankio grafikas.

Tačiau sprendžiant uždavinius galima ir nesinaudoti įrodytos teoremos formule. Juk tankį galime rasti iš pradžių suradę pasiskirstymo funkciją, o po to apskaičiavę jos išvestinę.

27 pavyzdys. Tegu ξ yra atsitiktinis dydis, pasiskirstęs tolygiai intervale $[0;1]$. Raskime atsitiktinio dydžio $\eta = \frac{1}{\xi}$ tankį.

Iš pradžių apskaičiuokime pasiskirstymo funkciją $F_\eta(x)$. Pakanka surasti šios funkcijos reikšmes, kai x yra teigiamas. Pasinaudoję tuo, kad atsitiktinio dydžio ξ tankį žinome, gausime:

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P\big(\frac{1}{\xi} < x\big) = P\big(\xi > \frac{1}{x}\big) = \int_{[0;1]\cap(\frac{1}{x};+\infty)} du.$$

Jeigu $x < 1$, tai aibė, pagal kurią integruojame, yra tuščia, todėl ir integralas lygus nuliui. Kai $x \geq 1$, tai integralas lygus $1 - \frac{1}{x}$. Taigi

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{x}, & \text{jei } x > 1, \end{cases} \quad p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \leq 1, \\ \frac{1}{x^2}, & \text{jei } x > 1. \end{cases}$$

Teiginį apie tankius galima suformuluoti ir įrodyti atsitiktiniams vektoriams.

36 teorema. *Tegu $\xi : \Omega \to I\!R^n$ atsitiktinis vektorius, o $\phi : I\!R^n \to I\!R^n$ abipus vienareikšmis, tolydžiai diferencijuojamas atvaizdis, $\phi = \langle \phi_1, \ldots \phi_n \rangle$,*

$$J(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Jei $p_\xi(x)$ yra atsitiktinio vektoriaus ξ tankis, o $\eta = \phi(\xi)$, tai pastarojo vektoriaus tankis yra

$$p_\eta(y) = p_\xi(\phi^{-1}(y)) \cdot |J(\phi^{-1}(y))|^{-1}.$$

28 pavyzdys. Normalieji vektoriai

Tegu $\xi = \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ yra n-matis atsitiktinis vektorius, pasiskirstęs pagal standartinį normalųjį dėsnį, t. y. jo tankis yra

$$p_\xi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \Big\}.$$

Su vektorium $a = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ir matrica

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}, \quad |\Sigma| \neq 0,$$

apibrėšime abipus vienareikšmį atvaizdį $\phi : I\!\!R^n \to I\!\!R^n : \phi(x) = a + \Sigma x^\perp$, čia $\perp$ žymi transponavimo veiksmą. Pritaikę teoremą galime rasti atsitiktinio vektoriaus $\eta = a + \Sigma \xi^\perp$ tankį:

$$p_\eta(x) = \frac{1}{|Q|^{1/2}(2\pi)^{n/2}} \exp\big\{ -\frac{1}{2}(x-a)Q(x-a)^\perp \big\},$$

čia $Q = \big(\Sigma\Sigma^\perp\big)^{-1}$.

2.5. Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai

Apibrėšime nepriklausomus atsitiktinius dydžius. Natūralu pavadinti atsitiktinius dydžius ξ_1, ξ_2 nepriklausomais, jei su bet kokiomis Borelio aibėmis B_1, B_2 įvykiai $\{\omega : \xi_1(\omega) \in B_1\}$, $\{\omega : \xi_2(\omega) \in B_2\}$ yra nepriklausomi.

27 apibrėžimas. *Atsitiktinius dydžius ξ_1, ξ_2 vadinsime nepriklausomais, jei su bet kokiomis Borelio aibėmis B_1, B_2*

$$P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2) = P(\xi_1 \in B_1)P(\xi_2 \in B_2).$$

Norint apibrėžti du nepriklausomus vektorius, pakanka tik truputį pakeisti apibrėžimą.

28 apibrėžimas. *Atsitiktinius vektorius $\xi_1, \xi_2 : \Omega \to I\!\!R^n$ vadinsime nepriklausomais, jei su bet kokiomis Borelio aibėmis $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(I\!\!R^n)$*

$$P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2) = P(\xi_1 \in B_1)P(\xi_2 \in B_2).$$

Intuityviai du nepriklausomus įvykius suvokiame taip: du įvykiai yra nepriklausomi, jeigu sužinoję, kad vienas iš jų įvyko (arba neįvyko), negauname jokios naujos informacijos apie tai, ar įvyko antrasis. Panašiai galime įsivaizduoti ir du nepriklausomus dydžius ar vektorius.

Tačiau gali pasitaikyti ir tokios atsitiktinių įvykių (o taip pat ir atsitiktinių dydžių) sistemos, kad bet kurie du tos sistemos atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi, tačiau visumoje juos sieja tam tikri tarpusavio ryšiai. Štai paprastas pavyzdys. Tarkime, kad metamos dvi simetriškos monetos. Apibrėškime įvykius:

$$A = \{\text{pirmoji moneta atvirto herbu}\}, \quad B = \{\text{antroji moneta atvirto herbu}\},$$

ir $C = \{\text{tik viena moneta atvirto herbu }\}$. Tada įvykių poros A, B ir B, C, o taip pat ir A, C yra nepriklausomos, tačiau visą įvykių trejetą A, B, C sudaro priklausomi įvykiai. Iš tiesų, jei žinome, kad du iš įvykių (pavyzdžiui, A, B) įvyko, tai galime pasakyti, įvyko ar neįvyko trečiasis.

Taigi norint apibrėžti nepriklausomų atsitiktinių įvykių (o taip pat ir dydžių) sistemą, nepakanka pareikalauti, kad jie būtų poromis nepriklausomi.

29 apibrėžimas. *Tegu $\xi_\lambda : \Omega \to I\!R^m$ $(\lambda \in \Lambda)$ atsitiktinių vektorių sistema. Jei bet kokiam atsitiktinių vektorių $\xi_{\lambda_1}, \ldots, \xi_{\lambda_m}$ $(m \geq 2)$ ir Borelio aibių $B_1, B_2, \ldots, B_m$ rinkiniui teisinga lygybė*

$$P(\xi_{\lambda_1} \in B_1, \ldots, \xi_{\lambda_m} \in B_m) = P(\xi_{\lambda_1} \in B_1) \cdots P(\xi_{\lambda_m} \in B_m),$$

tai sistemą sudaro nepriklausomi atsitiktiniai vektoriai.

Tikrinti, ar du atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi, naudojantis apibrėžimu – labai sudėtinga. Tiesą sakant – visai nebūtina, nes nepriklausomumo sąlygą galima reikšti tikrinimui patogesniu būdu: naudojant pasiskirstymo funkcijas, tankius, reikšmių įgijimo tikimybes.

37 teorema. *Atsitiktiniai dydžiai $\xi, \eta : \Omega \to I\!R$ yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai*

$$P(\xi < u, \eta < v) = P(\xi < u)P(\eta < v). \tag{24}$$

Šią teoremą galime performuluoti taip.

38 teorema. *Atsitiktiniai dydžiai $\xi, \eta : \Omega \to I\!R$ yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai atsitiktinio vektoriaus $\zeta = \langle \xi, \eta \rangle$ pasiskirstymo funkcija reiškiama taip:*

$$F_\zeta(u, v) = F_\xi(u) F_\eta(v), \tag{25}$$

čia $\zeta = \langle \xi, \eta \rangle$.

Įrodymas. Beveik akivaizdu, kad nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai būtinai tenkina (24) sąlygą.Todėl pakanka parodyti, jog iš (24) išplaukia, kad su bet kokioms Borelio aibėms B_1, B_2

$$P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = P(\xi \in B_1)P(\eta \in B_2). \tag{26}$$

Beveik akivaizdu, jog ši sąlyga yra patenkinta, jeigu $P(\xi \in B_1) = 0$ arba $P(\eta \in B_2) = 0$, todėl pakanka (26) lygybę įrodyti, kai abi šios tikimybės yra teigiamos.

Imkime $B_2 = (-\infty, v)$, pažymėkime

$$Q(B) = P(\xi \in B|\eta \in B_2) = \frac{P(\xi \in B_1, \eta \in B_2)}{P(\eta \in B_2)}, \quad R(B) = P(\xi \in B)$$

ir perrašykime įrodytiną (26) lygybę taip: $Q(B_1) = R(B_1)$. Abi funkcijos Q, R yra tikimybiniai matai, apibrėžti Borelio σ-algebroje. Iš (24) gauname, jog lygybė $Q(B_1) = R(B_1)$, o tuo pat metu ir (26) galioja, kai $B_1 = (-\infty, u)$. Prisiminkime skyrelio apie tikimybes Borelio σ-algebroje teiginius ir konstrukcijas. Iš jų išplaukia, kad tikimybiniai matai, sutampantys begaliniams intervalams $(-\infty, u)$, sutampa visoms Borelio aibėms. Taigi lygybė $Q(B_1) = R(B_1)$ galioja bet kokioms Borelio aibėms B_1. Tai ekvivalentu tvirtinimui, jog (26) galioja bet kokiai Borelio aibei B_1 ir bet kokiam intervalui $B_2 = (-\infty, v)$. Lieka parodyti, kad ir aibė B_2 šioje lygybėje gali būti bet kokia Borelio aibė. Pasirinkime Borelio aibę B_1, kad $P(\xi \in B_1) > 0$ ir perrašykime (26) šitaip:

$$P(\eta \in B_2|\xi \in B_1) = P(\eta \in B_2); \tag{27}$$

ši lygybė teisinga bet kokiam intervalui $B_2 = (-\infty; u)$. Pažymėkime

$$Q(B) = P(\eta \in B|\xi \in B_1), \quad R(B) = P(\eta \in B).$$

Funkcijos $Q(B)$ ir $R(B)$ yra tikimybiniai matai; iš (27) gauname, kad jie sutampa bet kokiems begaliniams intervalams $B = (-\infty, v)$. Iš anksčiau pateiktų argumentų išplaukia, kad jie turi sutapti visoms Borelio aibėms. Taigi (26) lygybė teisinga su bet kokiomis Borelio aibėmis B_1, B_2.

Įrodytąją teoremą nesunku suformuluoti, ne dviejų, bet m atsitiktinių dydžių atveju. Kai dydžiai yra diskretūs arba absoliučiai tolydūs, nepriklausomumo sąlygą galime reikšti tiesiog reikšmių tikimybėmis arba tankiais.

39 teorema. *Diskretūs atsitiktiniai dydžiai $\xi, \eta : \Omega \to I\!R$ yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai su bet kokiais x, y*

$$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y).$$

29 pavyzdys. Rutuliai iš urnos

Tarkime, kad urnoje yra penki rutuliai – du balti ir trys juodi. Iš urnos po vieną rutulį traukiame du kartus. Jeigu pirmasis ištrauktas rutulys yra baltas, tai dydžiui ξ priskirsime reikšmę 1, jeigu juodas – reikšmę 0. Su antrojo rutulio traukimu analogiškai susiekime dydį η. Jeigu ištraukę rutulį iš urnos jį vėl sugrąžiname atgal, tai ξ, η – nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, jeigu negrąžiname, tai dydžiai yra priklausomi.

30 pavyzdys. Bernulio dydžiai

Nepriklausomų atsitiktinių dydžių šeimos pavyzdį gauname iš Bernulio schemos. Jei ξ_m įgyja reikšmę lygią 1 sėkmės m-tajame Bernulio schemos bandyme atveju ir 0 – nesėkmės, tai $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.

Jeigu atsitiktiniai dydžiai yra absoliučiai tolydūs, tai jų nepriklausomumo sąlygą galime suformuluoti pasinaudoję tankiais.

40 teorema. *Jei $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ absoliučiai tolydūs ir nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys tankius p_ξ, p_η, tai atsitiktinis vektorius $\zeta = \langle \xi, \eta \rangle$ irgi absoliučiai tolydus, bei*

$$p_\zeta(u_1, u_2) = p_\xi(u_1) p_\eta(u_2).$$

Jei atsitiktinis vektorius $\zeta = \langle \xi, \eta \rangle$ yra absoliučiai tolydus, p_ζ, p_ξ, p_η yra šio vektoriaus ir jo komponenčių tankiai, be to,

$$p_\zeta(u_1, u_2) = p_\xi(u_1) p_\eta(u_2),$$

tai atsitiktiniai dydžiai ξ, η yra nepriklausomi.

Pasirėmę vien nepriklausomų atsitiktinių dydžių bei Borelio funkcijų apibrėžimais galime įrodyti tokį teiginį.

41 teorema. *Jei $\xi_1, \xi_2 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai vektoriai, o $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ yra dvi Borelio funkcijos, tai atsitiktiniai vektoriai $\eta_1 = f_1(\xi_1), \eta_2 = f_2(\xi_2)$ irgi nepriklausomi.*

Dažnai tenka sumuoti dviejų ar daugiau nepriklausomų atsitiktinių dydžių reikšmes. Pavyzdžiui, dalyvavus dviejose loterijose natūralu suvesti laimėjimų ar pralaimėjimų balansą ir t.t. Dviejų atsitiktinių dydžių suma vėl yra atsitiktinis dydis. Kaip jo skirstinys priklauso nuo dėmenų skirstinių?

42 teorema. *Jei ξ, η yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $\zeta = \xi + \eta$, tai*

$$P(\zeta = z) = \sum_{\substack{x,y \\ x+y=z}} P(\xi = x) \cdot P(\eta = y).$$

Įrodymas. Įvykį $\{\zeta = z\}$ galime išskaidyti į nesutaikomų įvykių $\{\xi = x, \eta = y\}$, sąjungą, čia x yra atsitiktinio dydžio ξ reikšmė. Taigi

$$P(\zeta = z) = \sum_{\substack{x,y \\ x+y=z}} P(\xi = x, \eta = y) = \sum_{\substack{x,y \\ x+y=z}} P(\xi = x) \cdot P(\eta = y).$$

Atsakysime į klausimą apie nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumos skirstinį, kai dėmenys yra absoliučiai tolydūs ir nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.

Tegu ξ_1, ξ_2 yra nepriklausomi, absoliučiai tolydūs atsitiktiniai dydžiai, turintys tankius $p_{\xi_1}(u_1), p_{\xi_2}(u_2)$. Tada atsitiktinio vektoriaus $\xi = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ tankis yra

$$p_\xi(u_1, u_2) = p_{\xi_1}(u_1) p_{\xi_2}(u_2).$$

Apskaičiuosime pasiskirstymo funkciją

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x) = P(\xi_1 + \xi_2 < x) = P(\xi \in B),$$

čia B yra pusplokštumė, apribota tiese $u_1 + u_2 = x$. Tačiau tikimybes, susijusias su absoliučiai tolydaus atsitiktinio vektoriaus reikšmėmis, skaičiuojame naudodami tankį, taigi

$$P(\xi \in B) = \int_B p_\xi(u_1, u_2) du_1 du_2 = \int_B p_{\xi_1}(u_1) p_{\xi_2}(u_2) du_1 du_2.$$

Pakeisime integralą pagal plokštumos sritį dvilypiu integralu:

$$\begin{aligned} F_{\xi_1+\xi_2}(x) &= P(\xi \in B) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{x-u_1} p_{\xi_1}(u_1) p_{\xi_2}(u_2) du_2 \Big) du_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(u_1) \Big(\int_{-\infty}^{x-u_1} p_{\xi_2}(u_2) du_2 \Big) du_1. \end{aligned}$$

Pakeiskime vidiniame integrale integravimo kintamąjį u_2 kintamuoju $v, u_2 = v - u_1$. Gausime

$$\begin{aligned} F_{\xi_1+\xi_2}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(u_1) \Big(\int_{-\infty}^{x} p_{\xi_2}(v - u_1) dv \Big) du_1 \\ &= \int_{-\infty}^{x} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(u_1) p_{\xi_2}(v - u_1) du_1 \Big) dv. \end{aligned}$$

Prisiminę, kaip iš atsitiktinio vektoriaus tankio gaunami jo komponenčių tankiai, gausime

$$p_{\xi_1+\xi_2}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(u) p_{\xi_2}(v - u) du.$$

Suformuluosime teoremą; vieną jos formulę jau įrodėme, kitos įrodymas analogiškas.

43 teorema. *Jei ξ_1, ξ_2 absoliučiai tolydūs nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys tankius p_{ξ_1}, p_{ξ_2}, tai atsitiktinis dydis $\eta = \xi_1 + \xi_2$ yra taip pat absoliučiai tolydus o jo tankis*

$$p_{\xi_1+\xi_2}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(v) p_{\xi_2}(u - v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_2}(v) p_{\xi_1}(u - v) dv.$$

2.6. Atsitiktinių dydžių vidurkis

Jau žinome, kas yra paprastojo atsitiktinio dydžio vidurkis. Jei ξ yra paprastas atsitiktinis dydis, tai jo vidurkis lygus

$$\mathbf{E}[\xi] = \sum_x xP(\xi = x).$$

31 pavyzdys. Binominis dydis Jei $\xi \sim \mathcal{B}(p, n)$, tai ξ įgyja reikšmes $k = 0, 1, \dots, n$ su tikimybėmis

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Taigi

$$\mathbf{E}[\xi] = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-1-k} = np.$$

Šiame skyriuje pateiksime atsitiktinio dydžio vidurkio apibrėžimą bendruoju atveju. Pirmasis žingsnelis – nuo paprastųjų atsitiktinių dydžių prie diskrečiųjų.

30 apibrėžimas. *Tegu ξ yra diskretus atsitiktinis dydis, be to eilutė*

$$\sum_x xP(\xi = x) \tag{28}$$

absoliučiai konverguoja. Tada šios eilutės sumą žymėsime $\mathbf{E}[\xi]$ ir vadinsime atsitiktinio dydžio ξ matematiniu vidurkiu.

Priminsime, jog absoliutus (28) eilutės konvergavimas reiškia, jog eilutės

$$\sum_x |x|P(\xi = x) \tag{29}$$

suma yra baigtinė. Iš apibrėžimo matome, kad jeigu atsitiktinis dydis ξ turi vidurkį, tai diskretaus atsitiktinio dydžio $|\xi|$ vidurkis yra taip pat apibrėžtas.

32 pavyzdys. Puasono dydis. Jei $\xi \sim \mathcal{P}(\lambda)$, tai ξ įgyja sveikas neneigiamas reikšmes k su tikimybėmis $P(\xi = k) = \lambda^k e^k / k!$, taigi

$$\mathbf{E}[\xi] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda.$$

Pastebėsime, kad aprėžto diskrečiojo atsitiktinio dydžio ξ vidurkis visada egzistuoja. Pasirėmę vien vidurkio apibrėžimu galime įrodyti dar daugiau:

jeigu ξ ir η yra du diskretieji atsitiktiniai dydžiai, $|\xi| \le \eta$, ir atsitiktinio dydžio η vidurkis egzistuoja, tai egzistuoja ir atsitiktinio dydžio ξ vidurkis.

Įrodysime paprasčiausias diskrečiųjų atsitiktinių dydžių vidurkių savybes.

44 teorema. *Tegu ξ, ξ_1, ξ_2 yra diskretūs atsitiktiniai dydžiai, kurių matematiniai vidurkiai egzistuoja. Teisingi tokie teiginiai:*

1. *su bet kokiomis konstantomis c_1, c_2 dydžio $c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ matematinis vidurkis taip pat egzistuoja ir*
$$\mathbf{E}[c_1\xi_1 + c_2\xi_2] = c_1\mathbf{E}[\xi_1] + c_2\mathbf{E}[\xi_2];$$
2. *jei $\xi_1 \le \xi_2$, tai $\mathbf{E}[\xi_1] \le \mathbf{E}[\xi_2]$;*
3. $|\mathbf{E}[\xi]| \le \mathbf{E}[|\xi|]$;
4. $\mathbf{E}[|\xi| I_{\{\xi > a\}}] \to 0, \quad a \to \infty;$
5. *Jei ξ_1, ξ_2 yra nepriklausomi, tai atsitiktinio dydžio $\xi_1 \cdot \xi_2$ vidurkis egzistuoja, ir*
$$\mathbf{E}[\xi_1 \cdot \xi_2] = \mathbf{E}[\xi_1] \cdot \mathbf{E}[\xi_2]. \tag{30}$$

Įrodymas. 1. Įrodymas beveik toks pat kaip paprastųjų atsitiktinių dydžių atveju. Tik vietoj baigtinių aibių dabar – skaičios, o vietoje baigtinių sumų – absoliučiai konverguojančios eilutės.

2. Kadangi $\xi_2 = \xi_1 + \xi_2 - \xi_1$ ir $\xi_2 - \xi_1 \ge 0$ ir ξ_2 yra diskretusis atsitiktinis dydis, tai pasinaudoję jau įrodyta 1) dalimi, gausime

$$\mathbf{E}[\xi_2] = \mathbf{E}[\xi_1 + \xi_2 - \xi_1] = \mathbf{E}[\xi_1] + \mathbf{E}[\xi_2 - \xi_1] \ge \mathbf{E}[\xi_1],$$

nes neneigiamo diskrečiojo atsitiktinio dydžio $\xi_2 - \xi_1$ matematinis vidurkis irgi neneigiamas.

3. Nelygybė išplaukia iš nelygybės $-|\xi| \le \xi \le |\xi|$ ir jau įrodytos 2)dalies.

4. Turime
$$\mathbf{E}[|\xi| I_{\{\xi > a\}}] = \sum_{x > a} |x| P(\xi = x).$$

Teiginys išplaukia iš (29) eilutės absoliutaus konvergavimo.

5. Iš pradžių tarkime, jog ξ_1, ξ_2 įgyja tik neneigiamas reikšmes. Dydžių ξ_1, ξ_2 reikšmes žymėsime atitinkamai x, y. Tada

$$\sum_{x,y} xyP(\xi_1 = x, \xi_2 = y) = \sum_{x,y} xyP(\xi_1 = x)P(\xi_2 = y).$$

Kadangi užrašytosios eilutės visi nariai neneigiami, tai bet kaip juos sugrupavę ir po to sumuodami, mes gautume tą pačią reikšmę, kai pradinė eilutė konverguoja, ir diverguojančią eilutę, kai pradinė eilutė diverguoja. Tada

$$\sum_{x,y} xyP(\xi_1 = x)P(\xi_2 = y) = \sum_x xP(\xi_1 = x)\sum_y yP(\xi_2 = y) = \mathbf{E}[\xi_1]\cdot\mathbf{E}[\xi_2].$$

Įrodėme, kad $\mathbf{E}[\xi_1\cdot\xi_2]$ egzistuoja ir (30) lygybė teisinga.

Tegu dabar ξ_1, ξ_2 yra bet kokie diskretūs nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Tada $|\xi_1|, |\xi_2|$ yra neneigiami ir nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai turintys vidurkius. Pagal jau įrodytą dalį atsitiktinio dydžio $|\xi_1\xi_2|$ vidurkis egzistuoja. Tada egzistuoja ir $\xi_1\xi_2$ vidurkis, bei

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\xi_1\xi_2] &= \sum_{x,y} xyP(\xi_1 = x, \xi_2 = y) = \sum_{x,y} xyP(\xi_1 = x)P(\xi_2 = y) &(31)\\ &= \sum_x xP(\xi_1 = x)\sum_y yP(\xi_2 = y) = \mathbf{E}[\xi_1]\cdot\mathbf{E}[\xi_2]. &(32)\end{aligned}$$

Čia narių grupavimą atlikome nedvejodami todėl, kad eilutė absoliučiai konverguoja.

Dabar mes jau pasirengę apibrėžti matematinį vidurkį bendru atveju. Prisiminkime vieną matematinės analizės apibrėžimą ir suformuluokime jį atsitiktiniams dydžiams.

31 apibrėžimas. *Jei $\xi_n, \xi : \Omega \to I\!R$ ir kiekvienam $\delta > 0$ egzistuoja n_δ , kad $|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \delta$, kai $n \geq n_\delta$, su visais $\omega \in \Omega$, tai sakysime, jog atsitiktinių dydžių seka ξ_n tolygiai konverguoja į atsitiktinį dydį ξ.*

Jei ξ yra atsitiktinis dydis, tai nesunku sudaryti diskrečių atsitiktinių dydžių seką tolygiai konverguojančią į ξ. Išties fiksuotam $\epsilon > 0$ apibrėžę diskretų atsitiktinį dydį ξ^ϵ,

$$\xi^\epsilon(\omega) = n\epsilon, \quad \text{jei} \quad \xi(\omega) \in [n\epsilon, n\epsilon + \epsilon), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

turėsime

$$\xi(\omega) - \epsilon \leq \xi^\epsilon(\omega) \leq \xi(\omega), \quad |\xi^\epsilon(\omega) - \xi(\omega)| \leq \epsilon.$$

Atsitiktinis dydis ξ^ϵ – tai tarsi „ištiesintas“ atsitiktinis dydis ξ.

Parinkę teigiamų skaičių seką $\epsilon_n \to 0$, gausime diskrečiųjų atsitiktinių dydžių seką $\xi_n = \xi^{\epsilon_n}$, tolygiai konverguojančią į ξ.

Jeigu diskrečių atsitiktinių dydžių seka ξ_n tolygiai konverguoja į ξ, tai duotam $\delta > 0$ egzistuoja n_δ, kad

$$|\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| < \delta, \quad \text{kai } \omega \in \Omega, \quad n, m \geq n_\delta.$$

Iš tikrųjų:

$$|\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| \leq |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| + |\xi_m(\omega) - \xi(\omega)| \leq \delta/2 + \delta/2 = \delta,$$

kai $n, m \geq n_\delta$.

Jeigu visi vidurkiai $\mathbf{E}[\xi_n]$ egzistuoja, tai

$$|\mathbf{E}[\xi_n] - \mathbf{E}[\xi_m]| < \mathbf{E}[|\xi_n - \xi_m|] < \delta, \ text\text{kai } n, m \geq n_\delta.$$

Tai savo ruožtu reiškia, jog seka $\mathbf{E}[\xi_n]$ tenkina Koši konvergavimo kriterijų ir todėl turi konverguoti. Jeigu ξ'_n yra kita tolygiai į ξ konverguojančių diskrečiųjų atsitiktinių dydžių seka, tai

$$|\xi'_n - \xi_n| \leq |\xi'_n - \xi| + |\xi_n - \xi| \leq \epsilon \quad (n \geq n_\epsilon).$$

Taigi $\mathbf{E}[|\xi'_n - \xi_n|] \leq \epsilon$. Tada

$$|\xi'_n| \leq |\xi_n| + |\xi'_n - \xi_n|$$

ir vidurkiai $\mathbf{E}[|\xi'_n|]$, o taip pat ir $\mathbf{E}[\xi'_n]$ $(n \geq n_\epsilon)$ egzistuoja. Tačiau

$$|\mathbf{E}[\xi_n] - \mathbf{E}[\xi'_n]| < \mathbf{E}[|\xi_n - \xi'_n|] < \epsilon,$$

kai $n \geq n_\epsilon$. Todėl turi būti $\mathbf{E}[\xi_n] - \mathbf{E}[\xi'_n] \to 0$. Taigi sekos $\mathbf{E}[\xi_n]$ riba nepriklauso nuo to, kokią tolygiai konverguojančią į ξ diskrečiųjų atsitiktinių dydžių seką ξ_n pasirenkame. Šiais samprotavimais „paruošėme dirvą“ tokiam apibrėžimui.

32 apibrėžimas. *Tegu ξ atsitiktinis dydis, o ξ_n diskrečiųjų atsitiktinių dydžių seka, tolygiai konverguojanti į ξ. Jei visi ξ_n turi vidurkius, tai atsitiktinio dydžio ξ vidurkiu vadinsime ribą*

$$\mathbf{E}[\xi] = \lim_{n \to \infty} \mathbf{E}[\xi_n].$$

Jeigu atsitiktinio dydžio ξ vidurkis egzistuoja, tai

$$\mathbf{E}[\xi] = \lim_{\epsilon \to 0} \mathbf{E}[\xi^\epsilon] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\epsilon k) \cdot P(\xi \in [\epsilon k, \epsilon k + \epsilon)) = \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \epsilon k [F_\xi(\epsilon k + \epsilon) - F_\xi(\epsilon k)]. \tag{33}$$

Paskutinioji suma primena apibrėžtinio integralo dalines sumas. Tai bent iš dalies paaiškina tokį matematinio vidurkio užrašymą:[16]

[16] Tai vidurkio reiškimas Rymano-Styltjeso integralu; žr. J. Kubilius, Tikimybių teorija ir matematinė statistika, Vilnius, Mokslas,1980, p. 146-149.

$$\mathbf{E}[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x).$$

Panagrinėkime, kaip (33) išraiška atrodo tuo atveju, kai ξ yra absoliučiai tolydus atsitiktinis dydis, turintis tankį $p(u)$. Vengdami tam tikrų techninių detalių, tarkime, jog tankis yra tolydus. Tada iš vidurinių reikšmių teoremos gausime

$$F(\epsilon k + \epsilon) - F(\epsilon k) = \int_{\epsilon k}^{\epsilon k + \epsilon} p(u) du = p(\epsilon k + \theta_k \epsilon)\epsilon, \quad 0 \leq \theta_k \leq 1.$$

Tada

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \epsilon k[F(\epsilon k+\epsilon)-F(\epsilon k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\epsilon k+\theta_k\epsilon)p(\epsilon k+\theta_k\epsilon)\epsilon - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta_k p(\epsilon k+\theta_k\epsilon)\epsilon^2. \tag{34}$$

Jeigu integralas

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u| p(u) du$$

yra baigtinis, tai imant ribą, kai $\epsilon \to 0$, antroji suma (**??**) lygybėje nyksta, o pirmoji konverguoja į $\mathbf{E}[\xi]$, kurį galime reikšti integralu su begaliniais rėžiais:

$$\mathbf{E}[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} u p(u) du.$$

Suformuluosime bendresnį teiginį apie vidurkio reiškimą integralu.

45 teorema. *Tegu ξ yra atsitiktinis dydis, turintis tankį $p(u)$, ϕ – Borelio funkcija, $\eta = \phi(\xi)$. Atsitiktinis dydis η turi vidurkį tada ir tik tada, kai integralas*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(u)| p(u) du$$

yra baigtinis. Tada

$$\mathbf{E}[\eta] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) p(u) du.$$

Nesunku suformuluoti analogišką teiginį diskrečiajam atsitiktiniam dydžiui.

Atsitiktiniams absoliučiai tolydiems vektoriams teisingas toks teiginys.

46 teorema. *Tegu $\xi = \langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \rangle$ yra absoliučiai tolydus atsitiktinis dydis $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – tokia Borelio funkcija, kad integralas*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |f(u_1, \ldots, u_n)| p_\xi(u_1, \ldots, u_n) du_1 \ldots du_n$$

yra baigtinis. Tada atsitiktinis dydis $\eta = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ turi matematinį vidurkį ir

$$\mathbf{E}[\eta] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, \ldots, u_n) p_\xi(u_1, \ldots, u_n) du_1 \ldots du_n.$$

33 pavyzdys. Atstumas iki centro Tarkime, vienetiniame skritulyje S atsitiktinai parenkamas taškas $A(\xi_1, \xi_2)$. Koordinačių vektorius $\xi = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ yra tolygiai pasiskirstęs vienetiniame skritulyje S, t. y. turi tankį

$$p_\xi(u_1, u_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{jei } \langle u_1, u_2 \rangle \in S \\ 0, & \text{jei } \langle u_1, u_2 \rangle \notin S. \end{cases}$$

Raskime taško A nuotolio iki skritulio centro matematinį vidurkį. Šis atstumas yra atsitiktinis dydis

$$\eta = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2},$$

taigi

$$\mathbf{E}[\eta] = \frac{1}{\pi} \int_S \sqrt{u_1^2 + u_2^2} du_1 du_2.$$

Pereidami prie polinių koordinačių $u_1 = \rho \cos \phi, u_2 = \rho \sin \phi$ gauname

$$\mathbf{E}[\eta] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\phi = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\pi = \frac{2}{3}.$$

Dabar jau turime atsitiktinio dydžio vidurkio apibrėžimą pačiu bendriausiu atveju. Tos vidurkio savybės, kurias įrodėme diskretiesiems atsitiktiniams dydžiams teisingos ir bendruoju atveju. Tačiau tai reikia įrodyti! Iš pradžių įrodysime vieną paprastą, bet naudingą teiginį.

47 teorema. *Tegu ξ, η yra du atsitiktiniai dydžiai. Jei $|\xi| \leq \eta$ ir atsitiktinio dydžio η vidurkis egzistuoja, tai ξ vidurkis irgi egzistuoja.*
Jei $P(\xi \neq \eta) = 0$, ir $\mathbf{E}[\eta]$ egzistuoja, tai $\mathbf{E}[\xi]$ irgi egzistuoja, ir $\mathbf{E}[\xi] = \mathbf{E}[\eta]$.

Įrodymas. Įrodysime pirmąjį teiginį. Jis yra teisingas, kai ξ ir η yra diskretieji atsitiktiniai dydžiai. Tai buvo prabėgomis paminėta anksčiau, įrodyti nesunku, pasirėmus vien diskrečiųjų atsitiktinių dydžių vidurkių apibrėžimu.

Bendruoju atveju pakanka įrodyti, kad visų atsitiktinių dydžių $|\xi|^\epsilon$ $(\epsilon > 0)$ vidurkiai egzistuoja. Tada prisiminę bendrąjį atsitiktinių dydžių vidurkio apibrėžimą, galėsime padaryti išvadą, kad $\mathbf{E}[\xi]$ irgi egzistuoja.

Prisiminkime, kad bet kokiam atsitiktiniam dydžiui ζ ir „ištiesintam“ dydžiui ζ^ϵ teisinga nelygybė $\zeta^\epsilon \leq \zeta \leq \zeta^\epsilon + \epsilon$. Pasinaudoję šia nelygybe dydžiams

ξ, η gausime $|\xi|^\epsilon \leq |\xi| \leq \mathbf{E}[\eta] \leq \eta^\epsilon + \epsilon$. Kadangi diskrečiojo atsitiktinio dydžio $\eta^\epsilon + \epsilon$ vidurkis egzistuoja, tai egzistuoja ir dydžio $|\xi|^\epsilon$ vidurkis.

Įrodykime antrąjį teiginį. Jei $P(\xi \neq \eta) = 0$, tai $P(\xi \in [n\epsilon, n\epsilon + \epsilon)) = P(\eta \in [n\epsilon, n\epsilon + \epsilon)$ ir $\mathbf{E}[\eta^\epsilon] = \mathbf{E}[\xi^\epsilon]$. Taigi $\mathbf{E}[\eta] = \mathbf{E}[\xi]$.

Įrodysime vidurkio savybes, kurias jau įrodėme diskretiesiems atsitiktiniams dydžiams.

48 teorema. *Tegu ξ, ξ_1, ξ_2 yra atsitiktiniai dydžiai, kurių matematiniai vidurkiai egzistuoja. Teisingi tokie teiginiai:*

1. *su bet kokiomis konstantomis c_1, c_2 dydžio $c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ matematinis vidurkis taip pat egzistuoja ir*
$$\mathbf{E}[c_1\xi_1 + c_2\xi_2] = c_1\mathbf{E}[\xi_1] + c_2\mathbf{E}[\xi_2];$$

2. *jei $\xi_1 \leq \xi_2$, tai $\mathbf{E}[\xi_1] \leq \mathbf{E}[\xi_2]$;*

3. $|\mathbf{E}[\xi]| \leq \mathbf{E}[|\xi|]$;

4. $\mathbf{E}[|\xi| I_{\{\xi > a\}}] \to 0, \quad a \to \infty$;

5. *jei ξ_1, ξ_2 yra nepriklausomi, tai atsitiktinio dydžio $\xi_1 \cdot \xi_2$ vidurkis egzistuoja, ir*
$$\mathbf{E}[\xi_1 \cdot \xi_2] = \mathbf{E}[\xi_1] \cdot \mathbf{E}[\xi_2.]$$

Įrodymas. 1 – 3 teiginius galime įrodyti šitaip: sudarykime diskrečiuosius atsitiktinius dydžius $\xi^\epsilon, \xi_1^\epsilon, \xi_2^\epsilon$, užrašykime jiems reikiamus sąryšius bei imkime $\epsilon \to 0$. Riboje gausime sąryšius, suformuluotus dydžiams ξ, ξ_1, ξ_2.

4. Iš $|\xi| \leq |\xi|^\epsilon + \epsilon$ išplaukia

$$|\xi| I_{\{|\xi| > a\}} \leq |\xi|^\epsilon I_{\{|\xi| > a\}} + \epsilon \leq |\xi|^\epsilon I_{\{|\xi|^\epsilon > a - \epsilon\}} + \epsilon.$$

Taigi
$$\mathbf{E}[|\xi| I_{\{|\xi| > a\}}] \leq \mathbf{E}[|\xi|^\epsilon I_{\{|\xi|^\epsilon > a - \epsilon\}}] + \epsilon.$$

Dabar pasiremkime teoremos apie diskrečiųjų atsitiktinių dydžių teiginiu, kuriame tvirtinama, kad diskrečiųjų atsitiktinių dydžių „uodegų“ vidurkiai nyksta.

5. Kadangi $|\xi_1\xi_2| \leq (|\xi_1|^\epsilon + \epsilon)(|\xi_2|^\epsilon + \epsilon)$, o dešinėje nelygybės pusėje užrašyto atsitiktinio dydžio matematinis vidurkis egzistuoja, tai $\xi_1\xi_2$ vidurkis egzistuoja taip pat (žr. anksčiau įrodytą teoremą). Turime

$$|\xi_1\xi_2 - \xi_1^\epsilon\xi_2^\epsilon| \leq |\xi_1\xi_2 - \xi_1^\epsilon\xi_2^\epsilon|\xi_1\xi_2^\epsilon - \xi_1^\epsilon\xi_2^\epsilon + \xi_1\xi_2 - \xi_1\xi_2^\epsilon| \leq |\xi_1 - \xi_1^\epsilon||\xi_2^\epsilon| + |\xi_2 - \xi_2^\epsilon||\xi_1|.$$

Iš šios nelygybės išplaukia, kad

$$|\mathbf{E}[\xi_1\xi_2] - \mathbf{E}[\xi_1^\epsilon \xi_2^\epsilon]| \le \epsilon(\mathbf{E}[|\xi_1|] + \mathbf{E}[|\xi_2^\epsilon|]).$$

Tačiau atsitiktiniai dydžiai $\xi_1^\epsilon, \xi_2^\epsilon$ yra diskretūs ir nepriklausomi, todėl jų sandaugos vidurkis lygus vidurkių sandaugai, taigi

$$\mathbf{E}[\xi_1\xi_2] = \lim_{\epsilon\to 0} \mathbf{E}[\xi_1^\epsilon \xi_2^\epsilon] = \lim_{\epsilon\to 0} \mathbf{E}[\xi_1^\epsilon] \cdot \mathbf{E}[\xi_2^\epsilon] = \mathbf{E}[\xi_1]\mathbf{E}[\xi_2].$$

Teiginys įrodytas.

Atsitiktinio dydžio nebūtinai egzistuoja. Štai vienas paprastas pavyzdys.

34 pavyzdys. Sankt-Peterburgo paradoksas.

Bankas nutarė paskelbti tokią loteriją: dalyvis sumoka bankui dalyvio mokestį x ir mėto monetą tol, kol pasirodo pirmas herbas. Jeigu tai įvyksta r-ajame metime, dalyvis gauna iš banko sumą 2^r. Koks turi būti dalyvio įnašas x, kad bankui ši loterija nebūtų nuostolinga?

Kadangi dalyvio išlošis ξ yra atsitiktinis dydis, natūralu pareikalauti, kad $\mathbf{E}[\xi] \ge x$. Tačiau $P(\xi = 2^r) = 2^{-r}$, todėl

$$\mathbf{E}[\xi] = \sum_{r=1}^{\infty} 2^r 2^{-r} = +\infty,$$

Su bet kokiu pradiniu įnašu lošimas negali būti naudingas bankui.

D. Bernulio straipsnį su šiuo paradoksu paskelbė Sankt-Peterburgo mokslų akademija XVIII-ame amžiuje.

Paradoksalu šioje situacijoje tikriausiai ne tai, kad vidurkis neegzistuoja, bet tai, kad iš tikrųjų paskelbus tokį lošimą su, pavyzdžiui, 5000 litų pradiniu įnašu ir reklaminiame plakate išdėsčius matematinį įrodymą, kad lošimas nėra bankui naudingas, tikriausiai nedaug atsirastų žmonių, kurie panorėtų šiame lošime dalyvauti.

2.7. Atsitiktinio dydžio dispersija ir kiti momentai

Tą patį vidurkį gali turėti labai skirtingi atsitiktiniai dydžiai. Tegu, pavyzdžiui, $\xi_k,\ k = 0, 1, \ldots$ – atsitiktiniai dydžiai, įgyjantys po dvi reikšmes:

$$P(\xi_k = \pm k) = \frac{1}{2}.$$

Visų dydžių vidurkiai vienodi ($\mathbf{E}[\xi_k] = 0$) tačiau patys dydžiai labai skiriasi: kuo didesnis k, tuo labiau išsibarstę atsitiktinio dydžio ξ_k reikšmės.

Vienos atsitiktinio dydžio skaitinės charakteristikos – vidurkio dažniausiai nepakanka dydžio savybėms apibūdinti.

33 apibrėžimas. *Tegu ξ atsitiktinis dydis, $k \geq 0$. Jeigu vidurkiai $\mathbf{E}[\xi^k], \mathbf{E}[|\xi|^k]$ egzistuoja, tai juos vadinsime atsitiktinio dydžio ξ k-uoju ir k-uoju absoliučiuoju momentais.*

Diskretaus atsitiktinio dydžio k-tasis momentas reiškiamas eilute

$$\mathbf{E}[\xi^k] = \sum_x x^k P(\xi = x),$$

o absoliučiai tolydaus – integralu

$$\mathbf{E}[\xi^k] = \int_{-\infty}^{\infty} u^k p(u) du.$$

Iš elementarios nelygybės

$$|\xi|^r \leq 1 + |\xi|^k, \quad 0 \leq r \leq k,$$

įrodytos vidurkių savybės gauname, jog iš $\mathbf{E}[|\xi|^k]$ egzistavimo išplaukia $\mathbf{E}[|\xi|^r]$ egzistavimas. Jeigu $\mathbf{E}[|\xi|^k]$ egzistuoja, tai su bet kokiu skaičiumi a vidurkis $\mathbf{E}[|\xi - a|^k]$ taip pat egzistuoja. Tuo galime įsitikinti pasirėmę akivaizdžia nelygybe $|\xi - a|^k \leq (|\xi| + |a|)^k$. Pakėlę nelygybės dešinės pusės reiškinį laipsniu gausime sumą, kurios dėmenys – iš skaitinių koeficientų padauginti dydžiai $|\xi|^r$ $(r \leq k)$. Kadangi visų šių dydžių vidurkiai egzistuoja, tai egzistuoja ir $\mathbf{E}[(|\xi| + |a|)^k]$. Tada egzistuoja ir $\mathbf{E}[|\xi - a|^k]$.

34 apibrėžimas. *Tegu ξ atsitiktinio dydžio k-asis momentas $\mathbf{E}[|\xi|^k]$ egzistuoja $(k \geq 1)$. Skaičius $\mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}[\xi])^k], \mathbf{E}[|\xi - \mathbf{E}[\xi]|^k]$ vadinsime atitinkamai ξ k-uoju centriniu, k-uoju centriniu absoliučiuoju momentais. Antrąjį centrinį momentą vadinsime dispersija. Dispersiją žymėsime*

$$\mathbf{D}[\xi] = \mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}[\xi])^2].$$

Antrasis centrinis atsitiktinio dydžio momentas arba tiesiog dispersija yra atsitiktinio dydžio reikšmių išsibarstymo matas. Įrodysime keletą dispersijos savybių.

49 teorema. *Tegu ξ, ξ_1, ξ_2 yra atsitiktiniai dydžiai, turintys antruosius momentus. Teisingi tokie teiginiai:*

1. $\mathbf{D}[\xi] = \mathbf{E}[\xi^2] - (\mathbf{E}[\xi])^2$;

2. $\mathbf{D}[\xi] = \inf_a \mathbf{E}[(\xi - a)^2]$;

3. $\mathbf{D}[c\xi] = c^2 \mathbf{D}[\xi]$;

4. jei ξ_1, ξ_2 yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, tai

$$\mathbf{D}[\xi_1 + \xi_2] = \mathbf{D}[\xi_1] + \mathbf{D}[\xi_2].$$

5. $\mathbf{D}[\xi] = 0$ tada ir tik tada, kai $P(\xi = \mathbf{E}[\xi]) = 1$.

Įrodymas. 1. Paėmę abiejų lygybės

$$(\xi - \mathbf{E}[\xi])^2 = \xi^2 - 2\xi \cdot \mathbf{E}[\xi] + (\mathbf{E}[\xi])^2$$

pusių vidurkius, gauname

$$\mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}[\xi])^2] = \mathbf{E}[\xi^2] - 2\mathbf{E}[\xi] \cdot \mathbf{E}[\xi] + \mathbf{E}[(\mathbf{E}[\xi])^2].$$

Pertvarkę šios lygybės dešinę pusę, gausime teoremos tvirtinimą.

2. Visai paprastoje lygybėje

$$(\xi - a)^2 = (\xi - \mathbf{E}[\xi] + \mathbf{E}[\xi] - a)^2 = (\xi - \mathbf{E}[\xi])^2 + 2(\xi - \mathbf{E}[\xi])(\mathbf{E}[\xi] - a) + (\mathbf{E}[\xi] - a)^2$$

pereikime prie vidurkių. Gausime

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[(\xi - a)^2] &= \mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}[\xi])^2] + 2(\mathbf{E}[\xi] - \mathbf{E}[\xi])(\mathbf{E}[\xi] - a) + (\mathbf{E}[\xi] - a)^2 \\
&= \mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}[\xi])^2] + (\mathbf{E}[\xi] - a)^2.
\end{aligned}$$

Akivaizdu, kad dydžio $\mathbf{E}[(\xi - a)^2]$ reikšmė mažiausia, kai $a = \mathbf{E}[\xi]$. Tačiau ši mažiausioji reikšmė ir yra dispersija.

3. Lygybę gausime iš 1) lygybės, įstatę į ją vietoje ξ atsitiktinį dydį $c\xi$ ir pasinaudoję vidurkio savybėmis.

4. Kadangi $\mathbf{E}[\xi_1 + \xi_2] = \mathbf{E}[\xi_1] + \mathbf{E}[\xi_2]$, o

$$\mathbf{E}[(\xi_1 + \xi_2)^2] = \mathbf{E}[\xi_1^2] + 2\mathbf{E}[\xi_1\xi_2] + \mathbf{E}[\xi_2^2] = \mathbf{E}[\xi_1^2] + 2\mathbf{E}[\xi_1] \cdot \mathbf{E}[\xi_2] + \mathbf{E}[\xi_2^2],$$

tai įstatę šias lygybes į 1) dalyje įrodytą formulę ir sutvarkę išraiškas gausime norimą lygybę.

5. Pakankamumas yra trivialus. Įrodinėsime būtinumą.

Tegu $\mathbf{D}[\xi] = \mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}[\xi])^2] = 0$. Jeigu būtų $P(\xi = \mathbf{E}[\xi]) < 1$, tai egzistuotų $\delta > 0$, kad $P(|\xi - \mathbf{E}[\xi]| > \delta) > 0$. Imkime $A = \{\omega : |\xi(\omega) - \mathbf{E}[\xi]| > \delta\}$ ir apibrėžkime $\eta = I_A$. Tada $\mathbf{E}[\eta^2] > 0$ ir $|\xi - \mathbf{E}[\xi]| > \delta\eta$. Todėl turėtų būti

$$\mathbf{D}[\xi] = \mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}[\xi])^2] > \delta^2\mathbf{E}[\eta^2] > 0.$$

Gavome prieštaravimą. Teiginys įrodytas.

Ketvirtoji – dispersijos adityvumo – savybė teisinga ne vien tik porai nepriklausomų atsitiktinių dydžių.

Išvada. *Jei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas, tai jų suma irgi turi dispersiją*

$$\mathbf{D}[\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n] = \mathbf{D}[\xi_1] + \mathbf{D}[\xi_2] + \ldots + \mathbf{D}[\xi_n].$$

50 teorema. *Tegu atsitiktinis dydis η įgyja tik neneigiamas reikšmes ir turi vidurkį. Tada bet kokiam $\delta > 0$ teisinga nelygybė*

$$P(\eta \geq \delta) \leq \frac{\mathbf{E}[\eta]}{\delta}.$$

Įrodymas. Pažymėkime $A = \{\omega : \eta(\omega) \geq \delta\}$. Nesunku įsitikinti, kad teisinga nelygybė

$$\delta \cdot I_A(\omega) \leq \eta.$$

Imdami abiejų nelygybės pusių vidurkius gausime

$$\mathbf{E}[\delta \cdot I_A(\omega)] \leq \mathbf{E}[\eta], \quad \delta P(A) \leq \mathbf{E}[\eta], \quad P(A) \leq \frac{\mathbf{E}[\eta]}{\delta}.$$

Pasinaudoję šiuo teiginiu įrodysime vieną dažnai naudojamą tikimybių teorijoje nelygybę. Ji dažniausiai vadinama Čebyšovo nelygybe.

51 teorema. *Tegu ξ yra atsitiktinis dydis turintis dispersiją. Tada bet kokiam $\epsilon > 0$ teisinga nelygybė*

$$P(|\xi - \mathbf{E}[\xi]| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbf{D}[\xi]}{\epsilon^2}.$$

Įrodymas. Akivaizdu, kad

$$P(|\xi - \mathbf{E}[\xi]| > \epsilon) = P(|\xi - \mathbf{E}[\xi]|^2 > \epsilon^2).$$

Įrodymą užbaigsime pasinaudoję anksčiau įrodyta teoremą, kurioje reikia imti $\eta = (\xi - \mathbf{E}[\xi])^2, \delta = \epsilon^2$.

Dabar jau galime suformuluoti ir įrodyti vieną paprastą ribinę teoremą – atskirą **didžiųjų skaičių dėsnio** atvejį.

52 teorema. *Tegu $\xi_1, \xi_2, \ldots$ nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys antruosius momentus, bei tenkinantys sąlygą*

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}[\xi_k] \to 0, \quad n \to \infty.$$

Tegu $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, E_n = (\mathbf{E}[\xi_1] + \ldots + \mathbf{E}[\xi_n])/n$. Tada bet kokiam $\epsilon > 0$

$$P(|n^{-1}S_n - E_n| \geq \epsilon) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Įrodymas. Pasinaudokime Čebyšovo nelygybe, imdami $\xi = n^{-1}S_n$. Gausime

$$P(|n^{-1}S_n - E_n| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbf{D}[(n^{-1}S_n]}{\epsilon^2.}$$

Dabar pasinaudokime dispersijos savybėmis (konstantos iškėlimo ir adityvumo):

$$\mathbf{D}[n^{-1}S_n] = n^{-2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}[\xi_k] \to 0, \quad n \to \infty.$$

Išvada. *Jei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkį a ir antruosius momentus, tai bet kokiam $\epsilon > 0$*

$$P\Big(\Big|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - a\Big| > \epsilon\Big) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Didžiųjų skaičių dėsnis matematine forma išreiškia mūsų gyvenimišką patirtį. Pavyzdžiui, gerai žinome, kad metus simetrišką monetą didelį skaičių N kartų, herbas tikriausiai pasirodys maždaug $0{,}5N$ kartų.

Jeigu atsitiktinių dydžių ξ_1 ir ξ_2 momentai $\mathbf{E}[\xi_1^2], \mathbf{E}[\xi_2^2]$ egzistuoja, tai $\mathbf{E}[|\xi_1\xi_2|]$ taip pat egzistuoja. Įrodydami pasiremkite akivaizdžia nelygybe

$$2|\xi_1\xi_2| \leq \xi_1^2 + \xi_2^2$$

ir vidurkio savybėmis.

Jei momentai $\mathbf{E}[\xi_1^2], \mathbf{E}[\xi_2^2]$ yra baigtiniai, tai lygybe

$$f(\lambda) = \mathbf{E}[(\lambda\xi_1 + \xi_2)^2] = \lambda^2\mathbf{E}[\xi_1^2] + 2\mathbf{E}[\xi_1 \cdot \xi_2]\lambda + \mathbf{E}[\xi_2^2]$$

yra korektiškai apibrėžtas antro laipsnio daugianaris, įgyjantis vien neneigiamas reikšmes (λ šio daugianario kintamasis). Tokio daugianario diskriminantas turi būti neteigiamas. Užrašę jį, gausime naudingą nelygybę, ją suformuluosime teoremoje.

53 teorema. *Tegu atsitiktinių dydžių ξ_1, ξ_2 antrieji momentai egzistuoja. Tada $\mathbf{E}[|\xi_1\xi_2|]$ yra taip pat egzistuoja, bei*

$$\mathbf{E}[|\xi_1\xi_2|] \leq (\mathbf{E}[\xi_1])^{1/2}(\mathbf{E}[\xi_2])^{1/2}.$$

Iš šios teoremos gauname, kad atsitiktiniams dydžiams ξ_1, ξ_2, turintiems baigtinius antruosius momentus, dydis $\mathbf{E}[(\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1])(\xi_2 - \mathbf{E}[\xi_2])]$ taip pat apibrėžtas.

35 apibrėžimas. *Tegu atsitiktinių dydžių ξ_1, ξ_2 antrieji momentai egzistuoja. Dydį*

$$\mathrm{cov}\ (\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}[(\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1])(\xi_2 - \mathbf{E}[\xi_2])]$$

vadinsime dydžių ξ_1, ξ_2 kovariacija, o dydį

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{\mathrm{cov}\ (\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{\mathbf{D}[\xi_1] \cdot \mathbf{D}[\xi_2]}}$$

kai vardiklis nelygus nuliui – koreliacijos koeficientu.

Nesunku įsitikinti, kad kovariaciją galime skaičiuoti taip:

$$\mathrm{cov}\ (\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}[\xi_1 \xi_2] - \mathbf{E}[\xi_1] \cdot \mathbf{E}[\xi_2].$$

Įrodysime kelias koreliacijos koeficiento savybes.

54 teorema. *Tegu ξ_1, ξ_2 yra atsitiktiniai dydžiai, turintys baigtines ir nenulines dispersijas. Teisingi tokie teiginiai:*

1. $|\rho(\xi_1, \xi_2)| \leq 1$;
2. $\rho(\xi_1, \xi_2) = 0$ *tada ir tik tada, kai* $\mathbf{D}[\xi_1 + \xi_2] = \mathbf{D}[\xi_1] + \mathbf{D}[\xi_2]$.
3. *Lygybė* $|\rho(\xi_1, \xi_2)| = 1$ *teisinga tada ir tik tada, kai egzistuoja konstantos* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, *ne visos lygios nuliui, kad*

$$P(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 = \lambda_3) = 1.$$

Įrodymas. 1. Išplaukia iš koreliacijos koeficiento apibrėžimo ir įrodytos nelygybės momentams.

2. Užrašykime tapatybę

$$(\xi_1 + \xi_2 - \mathbf{E}[\xi_1] - \mathbf{E}[\xi_2])^2 = (\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1])^2 + 2(\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1])(\xi_2 - \mathbf{E}[\xi_2]) + (\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1])^2.$$

Imdami abiejų pusių vidurkius gausime

$$\mathbf{D}[\xi_1 + \xi_2] = \mathbf{D}[\xi_1] + 2\rho(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{D}[\xi_2].$$

Iš šios lygybės ir gauname 2) teiginį.

3. Tegu

$$P(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 = \lambda_3) = 1,$$

ir $\lambda_1 \neq 0$. Tada $P(\xi_1 = a\xi_2 + b) = 1$,

$$\mathbf{D}[\xi_1] = a^2 \mathbf{D}[\xi_2], \quad \xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1] = a(\xi_2 - \mathbf{E}[\xi_2]), \quad \mathrm{cov}\ (\xi_1, \xi_2) = a\mathbf{D}[\xi_2].$$

Tada

$$\rho(\xi_1,\xi_2)=\frac{\text{cov }(\xi_1,\xi_2)}{(\mathbf{D}[\xi_1]\mathbf{D}[\xi_2])^{1/2}}=\frac{a}{|a|}=\text{sgn}a.$$

Tegu dabar $\rho(\xi_1,\xi_2)=1$. Apibrėžkime atsitiktinį dydį

$$\eta=\Big(\frac{\xi_1-\mathbf{E}[\xi_1]}{\sqrt{\mathbf{D}[\xi_1]}}-\frac{\xi_2-\mathbf{E}[\xi_2]}{\sqrt{\mathbf{D}[\xi_2]}}\Big)^2\geq 0.$$

Nesunku patikrinti, kad $\mathbf{E}[\eta]=0$. Bet tada turi būti

$$P\Big(\frac{\xi_1-\mathbf{E}[\xi_1]}{\sqrt{\mathbf{D}[\xi_1]}}-\frac{\xi_2-\mathbf{E}[\xi_2]}{\sqrt{\mathbf{D}[\xi_2]}}=0\Big)=1.$$

Analogiškai ištirtume atvejį $\rho(\xi_1,\xi_2)=-1$. Taigi su tam tikromis konstantomis $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ gauname, kad $P(\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2=\lambda_3)=1$.

2.8. Atsitiktinių dydžių konvergavimo rūšys

Pradėsime nagrinėti atsitiktinių dydžių sekų $\{\xi_n\}$ konvergavimą. Naudojamos įvairios konvergavimo rūšys, apibrėšime svarbiausias.

Tegu $\{\xi_n\}$ yra atsitiktinių dydžių seka. Elementariųjų įvykių poaibis

$$A=\{\omega:\text{egzistuoja baigtinė riba}\lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega)\}$$

yra atsitiktinis įvykis, o

$$\xi(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n(\omega), & \text{jei}\ \ \omega\in A,\\ 0, & \text{jei}\ \ \omega\notin A,\end{cases}$$

yra atsitiktinis dydis. Jei $P(A)=1$, tai atsitiktiniai dydžiai ξ_n „beveik visur“ konverguoja į atsitiktinį dydį ξ.

36 apibrėžimas. *Tegu $\xi,\xi_n:\Omega\to I\!R$ yra atsitiktiniai dydžiai, $n=1,2,\ldots$. Sakysime, jog atsitiktinių dydžių seka ξ_n konverguoja į atsitiktinį dydį ξ su tikimybe 1, jei*

$$P(\omega:\xi_n(\omega)\to\xi(\omega),n\to\infty)=1.$$

Žymėsime: $\xi_n\xrightarrow{1}\xi,\ n\to\infty$.

Jei $\xi_n\xrightarrow{1}\xi$ $(n\to\infty)$ ir $P(\omega:\xi'(\omega)=\xi(\omega))=1$, tai $\xi_n\xrightarrow{1}\xi'$ $(n\to\infty)$. Todėl riba nėra apibrėžta vienareikšmiškai. Tačiau ribiniai dydžiai skiriasi tik „mažoje“ (nulinės tikimybės) aibėje.

35 pavyzdys. Tegu $\Omega = [0;1]$, $\mathcal{A}$ – aibės Ω Borelio poaibių sistema, $P(A)$ – geometrinis ilgis. Tegu $\xi_n(\omega) = \frac{1}{n}, \xi(\omega) = 0$,

$$\xi^{(1)}(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{jei } \omega \neq \frac{1}{2}, \\ 1, & \omega = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \xi^{(2)}(\omega) = \begin{cases} 0, & jei\omega \text{ yra iracionalusis skaičius,} \\ 1, & \text{jei } \omega \text{ – racionalusis skaičius.} \end{cases}$$

Tada atsitiktinių dydžių seka ξ_n konverguoja su tikimybe 1 ir į ξ, ir į $\xi^{(1)}$, ir į $\xi^{(2)}$.

55 teorema. *Atsitiktinių dydžių seka ξ_n konverguoja į atsitiktinį dydį ξ su tikimybe 1 tada ir tik tada, kai su bet kokiu $\epsilon > 0$*

$$P(\omega : \sup_{n \geq m} |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \epsilon) \to 0, \quad m \to \infty. \tag{35}$$

Įrodymas. Pakanka teoremą įrodyti, kai $\epsilon = 1/r$; čia r yra natūralusis skaičius. Apibrėžkime įvykius

$$B_{rm} = \{\omega : \sup_{n \geq m} |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > 1/r\}, \quad B_r = \cap_m B_{rm}.$$

Nesunku įsitikinti, kad

$$B = \{\omega : \xi_n(\omega) \text{ nekonverguoja } \} = \cup_r B_r.$$

Teorema tvirtina, kad $P(B) = 0$ tada ir tik tada, kai $P(B_{rm}) \to 0, m \to \infty$. Kadangi įvykiai B_r yra didėjantys, tai $P(B) = \lim_r P(B_r)$, ir lygybė $P(B) = 0$ teisinga tada ir tik tada, kai $P(B_r) = 0$. Tačiau $P(B_r) = \lim_m P(B_{rm})$. Taigi $P(B) = 0$ teisinga tada ir tik tada, kai kiekvienam r tikimybės $P(B_{rm})$, kai $m \to \infty$, artėja prie nulio. Tačiau kaip tik tai ir tvirtina mūsų teorema.

Tuo ir baigiasi teoremos įrodymas.

Su (35) sąlyga galėtume kitaip apibrėžti konvergavimo su tikimybe 1 sąvoką. Susilpninę šią sąlygą gausime kitą konvergavimo rūšį.

37 apibrėžimas. *Tegu $\xi, \xi_n : \Omega \to I\!R$ yra atsitiktiniai dydžiai, $n = 1, 2, \ldots$. Sakysime, jog atsitiktinių dydžių seka ξ_n konverguoja pagal tikimybę į atsitiktinį dydį ξ , jei kiekvienam $\epsilon > 0$*

$$P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \epsilon) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Žymėsime: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi, \ n \to \infty$.

Iš apibrėžimo bei įrodytos teoremos iškart išplaukia, kad kiekviena atsitiktinių dydžių seka, konverguojanti su tikimybe 1, konverguoja ir pagal tikimybę. Tačiau atvirkštinis teiginys nėra teisingas.

36 pavyzdys.

Vienetinę atkarpą $[0;1]$ „surieskime“ į apskritimą A . Tada intervalai pavirs apskritimo lankais. Nagrinėkime tikimybinę erdvę $\Omega = A$, $\mathcal{A}$ – σ-algebra, generuota A lankų aibės, $P : \mathcal{A} \to [0;1]$ – tikimybinis matas, priskiriantis lankams jų ilgius. Atidėkime ant apskritimo taškus $A_1, A_2, \ldots$ rikiuodami juos prieš laikrodžio rodyklę taip, kad lanko A_1A_2 ilgis būtų lygus $\frac{1}{2}$, lanko A_2A_3 – $\frac{1}{3}$, ... , lanko $A_{n-1}A_n$ – $\frac{1}{n}$.

Nagrinėkime atsitiktinius dydžius $\xi_n(\omega) = I_{(A_{n-1},A_n)}(\omega)$. Akivaizdu, kad $P(\xi_n = 1) = \frac{1}{n}$. Kadangi eilutė

$$\sum_n \frac{1}{n}$$

diverguoja, tai lankai $A_{n-1}A_n$ be galo daug kartų padengia apskritimą, taigi kiekvienas apskritimo taškas priklauso be galo daugeliui lankų. Taigi

$$\liminf \xi_n(\omega) = 0, \quad \limsup \xi_n(\omega) = 1,$$

todėl seka $\xi_n(\omega)$ nekonverguoja kiekvienam ω. Kita vertus

$$P(|\xi_n(\omega) - 0| > \epsilon) = P(\xi_n(\omega) = 1) = \frac{1}{n} \to 0,$$

taigi

$$\xi_n \xrightarrow{P} 0, \ n \to \infty.$$

Štai dar vienas, kiek sudėtingesnis pavyzdys.

37 pavyzdys. Šiek tiek skaičių teorijos

Nagrinėkime geometrinių tikimybių schemą, kurioje $\Omega = [0,1]$. Apibrėžkime atsitiktinių dydžių seką

$$\xi_n(\omega) = \sum_{\substack{1\le m<n \\ (m,n)=1}} I_{(\frac{m}{n}-\frac{1}{n^2},\frac{m}{n}+\frac{1}{n^2})}(\omega), \quad n > 1.$$

Nesunku įsitikinti, kad $\xi_n \xrightarrow{P} 0$. Skaičių teorijoje įrodoma, kad kiekvienam iracionaliajam α egzistuoja be galo daug trupmenų m/n, kad

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}.$$

Todėl $P(\omega : \limsup \xi_n(\omega) = 1) = 1$. Taigi seka ξ_n nekonverguoja su tikimybe 1 į nulį. Apibrėžkime kitą atsitiktinių dydžių seką:

$$\eta_n(\omega) = \sum_{\substack{1\le m<n \\ (m,n)=1}} I_{(\frac{m}{n}-\frac{1}{n^3},\frac{m}{n}+\frac{1}{n^3})}(\omega), \quad n > 1.$$

Tada

$$\begin{aligned} P(\omega : \sup_{n\geq m} |\xi_n(\omega) - 0| > \epsilon) &\leq \sum_{n\geq m} P(\xi_n(\omega) = 1) \leq \sum_{n\geq m} n \cdot \frac{2}{n^3} \\ &= \sum_{n\geq m} \frac{2}{n^2} \to 0, \quad m \to \infty. \end{aligned}$$

Ši seka konverguoja į nulį su tikimybe 1, taigi ir pagal tikimybę.

Taigi konverguojanti pagal tikimybę seka gali nekonverguoti su tikimybe 1. Vis dėlto konverguojančią pagal tikimybę atsitiktinių dydžių seką galima praretinti, kad likęs posekis konverguotų su tikimybe 1.

56 teorema. *Jeigu atsitiktiniams dydžiams teisingas sąryšis* $\xi_n \xrightarrow{P} \xi,\ n \to \infty$, *tai galima išskirti posekį* ξ_{n_m}, *kad galiotų* $\xi_{n_m} \xrightarrow{1} \xi,\ m \to \infty$.

Žr. įrodymą J. Kubiliaus knygoje „Tikimybių teorija ir matematinė statistika“, Vilnius, Mokslas, 1980, p. 201–202.

Įrodysime teoremą apie konvergavimo pagal tikimybę ir vidurkių konvergavimo ryšį.

57 teorema. *Tegu* $\xi_n,\ \xi,\ \eta$ *yra atsitiktiniai dydžiai, kuriems*

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi, \quad |\xi_n| \leq \eta, \quad \mathbf{E}[\eta] < \infty.$$

Tada $\mathbf{E}[\xi]$ *taip pat egzistuoja ir* $\mathbf{E}[\xi] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[\xi_n]$.

Įrodymas. Pagal ankstesnę teoremą egzistuoja posekis ξ_{n_m}, su tikimybe 1 konverguojantis į ξ. Tačiau tada $|\xi(\omega)| \leq \eta(\omega)$ beveik visiems ω. Tada gauname, kad $\mathbf{E}[\xi]$ egzistuoja. Dabar imkime skaičių $a > 0$ ir vertinkime:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}[\xi_n] - \mathbf{E}[\xi]| &\leq \mathbf{E}[|\xi_n - \xi|] = \mathbf{E}[|\xi_n - \xi| I_{\{\eta\leq a\}}] + \mathbf{E}[|\xi_n - \xi| I_{\{\eta>a\}}] \\ &\leq \epsilon P(|\xi_n - \xi| \leq \epsilon) + 2aP(|\xi_n - \xi| > \epsilon) + 2\mathbf{E}[\eta I_{\{\eta>a\}}], \end{aligned}$$

čia pasinaudojome tuo, kad beveik visiems ω teisinga nelygybė $|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leq 2\eta(\omega)$. Fiksavę skaičių $\delta > 0$, galėsime parinkti pakankamai mažą $\epsilon > 0$ ir pakankamai didelius a, N, kad dešinioji gautos nelygybių grandinėlės pusė būtų mažesnė už δ. To pakanka įrodymui užbaigti.

Tiek konvergavimo su tikimybe 1, tiek konvergavimo pagal tikimybę atvejais visi atsitiktiniai dydžiai turi būti apibrėžti toje pačioje tikimybinėje erdvėje. Tačiau kur apibrėžti tie atsitiktiniai dydžiai, su kuriais susiduriame gyvenime, kartais keblu pasakyti.

Taigi tampa neaišku, kaip nagrinėti jų konvergavimą pagal tikimybę ar su tikimybe 1. Apibrėšime dar vieną atsitiktinių dydžių konvergavimo rūšį.

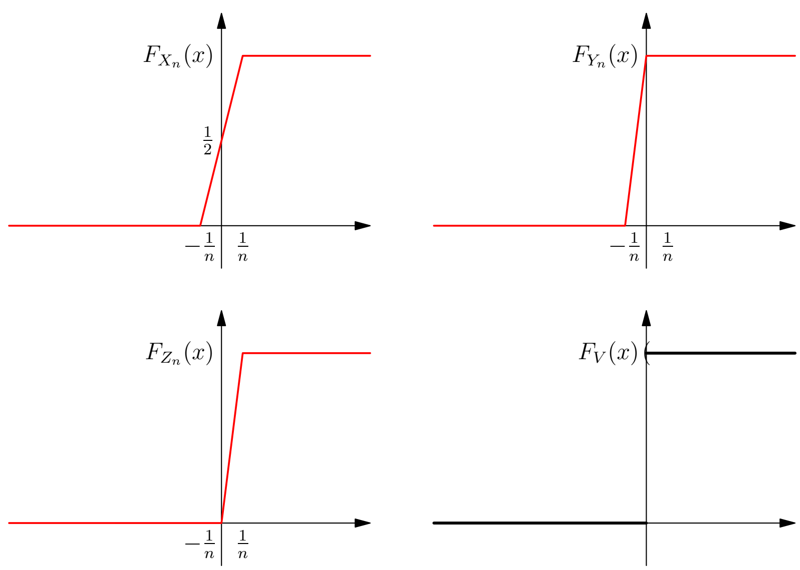
Šios rūšies konvergavimą galime nagrinėti net nežinodami, kokiose baigčių erdvėse apibrėžti mūsų atsitiktiniai dydžiai.

38 apibrėžimas. *Tegu ξ_n, ξ yra atsitiktiniai dydžiai, o F_n, F jų pasiskirstymo funkcijos. Sakysime, kad atsitiktiniai dydžiai ξ_n silpnai konverguoja į ξ jeigu kiekvienam funkcijos $F(x)$ tolydumo taškui x teisinga*

$$F_n(x) \to F(x), \quad n \to \infty.$$

Silpnąjį konvergavimą žymėsime: $\xi_n \Rightarrow \xi$.

Tegu X_n yra intervale $[-1/n; 1/n]$ tolygiai pasiskirstęs atsitiktinis dydis, Y_n ir Z_n – intervaluose $[-1/n; 0]$ ir $[0; 1/n]$ tolygiai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, o V – išsigimęs atsitiktinis dydis, $P(V = 0) = 1$. Nubraižykime šių dydžių pasiskirstymo funkcijų grafikus.



Panagrinėję juos įsitikinsime, kad jei $x \neq 0$ ir $n \to \infty$, tai

$$F_{X_n}(x) \to F_V(x), \quad F_{Y_n}(x) \to F_V(x), \quad F_{Z_n}(x) \to F_V(x).$$

Tačiau taške $x = 0$ pasiskirstymo funkcijų elgesys skiriasi:

$$F_{X_n}(0) = \frac{1}{2} \not\to F_V(0) = 0, \quad F_{Y_n}(0) = 1 \not\to F_V(0), \quad F_{Z_n}(0) = 0 \to F_V(0).$$

Taigi dydžiai X_n, Y_n, Z_n silpnai konverguoja į atsitiktinį dydį V, tačiau taške $x = 0$ pasiskirstymo funkcijų elgesys skiriasi.

Kai visi atsitiktiniai dydžiai ξ_n apibrėžti toje pačioje tikimybinėje erdvėje, galima nagrinėti, pavyzdžiui, konvergavimo pagal tikimybę ir silpnojo konvergavimo ryšį. Galima įrodyti, kad apibrėžtų toje pačioje tikimybinėje erdvėje atsitiktiniai dydžių seka, konverguojanti pagal tikimybę taip pat konverguoja ir silpnai.

Silpnąjį atsitiktinių dydžių konvergavimą galima apibūdinti ir kitaip.

58 teorema. *Tegu ξ_n, ξ yra atsitiktiniai dydžiai, o F_n, F jų pasiskirstymo funkcijos. Atsitiktiniai dydžiai ξ_n silpnai konverguoja į ξ tada ir tik tada, kai bet kokiai tolydžiai ir aprėžtai funkcijai $f(u)$ teisingas sąryšis*

$$\mathbf{E}[f(\xi_n)] \to \mathbf{E}[f(\xi)], \quad n \to \infty. \tag{36}$$

Įrodymas. Įrodymas gana „techniškas“, t. y. teks pasinaudoti analizės instrumentais, kuriuos naudojame dydžiams vertinti.

Tarkime, sąlyga (36) teisinga visoms aprėžtoms ir tolydžioms funkcijoms f. Naudosime šią sąlyga su funkcijomis $f = \varphi(x|a,\delta)$, kurias apibrėšime taip.

Su realiaisiais skaičiais a ir $\delta > 0$ apibrėškime:

$$\varphi(u|a,\delta) = \begin{cases} 1, & \text{jei } u \le a-\delta, \\ \max(\frac{a-u}{\delta}, 0), & \text{jei } a-\delta \le u. \end{cases}$$

Funkcijos $\varphi(u|a,\delta)$ yra aprėžtos ir tolydžios. Kai $u < a-\delta$, tai $\varphi(u|a,\delta) = 1$, kai $u \ge a$, $\varphi(u|a,\delta) = 0$. Jei $\delta \to 0$, tai nesunku įsitikinti, kad su visais u

$$\varphi(u|a-\delta,\delta) \to I_{(-\infty,a)}(u).$$

Jeigu ξ yra koks nors atsitiktinis dydis, tai

$$\varphi(\xi|a-\delta,\delta) \xrightarrow{1} I_{\{\xi<a\}} \text{ taigi ir } \varphi(\xi|a-\delta,\delta) \xrightarrow{P} I_{\{\xi<a\}}.$$

Pasirėmę teiginiu apie konvergavimo pagal tikimybę ir vidurkių konvergavimo ryšį gausime, kad

$$\mathbf{E}[\varphi(\xi|a-\delta,\delta)] \to \mathbf{E}[I_{\{\xi<a\}}] = P(\xi < a) = F_\xi(a).$$

Tegu a yra funkcijos $F(x)$ tolydumo taškas. Pažymėkime $\varphi(u) = I_{(-\infty,a)}(u)$. Pasinaudoję funkcijomis $\varphi(u|a-\delta,\delta)$, gausime

$$\varphi(\xi_n|a-\delta,\delta) \le \varphi(\xi_n) \le \varphi(\xi_n|a+\delta,\delta),$$

o paėmę vidurkius

$$\mathbf{E}[\varphi(\xi_n|a-\delta,\delta)] \le F_n(a) \le \mathbf{E}[\varphi(\xi_n|a+\delta,\delta)].$$

Pereikime gautoje nelygybėje prie ribos, kai $n \to \infty$. Gausime

$$\mathbf{E}[\varphi(\xi|a-\delta,\delta)] \le \liminf_n F_n(a) \le \limsup_n F_n(a) \le \mathbf{E}[\varphi(\xi|a+\delta,\delta)].$$

Kadangi $\varphi(x|a+\delta,\delta) < I_{(-\infty,a+\delta)}(x)$ ir $I_{(-\infty,a-2\delta)}(x) < \varphi(x|a-\delta,\delta)$, tai

$$\mathbf{E}[\varphi(\xi|a+\delta,\delta)] \le F(a+\delta), \quad F(a-2\delta) \le \mathbf{E}[\varphi(\xi|a-\delta,\delta)],$$

ir $F(a+\delta) - F(a-2\delta) \to 0, \quad \delta \to 0$, nes $F(x)$ tolydi taške $x = a$.

Taigi $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(a) = F(a)$. Įrodėme, kad iš (36) seka silpnasis konvergavimas.

Tegu dabar atsitiktiniai dydžiai ξ_n silpnai konverguoja į atsitiktinį dydį ξ, taigi pasiskirstymo funkcijos $F_n(u)$ konverguoja į $F(u)$ šios funkcijos tolydumo taškuose. Tegu $\varphi(u)$ yra tolydi ir aprėžta funkcija, $|\varphi(u)| \le A$. Fiksuokime skaičių $\epsilon > 0$ ir parinkime $a < b$ tokius didelius, kad

$$P(\xi \notin [a,b)), \quad P(\xi_n \notin [a,b)) \le \frac{\epsilon}{5A}.$$

Šiek tiek pagalvojus galima įsitikinti, kad visada galima tokius a, b parinkti. Vertinsime skirtumą (čia ir kitur vartojame glaustą indikatoriaus funkcijos žymenį: $I_{\{\xi\in B\}} = I_{\{\omega:\xi(\omega)\in B\}} = I_{\xi^{-1}(B)}$):

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{E}[\varphi(\xi_n)] - \mathbf{E}[\varphi(\xi)]| = |\mathbf{E}[\varphi(\xi_n)(I_{\{\xi_n\in[a,b)\}} + I_{\{\xi_n\notin[a,b)\}})] - \\
&\mathbf{E}[\varphi(\xi)(I_{\{\xi\in[a,b)\}} + I_{\{\xi\notin[a,b)\}})]| \le \\
&|\mathbf{E}[\varphi(\xi_n)I_{\{\xi_n\in[a,b)\}}] - \mathbf{E}[\varphi(\xi)I_{\{\xi\in[a,b)\}}]| + \\
&|\mathbf{E}[\varphi(\xi_n)I_{\{\xi_n\notin[a,b)\}}]| + |\mathbf{E}[\varphi(\xi)I_{\{\xi\notin[a,b)\}}]|.
\end{aligned}$$

Pasinaudoję a, b pasirinkimu ir sąlyga $|\varphi(u)| \le A$, gausime

$$|\mathbf{E}[\varphi(\xi_n)] - \mathbf{E}[\varphi(\xi)]| \le \frac{2\epsilon}{5} + |\mathbf{E}[\varphi(\xi_n)I_{\{\xi_n\in[a,b)\}}] - \mathbf{E}[\varphi(\xi)I_{\{\xi\in[a,b)\}}]|. \tag{37}$$

Vertinsime antrąjį dydį. Intervalą $[a,b)$ padalysime funkcijos $F(x)$ tolydumo taškais (galime manyti, kad a, b yra taip pat šios funkcijos tolydumo taškai):

$$a = x_0^\epsilon < x_1^\epsilon < \ldots < x_N^\epsilon = b.$$

Tarkime, kad šis padalijimas yra toks smulkus, jog su visais $x_i^\epsilon \le u \le v \le x_{i+1}^\epsilon$ teisinga nelygybė $|\varphi(u) - \varphi(v)| < \epsilon/5$. Apibrėšime diskrečiuosius atsitiktinius dydžius

$$\eta_n^\epsilon = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi(x_i^\epsilon) I_{\{\xi_n\in[x_i^\epsilon, x_{i+1}^\epsilon)\}}, \quad \eta^\epsilon = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi(x_i^\epsilon) I_{\{\xi\in[x_i^\epsilon, x_{i+1}^\epsilon)\}}.$$

Taškų x_i^ϵ parinkimas garantuoja, kad

$$|\mathbf{E}[\varphi(\xi_n)I_{\{\xi_n\in[a,b)\}}] - \mathbf{E}[\eta_n^\epsilon]| \le \frac{\epsilon}{5}, \quad |\mathbf{E}[\varphi(\xi)I_{\{\xi\in[a,b)\}}] - \mathbf{E}[\eta^\epsilon]| \le \frac{\epsilon}{5}. \tag{38}$$

Pasinaudoję paprastomis nelygybėmis su moduliais, gausime

$$|\mathbf{E}[\varphi(\xi_n)I_{\{\xi_n\in[a,b)\}}]-\mathbf{E}[\varphi(\xi)I_{\{\xi\in[a,b)\}}]| \le |\mathbf{E}[\varphi(\xi_n)I_{\{\xi_n\in[a,b)\}}]-\mathbf{E}[\eta_n^\epsilon]| +$$
$$|\mathbf{E}[\varphi(\xi)I_{\{\xi\in[a,b)\}}]-\mathbf{E}[\eta^\epsilon]| + |\mathbf{E}[\eta_n^\epsilon]-\mathbf{E}[\eta^\epsilon]| \le \frac{2\epsilon}{5} + |\mathbf{E}[\eta_n^\epsilon]-\mathbf{E}[\eta^\epsilon]|.$$

Dar turime įvertinti paskutinįjį dešinės pusės narį:

$$|\mathbf{E}[\eta_n^\epsilon]-\mathbf{E}[\eta^\epsilon]| = |\sum_{i=0}^{N-1}\varphi(x_i^\epsilon)(\mathbf{E}[I_{\{\xi_n\in[x_i^\epsilon,x_{i+1}^\epsilon)\}}]-\mathbf{E}[I_{\{\xi\in[x_i^\epsilon,x_{i+1}^\epsilon)\}}])|. \qquad (39)$$

Tačiau

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[I_{\{\xi_n\in[x_i^\epsilon,x_{i+1}^\epsilon)\}}]-\mathbf{E}[I_{\{\xi\in[x_i^\epsilon,x_{i+1}^\epsilon)\}}] &= P(\xi_n\in[x_i^\epsilon,x_{i+1}^\epsilon)) - P(\xi\in[x_i^\epsilon,x_{i+1}^\epsilon)) \\ &= F_n(x_{i+1}^\epsilon)-F_n(x_i^\epsilon)+F(x_{i+1}^\epsilon)-F(x_i^\epsilon).\end{aligned}$$

Kadangi $F_n(x)$ konverguoja į $F_(x)$ pastarosios funkcijos tolydumo taškuose, tai imdami didelius n, galime dydžius $\mathbf{E}[I_{\{\xi_n\in[x_i^\epsilon,x_{i+1}^\epsilon)\}}]-\mathbf{E}[I_{\{\xi\in[x_i^\epsilon,x_{i+1}^\epsilon)\}}]$ paversti mažesniais už bet kurį pasirinktą teigiamą skaičių. Tada (39) dydis neviršija $\epsilon/5$, kai $n\ge n_0$. Iš gautų įverčių gauname, kad su $n\ge n_0$

$$|\mathbf{E}[\varphi(\xi_n)]-\mathbf{E}[\varphi(\xi)]| \le \epsilon.$$

Taigi (36) sąlyga įrodyta.

2.9. Silpnasis konvergavimas ir kompaktiškumas

Silpnojo atsitiktinių dydžių konvergavimo sąlygos nusakomos vien jų pasiskirstymo funkcijomis. Tad galime kalbėti tiesiog apie pasiskirstymo funkcijų silpnąjį konvergavimą.

39 apibrėžimas. *Tegu $F_n(x)$ yra pasiskirstymo funkcijų seka. Sakysime, kad ji silpnai konverguoja, jeigu egzistuoja pasiskirstymo funkcija $F(x)$, kad kiekviename jos tolydumo taške x $F_n(x)\to F(x)$, kai $n\to\infty$.*

Kaip ir atsitiktiniams dydžiams žymėsime:

$$F_n \Rightarrow F.$$

Kada gi pasiskirstymo funkcijų seka silpnai konverguoja? Pradėsime tirti šį svarbų klausimą.

59 teorema. *Tegu F_n bet kokia pasiskirstymo funkcijų seka. Tada egzistuoja posekis F_{n_m}, bei nemažėjanti ir tolydi iš kairės funkcija $G(x)$, kad šios funkcijos tolydumo taškuose $F_n(x)\to G(x)$, kai $n\to\infty$.*

Ši teorema vadinama Helley (Eduard Helley) kompaktiškumo teorema.

Pastebėkime, kad ribinė funkcija gali būti visai ne pasiskirstymo funkcija. Kiek pagalvojus galima įsitikinti, kad kiekviena nemažėjanti ir tolydi iš kairės funkcija $G(x), 0 \leq G(x) \leq 1$ gali būti ribine pasiskirstymo funkcijų sekos $F_n(x)$ funkcija, t.y. $F_n(x) \to G(x)$ visuose $G(x)$ tolydumo taškuose.

Įrodymas. Racionaliųjų skaičių aibė yra skaiti, tad visus jos elementus galima sunumeruoti:

$$\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}.$$

Nagrinėkime skaičių seką $F_n(q_1)$. Kadangi $0 \leq F_n(q_1) \leq 1$ tai galima išrinkti konverguojantį posekį $F_{n_t}(q_1) \to g_1$, čia $t \to \infty, 0 \leq g_1 \leq 1$. Žymėsime atitinkamų pasiskirstymo funkcijų posekį $F_{1,n}$. Nagrinėkime skaičių seką $F_{1,n}(q_2)$. Vėl galime išrinkti konverguojantį posekį. Žymėdami atitinkamas pasiskirstymo funkcijas $F_{2,n}$, gausime $F_{2,n}(q_2) \to g_2$, $n \to \infty$. Tęsdami šį procesą gausime pasiskirstymo funkcijų posekių seką:

$$\begin{array}{ccccc} F_{1,1} & F_{1,2} & \ldots & F_{1,m} & \ldots \\ F_{2,1} & F_{2,2} & \ldots & F_{2,m} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{m,1} & F_{m,2} & \ldots & F_{m,m} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \tag{40}$$

Parinktieji posekiai turi šias savybes:

$$\{F_{t,m}\} \subset \{F_{t-1,m}\}, \qquad F_{t,m}(q_s) \to g_s, \quad 1 \leq s \leq t, \; m \to \infty.$$

Apibrėžkime funkciją $G : \mathcal{Q} \to [0,1]$, imdami $G(q_i) = g_i$ ir pratęskime ją iki funkcijos $G : \mathbb{R} \to [0,1]$ apibrėždami

$$G(x) = \sup\{G(q) : q \in \mathcal{Q}, q \leq x\}.$$

Tada $G(x)$ yra nemažėjanti, tolydi iš kairės funkcija.

Dabar parinkime naują pradinės pasiskirstymo funkcijų sekos posekį, imdami tas funkcijas, kurios (40) lentelėje ant įstrižainės[17]: $F_{1,1}, F_{2,2}, \ldots$. Akivaizdu, kad $F_{m,m}(q) \to G(q)$ bet kuriam racionaliajam q. Tegu x_0 yra bet koks funkcijos $G(x)$ tolydumo taškas, o $u, v \in \mathcal{Q}, u < x_0 < v$. Iš nelygybių

$$F_{m,m}(u) \leq F_{m,m}(x_0) \leq F_{m,m}(v)$$

[17]Toks parinkimas dažnai vadinamas Kantoro diagonaline procedūra. Panaudojęs analogišką samprotavimą G.Kantoras įrodė, kad realiųjų skaičių aibė nėra skaiti. Šį faktą žino kiekvienas pirmojo kurso studentas ir juo tikriausiai nesistebi. Pats Kantoras iš pradžių galvojo, kad realiųjų skaičių aibė skaiti. Po kelių savaičių darbo jis paneigė šią hipotezę. Įdomu, kad kitai klaidingai hipotezei, kad $\mathbb{R}$ ir $\mathbb{R}^n (n > 1)$ nėra tos pačios galios aibės paneigti, G. Kantorui prireikė net 3 metų. Tokia yra atradimų kaina!

pereidami prie ribos, kai $m \to \infty$, gauname

$$G(u) \le \liminf_m F_{m,m}(x_0) \le \limsup_m F_{m,m}(x_0) \le G(v).$$

Tačiau x_0 yra funkcijos $G(x)$ tolydumo taškas, todėl

$$\lim_{u \to x_0-} G(u) = \lim_{v \to x_0+} G(v) = G(x_0),$$

taigi $F_{m,m}(x_0) \to G(x_0)$, kai $m \to \infty$. Teorema įrodyta.

Tad bet kokiai pasiskirstymo funkcijų sekai F_n, nemažėjančių ir tolydžių iš kairės ribinių funkcijų klasė $\mathcal{R}(F_n)$, susidedanti iš tokių funkcijų G, kurioms egzistuoja posekis F_{n_m}, kad G tolydumo taškuose

$$F_{n_m}(x) \to G(x),$$

yra netuščia. Jei F_n silpnai konverguoja į pasiskirstymo funkciją F, tai $\mathcal{R}(F_n) = \{F\}$; čia F ribinė pasiskirstymo funkcija. Teisingas ir atvirkštinis teiginys.

60 teorema. *Jei F_n pasiskirstymo funkcijų seka, o aibė $\mathcal{R}(F_n)$ sudaryta iš vienintelės pasiskirstymo funkcijos F, tai $F_n \Rightarrow F$.*

Įrodymas. Tarkime F_n nekonverguoja silpnai į F. Tada egzistuoja F tolydumo taškas x, kad $F_n(x) \not\to F(x)$. Aprėžta skaičių seka $F_n(x)$ turi bent vieną ribinį tašką c, $c \neq F(x)$. Parinkime kokį nors F_n posekį F'_n, kad $F'_n(x) \to c$. Iš Helley kompaktiškumo teoremos išplaukia, kad egzistuoja į tam tikrą nemažėjančią funkciją jos tolydumo taškuose konverguojantis $F'_n(x)$ posekis $F'_{n_m}(x)$. Kadangi ribinė funkcija yra vienintelė, tai $F'_{n_m} \Rightarrow F$. Taigi turi būti $F'_{n_m}(x) \to F(x)$. Tačiau tai prieštarauja sąlygai $F'_{n_m}(x) \to c, c \neq F(x)$. Teiginys įrodytas. Nors aibė $\mathcal{R}(F_n)$ visada turi nors vieną elementą,

gali atsitikti, kad nei viena pasiskirstymo funkcija neįeina į šia pasiskirstymo funkcijų šeimą. Pakanka panagrinėti pavyzdį, kai $F_n(x) = I_{(n,\infty)}(x)$. Kad F_n silpnai konverguotų būtina ir pakankama, kad

- $\mathcal{R}(F_n)$ būtų sudaryta tik iš pasiskirstymo funkcijų;
- $\mathcal{R}(F_n)$ turėtų vienintelį elementą.

Iš pradžių panagrinėsime, kada į $\mathcal{R}(F_n)$ įeina tik pasiskirstymo funkcijos. Pasirėmus Helley teorema nesunku įsitikinti, kad aibė $\mathcal{R}(F_n)$ sudaryta vien tik iš pasiskirstymo funkcijų tada ir tik tada, kai iš kiekvieno F_n posekio galima išrinkti silpnai konverguojantį posekį.

40 apibrėžimas. *Pasiskirstymo funkcijų šeimą $\{F_\alpha\}$ vadinsime santykinai kompaktiška, jei iš kiekvieno jos posekio galima išrinkti silpnai konverguojantį posekį.*

Įrodysime J. V. Prochorovo teoremą apie konvergavimo ir santykinio kompaktiškumo ryšį.

61 teorema. *Pasiskirstymo funkcijų šeima $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}$ yra santykinai kompaktiška tada ir tik tada, kai bet kokiam $\epsilon > 0$ egzistuoja toks N, kad su visais α*

$$F_\alpha(N) - F_\alpha(-N) \geq 1 - \epsilon. \tag{41}$$

Įrodymas. Tarkime, kad pasiskirstymo funkcijų šeima yra santykinai kompaktiška, bet netenkina sąlygos. Tada kokiam nors $\epsilon > 0$ ir kiekvienam $n = 1, 2, 3, \ldots$ atsiras šios šeimos pasiskirstymo funkcija $F_{\alpha_n} \in \mathcal{F}$, kad

$$F_{\alpha_n}(n) - F_{\alpha_n}(-n) < 1 - \epsilon.$$

Paprastumo dėlei žymėkime $F_n = F_{\alpha_n}$. Pagal mūsų prielaidą egzistuoja silpnai konverguojantis sekos F_n posekis, t. y. egzistuoja F_{n_m} ir pasiskirstymo funkcija $G(u)$, kad $F_{n_m}(u) \to G(u)$ funkcijos G tolydumo taškuose. Imkime kokį nors M, kad $M, -M$ būtų G tolydumo taškai ir

$$G(M) - G(-M) > 1 - \epsilon.$$

Kai $n > M$ teisinga nelygybė $F_n(M) - F_n(-M) \leq F_n(n) - F_n(-n) < 1 - \epsilon$, tačiau kita vertus turi būti $F_n(M) - F_n(-M) \to G(M) - G(-M) > 1 - \epsilon$. Gavome prieštarą.

Tegu dabar pasiskirstymo funkcijų šeima $\mathcal{F}$ tenkina (2.9.) sąlygą, o F_n yra kokia nors jos elementų seka. Pagal Helley teoremą egzistuoja nemažėjanti, tolydi iš kairės funkcija $G(u)$ ir posekis F_{n_m}, kad $F_{n_m}(u) \to G(u)$ funkcijos G tolydumo taškuose. Mums tereikia parodyti, kad G yra pasiskirstymo funkcija, t. y.

$$G(n) - G(-n) \to 1, \qquad n \to \infty. \tag{42}$$

Bet kokiam skaičiui $\epsilon > 0$ raskime N, kad galiotų (2.9.) sąlyga. Galime N parinkti taip kad $-N, N$ būtų G tolydumo taškai. Tada

$$G(N) - G(-N) = \lim_{m\to\infty} [F_{n_m}(N) - F_{n_m}(-N)] \geq 1 - \epsilon.$$

Iš šio teiginio išplaukia (42) sąlyga.

2.10. Charakteringosios funkcijos

Apibrėšime atsitiktinius dydžius su kompleksinėmis reikšmėmis.

Kam gi mums reikia tokių dydžių? Juk ir kompleksinių skaičių mes kasdieniame gyvenime neprisimename. Jie netinka nei išlošių, nei santaupų dydžiams reikšti, nei ką nors matuoti.

Kas gi tada yra tas kompleksinis skaičius? Galime įsivaizduoti, kad kompleksinis skaičius z tai dviejų realiųjų skaičių x, y poros vaizdavimo būdas: $z = x + iy$. Čia i yra „ypatingas“ skaičius – menamasis vienetas, t.y. toks skaičius, kurio kvadratas lygus -1, $i^2 = -1$; skaičius x vadinamas realiąja z dalimi, žymime $x = \mathrm{Re}\, z$, skaičius y – menamąja dalimi, žymime $y = \mathrm{Im}\, z$. Apibrėžę veiksmus su šiais skaičiais sukuriame turtingą įvairiais sąryšiais struktūrą, tarsi įrankį, kuriuo naudojantis galima tyrinėti kitas sritis. Viena tokių sričių, kurių tyrinėjimą kompleksiniais skaičiai palengvina – silpnasis atsitiktinių dydžių, įgyjančių realiąsias reikšmes, konvergavimas.

Iš pradžių apibrėškime atsitiktinius dydžius su kompleksinėmis reikšmėmis. Atsitiktinis dydis su kompleksinėmis reikšmėmis gaunamas iš dviejų realiąsias reikšmes įgyjančių atsitiktinių dydžių ir atvirkščiai.

41 apibrėžimas. *Tegu $\langle \Omega, \mathcal{A}, P\rangle$ yra tikimybinė erdvė, $\mathcal{C}$ – kompleksinių skaičių aibė. Funkciją $\xi : \Omega \to \mathcal{C}$ vadinsime kompleksiniu atsitiktiniu dydžiu, jei $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, kur $\xi_1 = \mathrm{Re}\,\xi, \xi_2 = \mathrm{Im}\,\xi$ yra realieji atsitiktiniai dydžiai. Kompleksinius atsitiktinius dydžius*

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2, \qquad \eta = \eta_1 + i\eta_2$$

vadinsime nepriklausomais, jei bet kurią atsitiktinių dydžių porą $\{\xi_i, \eta_j\}$ sudaro nepriklausomi dydžiai.
Jeigu dydžių ξ_1, ξ_2 vidurkiai egzistuoja, tai atsitiktinio dydžio ξ vidurkį apibrėšime

$$\mathbf{E}[\xi] = \mathbf{E}[\xi_1] + i\mathbf{E}[\xi_2].$$

Taigi kompleksinių atsitiktinių dydžių vidurkiai yra kompleksiniai skaičiai. Daugelis vidurkio savybių yra tos pačios tiek atsitiktiniams dydžiams su realiomis, tiek su kompleksinėmis reikšmėmis. Pavyzdžiui, kaip ir realiųjų atsitiktinių dydžių atveju, kompleksinio atsitiktinio dydžio ξ vidurkis egzistuoja tada ir tik tada, kai egzistuoja atsitiktinio dydžio $|\xi|$ vidurkis. Kompleksinių atsitiktinių dydžių vidurkių savybės įrodomos, pasiremiant realiųjų atsitiktinių dydžių savybėmis. Suformuluosime keletą.

62 teorema. *Teisingi tokie teiginiai:*

1. *Jei ξ_1, ξ_2 yra kompleksiniai atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkius, o a, b kompleksinės konstantos, tai atsitiktinis dydis $\xi = a\xi_1 + b\xi_2$ irgi turi vidurkį ir*
$$\mathbf{E}[\xi] = a\mathbf{E}[\xi_1] + b\mathbf{E}[\xi_2].$$

2. *Jei kompleksinis atsitiktinis dydis ξ turi vidurkį, tai* $|\mathbf{E}[\xi]| \le \mathbf{E}[|\xi|]$.

3. *Tegu ξ_n yra kompleksiniai atsitiktiniai dydžiai ir beveik visiems ω $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$, $|\xi_n| \le \eta$; čia η yra realusis atsitiktinis dydis turintis vidurkį. Tada ξ_n, ξ irgi turi vidurkius,*

$$|\mathbf{E}[\xi_n]| \le \mathbf{E}[\eta], \quad |\mathbf{E}[\xi]| \le \mathbf{E}[\eta], \quad \mathbf{E}[\xi_n] \to \mathbf{E}[\xi], \ n \to \infty.$$

4. *Jei ξ_1, ξ_2 yra nepriklausomi kompleksiniai atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkius, tai atsitiktinis dydis $\xi = \xi_1 \cdot \xi_2$ irgi turi vidurkį ir*

$$\mathbf{E}[\xi] = \mathbf{E}[\xi_1] \cdot \mathbf{E}[\xi_2].$$

Viena iš pačių svarbiausių matematikoje yra formulė: jei u yra realusis skaičius, tai

$$\mathrm{e}^{iu} = \cos(u) + i\sin(u),$$

čia e yra natūrinių logaritmų pagrindas. Žinome, kad su visais u teisinga lygybė $|\mathrm{e}^{iu}| = 1$. Įstatę vietoje u kokį nors atsitiktinį dydį ξ gauname:

$$\mathrm{e}^{i\xi} = \cos(\xi) + i\sin(\xi), \quad |\mathrm{e}^{i\xi}| = 1.$$

Taigi bet kokiam atsitiktiniam dydžiui ξ su realiomis reikšmėmis vidurkis $\mathbf{E}[\mathrm{e}^{i\xi}]$ egzistuoja. Taip pat gauname, kad bet kokiam atsitiktiniam dydžiui ξ ir realiajam skaičiui t, kompleksinio atsitiktinio dydžio

$$e^{it\xi} = \cos(t\xi) + i\sin(t\xi)$$

vidurkis egzistuoja.

42 apibrėžimas. *Realiojo atsitiktinio dydžio ξ charakteringąja funkcija vadinsime realiojo argumento funkciją*

$$\phi_\xi(t) = \mathbf{E}[\mathrm{e}^{it\xi}] = \mathbf{E}[\cos(t\xi)] + i\mathbf{E}[\sin(t\xi)].$$

Realiojo atsitiktinio vektoriaus $\xi = \langle \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle$ charakteringąja funkcija vadinsime funkciją

$$\phi_\xi(t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{E}[\mathrm{e}^{it_1\xi_1 + \ldots + it_n\xi_n}].$$

38 pavyzdys. Puasono dydis Tegu atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį: $\xi \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Tada jo charakteringoji funkcija

$$\phi_\xi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{itm}\lambda^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{e}^{it}\lambda)^m}{m!} = \exp\{\lambda(\mathrm{e}^{it} - 1)\}.$$

39 pavyzdys. Standartinis normalusis dydis
Tegu $\zeta \sim \mathcal{N}(0,1)$. Tada

$$\phi_\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itu} p_\zeta(u)du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itu-u^2/2} du.$$

Pastarasis integralas konverguoja visoms t reikšmėms, ne vien tik realiosioms. Imkime $t = -iz$. Tada

$$\phi_\zeta(-iz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2zu-u^2/2} du =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{z^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(u+z)^2/2} d(u+z) = \mathrm{e}^{z^2/2}.$$

Imdami $z = it$, kur t realusis skaičius, gausime

$$\phi_\zeta(t) = \phi_\zeta(-i(it)) = \mathrm{e}^{-t^2/2}.$$

Išvardysime paprasčiausias charakteringųjų funkcijų savybes. Jos įrodomos pasinaudojant atsitiktinių dydžių vidurkių savybėmis.

63 teorema. *Teisingi šie teiginiai:*

1. *Atsitiktinio dydžio charakteringoji funkcija yra tolydi kiekviename taške.*

2. *Tegu ξ yra atsitiktinis dydis, a, b dvi konstantos, $\eta = a\xi + b$. Tada $\phi_\eta(t) = \mathrm{e}^{itb}\phi_\xi(at)$.*

3. *Tegu ξ_1, ξ_2 yra du nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $\xi = \xi_1 \cdot \xi_2$. Tada*

$$\phi_\xi(t) = \phi_{\xi_1}(t)\phi_{\xi_2}(t).$$

Įrodykime, pavyzdžiui, 3) savybę. Jei atsitiktiniai dydžiai ξ_1, ξ_2 yra nepriklausomi, tai atsitiktiniai dydžiai $\mathrm{e}^{it\xi_1}$ ir $\mathrm{e}^{it\xi_2}$ irgi yra nepriklausomi (šiek tiek reikia pasamprotauti, norint tuo įsitikinti). Be to, šie dydžiai turi vidurkius. Tada

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{it\xi_1} \cdot \mathrm{e}^{it\xi_2}] = \mathbf{E}[\mathrm{e}^{it\xi_1+it\xi_2}] = \mathbf{E}[\mathrm{e}^{it\xi_1}] \cdot \mathbf{E}[\mathrm{e}^{it\xi_2}].$$

Tačiau pastaroji lygybė kaip tik ir reiškia, kad $\phi_\xi(t) = \phi_{\xi_1}(t)\phi_{\xi_2}(t)$.

Nors 3) charakteringųjų funkcijų savybę įrodėme dviems nepriklausomiems atsitiktiniams dydžiams, tačiau ji teisinga bet kokiai baigtinei nepriklausomų atsitiktinių dydžių sistemai:

Išvada. Jei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, tai

$$\phi_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t) = \phi_{\xi_1}(t) \cdot \phi_{\xi_2}(t) \cdots \phi_{\xi_n}(t).$$

Turint vienų dydžių charakteringąsias funkcijas ir naudojantis įrodytomis savybėmis, kartais galima surasti kitų dydžių charakteringąsias funkcijas.

40 pavyzdys. Binominis dydis

Jei $\eta_i (i = 1, \ldots, n)$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai,

$$P(\eta_i = 1) = p, \quad P(\eta_i = 0) = q = 1 - p,$$

tai jų suma $\eta = \eta_1 + \ldots + \eta_n$ yra atsitiktinis dydis, pasiskirstęs pagal binominį dėsnį: $\eta \sim \mathcal{B}(n, p)$. Tada

$$\phi_\eta(t) = \phi_{\eta_1}(t) \ldots \phi_{\eta_n}(t) = \phi_{\eta_1}(t)^n = (\mathrm{e}^{it}p + q)^n.$$

41 pavyzdys. Normalusis dydis

Jeigu $\zeta_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$, t.y. atsitiktinis dydis ζ_0 pasiskirstęs pagal standartinį normalųjį dėsnį, o a ir σ yra realieji skaičiai, tai atsitiktinis dydis $\zeta = a + \sigma\zeta_0$ pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį su parametrais a, σ^2, t.y. $\zeta \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Pasinaudoję charakteringųjų funkcijų savybėmis gauname:

$$\phi_\zeta(t) = \mathrm{e}^{iat}\phi_{\zeta_0}(\sigma t) = \mathrm{e}^{iat - \sigma^2 t^2/2}.$$

Dabar panagrinėsime charakteringosios funkcijos ir atsitiktinio dydžio momentų ryšį.

64 teorema. *Jei egzistuoja atsitiktinio dydžio ξ m-asis momentas, tai bet kokiam t egzistuoja m-oji charakteringosios funkcijos $\phi_\xi(t)$ išvestinė. Be to*

$$\phi_\xi(t)^{(m)} = \mathbf{E}[(i\xi)^m \mathrm{e}^{it\xi}]. \tag{43}$$

Charakteringajai funkcijai teisingas toks asimptotinis skleidinys:

$$\phi_\xi(t) = \sum_{l=0}^{m} \mathbf{E}[\xi^l] \frac{(it)^l}{l!} + r_m(t) \frac{(it)^m}{m!}; \tag{44}$$

čia $r_m(t) \to 0, t \to 0$.

Įrodymas. Įrodysime, kad pirmoji $\phi_\xi(t)$ išvestinė egzistuoja. Iš charakteringosios funkcijos apibrėžimo gauname

$$\frac{\phi_\xi(t+h) - \phi_\xi(t)}{h}) = \mathbf{E}[\mathrm{e}^{it\xi}(\frac{\mathrm{e}^{ih\xi} - 1}{h})].$$

Nagrinėkime atsitiktinius dydžius

$$\eta_h = \mathrm{e}^{it\xi} \cdot \Big(\frac{\mathrm{e}^{ih\xi} - 1}{h}\Big).$$

Kai h yra mažas teigiamas skaičius $|\eta_h| \leq 2|\xi|$, tuo galime įsitikinti pasinaudoję analizinėmis rodiklinės funkcijos savybėmis. Be to , kai $h \to 0$, $\eta_h(\omega) \to i\xi \mathrm{e}^{it\xi(\omega)}$ (kiekvienam ω). Pasinaudoję dydžių konvergavimo ir vidurkių konvergavimo sąryšiu gauname:

$$\mathbf{E}[\eta_h] \to \mathbf{E}[i\xi \mathrm{e}^{it\xi}].$$

Šis sąryšis ekvivalentus (43) lygybei. (43) lygybę bet kokiam m galima įrodyti pasinaudojus indukcija.

Įrodysime (44) lygybę. Pasinaudosime Tayloro formule: jei realiųjų skaičių aibėje apibrėžta realiąsias reikšmes įgyjanti funkcija $f(t)$, be to nulio aplinkoje ji m kartų diferencijuojama, tai šioje aplinkoje

$$f(x) = \sum_{l=0}^{m-1} \frac{f^{(l)}(0)}{l!} x^l + \frac{f^{(m)}(\theta x)}{m!} x^m;$$

čia $\theta = \theta(x)$ yra skaičius tarp 0 ir 1. Pasinaudoję šia formule funkcijoms $\cos x$ ir $\sin x$, gausime[18]

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{ix} &= \cos x + i \sin x = \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(ix)^l}{l!} + \frac{(ix)^m}{m!} (\cos(\theta_1(x)x) + i \sin(\theta_2(x)x) \\ &= \sum_{l=0}^{m} \frac{(ix)^l}{l!} + \frac{(ix)^m}{m!} (\cos(\theta_1(x)x) + i \sin(\theta_2(x)x) - 1). \end{aligned}$$

Įstatykime į šią lygybę $x = t\xi$ ir imkime abiejų pusių vidurkius. Gausime (44) lygybę, kurioje

$$r_m(t) = \mathbf{E}[(\cos(\theta_1(t\xi)t\xi) + i \sin(\theta_2(t\xi)t\xi) - 1)].$$

Nesunku įsitikinti, kad $r_m(t) \to 0$, kai $t \to 0$. Teorema įrodyta.

Su atsitiktiniais dydžiais galima sieti įvairius įvykius. Visų tokių įvykių tikimybes galima reikšti naudojant atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkciją. Dabar kiekvienam atsitiktiniam dydžiui sukūrėme dar vieną funkciją – charakteringąją funkciją. Ar ji taip pat „saugo“ visą informaciją apie atsitiktinio dydžio tikimybes?

[18]Tiesą sakant, kad įsitikintume, jog ši lygybė teisinga, turime pasidarbuoti; reikia atskirai išnagrinėti atvejus, kai m dalijasi iš 4, dalijant iš 4 duoda liekanas $1, 2, 3$

Jeigu du dydžiai turi tą pačią pasiskirstymo funkciją, tai ir jų charakteringosios funkcijos vienodos. Taigi kiekvieną pasiskirstymo funkciją atitinka tam tikra charakteringoji funkcija.

65 teorema. *(Vienaties teorema.) Jeigu pasiskirstymo funkcijos yra skirtingos, tai jų charakteringosios funkcijos irgi skirtingos.*

Šis svarbus teiginys teigiamai atsako į anksčiau suformuluotą klausimą. Tad pagal charakteringąsias funkcijas galime atpažinti pasiskirstymo funkcijas. Tačiau įrodyti šią teoremą yra gana nelengva. Norintiems sužinoti, kaip ją įrodyti, teks pavartyti išsamesnes tikimybių teorijos knygas.

42 pavyzdys. Puasono dydžiai

Tarkime ξ_1, ξ_2 yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal Puasono dėsnius: $\xi_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1), \xi_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$. Pagal kokį dėsnį pasiskirsčiusi jų suma?

Tegu $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Tada šio dydžio charakteringoji funkcija yra tokia:

$$\phi_\xi(t) = \phi_{\xi_1}(t) \cdot \phi_{\xi_2}(t) = \exp\{\lambda_1(\mathrm{e}^{it} - 1)\} \cdot \exp\{\lambda_2(\mathrm{e}^{it} - 1)\} = \exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)(\mathrm{e}^{it} - 1)\}.$$

Matome, kad $\phi_\xi(t)$ yra dėsnį $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ atitinkanti charakteringoji funkcija. Taigi $\xi \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

43 pavyzdys. Normalieji dydžiai

Lygiai taip pat galime įsitikinti, kad nepriklausomų atsitiktinių dydžių $\xi_i \sim \mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2),\ i = 1, 2$, suma pasiskirsčiusi pagal dėsnį $\mathcal{N}(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Pasiskirstymo funkcijų silpnojo konvergavimo tyrimas – vienas iš svarbiausių tikimybių teorijos rūpesčių. Panagrinėkime, kaip šiai problemai tirti galima naudoti charakteringąsias funkcijas.

Visų pirma, iš silpnojo konvergavimo savybių išplaukia toks teiginys.

66 teorema. *Jei F_n, F yra pasiskirstymo funkcijos, o $\phi_n(t), \phi(t)$ jas atitinkančios charakteringosios funkcijos ir $F_n \Rightarrow F$, tai kiekvienam t, $\phi_n(t) \to \phi(t)$, kai $n \to \infty$.*

Taigi silpnai konverguojančią pasiskirstymo funkcijų seką atitinka kiekviename taške konverguojanti charakteringųjų funkcijų seka. Svarbu ištirti, ar iš charakteringųjų funkcijų konvergavimo galima daryti išvadą apie silpnąjį pasiskirstymo funkcijų konvergavimą. Priminsime, kad pasiskirstymo funkcijų seka $\{F_n\}$ silpnai konverguoja tada ir tik tada, kai ribinių funkcijų aibėje $\mathcal{R}(F_n)$ yra vienintelė funkcija, be to, ši funkcija yra pasiskirstymo funkcija. Tarkime, jau nustatėme, kad pasiskirstymo funkcijų seka $\{F_n\}$ yra santykinai kompaktiška. Tada iš Prochorovo teoremos išplaukia, kad aibė $\mathcal{R}(F_n)$ sudaryta tik iš pasiskirstymo funkcijų. Tegu pasiskirstymo funkcijos $\phi_n(t)$ konverguoja kiekviename taške į tam tikrą funkciją $\phi(t)$. Jeigu aibėje $\mathcal{R}(F_n)$

būtų bent dvi skirtingos pasiskirstymo funkcijos F, G tai tam tikriems posekiams turėtume

$$F_{n_m^*} \Rightarrow F, \quad F_{n_m^{**}} \Rightarrow G.$$

Charakteringosios funkcijos atitinkančios pasiskirstymo funkcijas F, G būtų skirtingos. Pažymėkime jas f, g. Tada kiekvienam t turėtume

$$\phi_{n_m^*}(t) \to f(t), \quad \phi_{n_m^{**}}(t) \to g(t), \quad m \to \infty.$$

Tačiau tada gautume prieštaravimą $\phi(t) = f(t) = g(t)$.

Taigi, jei pasiskirstymo funkcijų seka santykinai kompaktiška, o charakteringosios funkcijos konverguoja, tai aibė $\mathcal{R}(F_n)$ būtų sudaryta tik iš vienos pasiskirstymo funkcijos, taigi pasiskirstymo funkcijų seka silpnai konverguoja. Tad norėdami suformuluoti silpnojo konvergavimo kriterijų vien tik charakteringosiomis funkcijomis, turime nustatyti, kokia charakteringųjų funkcijų savybė garantuoja atitinkamų pasiskirstymo funkcijų sekos santykinį kompaktiškumą. Pasirodo, kad ta savybė labai paprasta: charakteringųjų funkcijų riba turi būti tolydi taške $t = 0$ funkcija!

Teoremą apie pasiskirstymo funkcijų silpnojo konvergavimo ir charakteringųjų funkcijų konvergavimo ryšį dabar galime suformuluoti taip.

67 teorema. *(Tolydumo teorema.) Pasiskirstymo funkcijų seka F_n silpnai konverguoja į tam tikrą ribinę pasiskirstymo funkciją tada ir tik tada, kai atitinkamų charakteringųjų funkcijų seka $\phi_n(t)$ kiekviename taške konverguoja į tam tikrą funkciją $\phi(t)$, kuri yra tolydi taške $t = 0$. Tokiu atveju $\phi(t)$ yra ribinę pasiskirstymo funkciją F atitinkanti charakteringoji funkcija.*

Tai labai naudinga, bet kartu ir sudėtinga teorema. Tenka ir ją palikti be įrodymo.

Kitame skyrelyje pamatysime, kaip ši teorema palengvina svarbiausių tikimybių teorijos teiginių – ribinių teoremų įrodymą.

2.11. Ribinės teoremos

Keletas tokių teoremų suformuluota ankstesniuose skyreliuose. Tai teiginiai apie tam tikrų atsitiktinių dydžių ξ_n skirstinių artėjimą prie ribinio skirstinio, kai $n \to \infty$.

Apibrėžėme silpnojo konvergavimo sąvoką bei sukūrėme patogų įrankį silpnajam konvergavimui tirti – charakteringąsias funkcijas. Tad dabar ir į ribines teoremas galime kitaip pažvelgti. **Puasono teoremą** dabar suformuluosime taip.

68 teorema. *Tegu ξ_n yra atsitiktiniai dydžiai, $\xi_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ ir $np_n \to \lambda$, kai $n \to \infty$, čia $\lambda > 0$. Tada ξ_n pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į Puasono dėsnio $\mathcal{P}(\lambda)$ pasiskirstymo funkciją.*

Įrodinėdami šio skyrelio teoremas remsimės viena pagrindinių matematinės analizės ribų. Štai ta riba: jei z_n kompleksinių skaičių seka turinti baigtinę ribą, t. y. $z_n \to z$, kai $n \to \infty$, tai

$$\Big(1 + \frac{z_n}{n}\Big)^n \to \mathrm{e}^z, \quad n \to \infty. \tag{45}$$

Įrodymas. Prisiminkime, kaip užrašoma pagal binominį dėsnį $\mathcal{B}(n,p)$ pasiskirsčiusio dydžio charakteringoji funkcija; ji lygi $(1-p+p\mathrm{e}^{it})^n$. Taigi

$$\phi_{\xi_n}(t) = (1 - p_n + p_n\mathrm{e}^{it})^n = \Big(1 + \frac{np_n\mathrm{e}^{it} - np_n}{n}\Big)^n.$$

Pasinaudoję (45) su $z_n = np_n\mathrm{e}^{it} - np_n \to \lambda\mathrm{e}^{it} - \lambda$ gauname

$$\phi_{\xi_n}(t) \to \phi(t), \quad \phi(t) = \mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{it} - \lambda}, \quad n \to \infty,$$

tačiau $\phi(t)$ yra dėsnio $\mathcal{P}(\lambda)$ charakteringoji funkcija. Pasirėmę tolydumo teorema gauname išvadą, kad pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į dėsnio $\mathcal{P}(\lambda)$ pasiskirstymo funkciją. Teorema įrodyta. Dabar prisiminkime

didžiųjų skaičių dėsnį. Jį įrodėme nepriklausomiems atsitiktiniams dydžiams, turintiems antruosius momentus. Ar antrųjų momentų egzistavimas tikrai būtinas?

69 teorema. *Tegu $\xi_1, \xi_2, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, turintys matematinį vidurkį a. Tada bet kokiam $\epsilon > 0$*

$$P\Big(\Big|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - a\Big| > \epsilon\Big) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Įrodymas. Pažymėkime

$$S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - a = \sum_{m=1}^{n} \eta_m, \quad \eta_m = \frac{\xi_m - a}{n}.$$

Dydžiai η_m yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę $\mathbf{E}[\eta_m] = \mathbf{E}[\xi_m - a] = 0$. Tegu $\phi(t)$ yra atsitiktinio dydžio $\xi_m - a$ charakteringoji funkcija. Tada iš (44) su $m = 1$ gauname

$$\phi(t) = 1 + r_1(t)(it), \quad r_1(t) \to 0, \quad t \to 0.$$

Taigi

$$\phi_{\eta_m}(t) = \phi\Big(\frac{t}{n}\Big) = 1 + r_1\Big(\frac{t}{n}\Big)\frac{it}{n},$$

ir
$$\phi_{S_n}(t)=\phi_{\eta_1}(t)\ldots\phi_{\eta_n}(t)=\Big(1+r_1\big(\frac{t}{n}\big)\frac{it}{n}\Big)^n\to \mathrm{e}^0,\quad n\to\infty.$$
Tačiau funkcija $f(t)\equiv \mathrm{e}^0=1$ yra „išsigimusio“ atsitiktinio dydžio $\xi, P(\xi=0)=1$ charakteringoji funkcija. Pagal tolydumo teoremą S_n pasiskirstymo funkcijos F_n silpnai konverguoja į pasiskirstymo funkciją $F(x)=I_{(0,+\infty)}(x)$. Tada

$$P\Big(\big|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-a\big|>\epsilon\Big)\le P(S_n<-\epsilon/2)+P(S_n\ge\epsilon/2)=$$
$$F_n(-\epsilon/2)+1-F_n(\epsilon/2)\to 0,\ n\to\infty.$$

Teorema įrodyta.

Paprastai didžiųjų skaičių dėsniu pasitikime ir dažnai juo remiamės. Štai dar vienas jo taikymo pavyzdys.

44 pavyzdys. Monte Karlo metodas

Tarkime mums reikia suskaičiuoti kokios nors sudėtingu kontūru apribotos aibės $\mathcal{S}$ plotą. Tegu ši aibė yra vienetinio kvadrato poaibis. Gal būt nežinodami nuo ko pradėti ėmėme tiesiog baksnoti aibę tušinuko galu, kartais pataikydami, o kartais ne. Ir tai jau nebloga pradžia!

Tarkime turime galimybę rinkti vienetinio kvadrato taškus $A_1, A_2, \ldots$ taip, kad pasirinkimai būtų nepriklausomi, ir kiekvieną kartą visi taškai turėtų vienodas galimybes būti parinkti. Apibrėžkime nepriklausomus atsitiktinius dydžius
$$\xi_n=\begin{cases}1, & \text{jei } A_n\in\mathcal{S},\\ 0, & \text{jei } A_n\notin\mathcal{S}.\end{cases}$$

Tada ξ_n yra atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkį $\mathbf{E}[\xi_n]=s(\mathcal{S})$, čia $s(\mathcal{S})$ yra mūsų aibės plotas. Tada didžiųjų skaičių dėsnis tvirtina, kad esant dideliam N labai tikėtina, kad
$$\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_N}{N}\approx s(\mathcal{S}).$$

Taigi jei atsitiktinai baksnodami aibę tušinuko smaigaliu iš 10,000 kartų į aibę pataikėte 4,900 kartus, tai protinga manyti, kad $s(\mathcal{S})\approx 0{,}49$.

Nagrinėdami Bernulio schemą, kai bandymų skaičius didelis, naudojomės Muavro–Laplaso integraline teorema. Dabar jau žinome pakankamai, kad galėtume ją įrodyti. Galime dar daugiau – įrodysime vieną pagrindinių tikimybių teorijos teiginių – centrinę ribinę teoremą. Muavro–Laplaso integralinė teorema yra atskiras šios teoremos atvejis.

70 teorema. *(Centrinė ribinė teorema.) Tegu ξ_n yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkį $\mathbf{E}[\xi_n] = a$ ir dispersiją $\mathbf{D}[\xi_n] = \sigma^2$. Tada pasiskirstymo funkcijos*

$$F_n(x) = P\Big(\sum_{m=1}^{n} \frac{\xi_n - a}{\sigma\sqrt{n}} < x\Big)$$

silpnai konverguoja į standartinio normalinio dėsnio $\mathcal{N}(0,1)$ pasiskirstymo funkciją $\Phi(x)$, t. y. su visais x

$$F_n(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2} du, \quad n \to \infty.$$

Tarkime ξ_n yra atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmę, lygią 1, jei Bernulio schemos n-asis bandymas baigėsi sėkme, ir įgyjantis reikšmę 0, jei bandymas buvo nesėkmingas. Šie dydžiai tenkina centrinės ribinės teoremos sąlygas. Jeigu $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ yra sėkmių skaičius, atlikus n bandymų, o p yra sėkmės tikimybė viename bandyme, tai nesunku suskaičiuoti, kad

$$F_n(x) = P\Big(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\Big),$$

taigi centrinė ribinė teorema tvirtina tą patį, ką ir Muavro–Laplaso integralinė teorema.

Čia suformulavome patį paprasčiausią centrinės ribinės teoremos variantą. Iš tikrųjų nėra būtina, kad visi atsitiktiniai dydžiai būtų vienodai pasiskirstę[19]

Teoremos įrodymas. Visi atsitiktiniai dydžiai $\xi_m - a$ yra vienodai pasiskirstę, turi vidurkį lygų nuliui ir dispersiją, lygią σ^2. Pažymėkime jų bendrą charakteringąją funkciją $f(t)$. Iš (44) gauname, kad ši charakteringoji funkcija užrašoma taip:

$$f(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + r_2(t) \cdot \frac{t^2}{2}, \quad r_2(t) \to 0, \text{ kai } t \to 0.$$

Pažymėkime $\eta_m = (\xi_m - a)/(\sigma\sqrt{n})$, tada

$$\phi_{\eta_m}(t) = f\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big) = 1 - \frac{t^2}{2n} + r_2\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\frac{t^2}{2\sigma^2 n}.$$

[19]Žr. žymiai bendresnę centrinę ribinę teoremą J. Kubiliaus knygoje „Tikimybių teorija ir matematinė statistika“, 1980, Vilnius, p. 264–265.

Kadangi η_m yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai ir

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{\xi_n - a}{\sigma\sqrt{n}} = \sum_{m=1}^{n} \eta_m,$$

tai šios sumos charakteringoji funkcija yra

$$\phi_{S_n}(t) = \phi_{\eta_1}(t) \cdot \ldots \cdot \phi_{\eta_m}(t) = \Big(1 - \frac{t^2}{2n} + r_2\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\frac{t^2}{2\sigma^2 n}\Big)^n.$$

Pasinaudoję (45) riba gausime

$$\phi_{S_n}(t) \to \exp\Big\{-\frac{t^2}{2}\Big\}, \quad n \to \infty.$$

Tačiau funkcija $\phi(t) = \exp\{-\frac{t^2}{2}\}$ yra standartinio normalinio dėsnio $\mathcal{N}(0,1)$ charakteringoji funkcija. Iš tolydumo teoremos gauname, kad S_n pasiskirstymo funkcijos, t. y. funkcijos $F_n(x)$, visuose taškuose konverguoja į normalinio dėsnio $\mathcal{N}(0,1)$ pasiskirstymo funkciją.

Teorema įrodyta.

Literatūra

Tikimybių teorijos vadovėlių, monografijų – daugybė. Visuose vadovėliuose dėstomi tie patys pagrindai. Kuris geresnis? Tas, iš kurio galite daugiausia išmokti. Išmokti galime iš tų knygų, kuriose dėstomi mums nauji dalykai, ir be to – suprantamai. Studijuoti reiškia aiškintis, versti nesuprantamus dalykus suprantamais, aiškiais. Taigi ir „geriausiojo vadovėlio" titulą, kaip kokią pereinamąją sporto taurę, rimtai studijuojant turėtų pelnyti vis kitos knygos.

Tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pradmenys

1. *Matematika 11, II dalis.* TEV, Vilnius, 2002.

2. *Matematika 12, I, II dalys.* TEV, Vilnius, 2003.

Tikimybių teorijos ir matematinės statistika nematematinių specialybių studentams

3. A. Apynis, E. Stankus. *Matematika.* TEV, Vilnius, 2001.

4. A. Bakštys. *Statistika ir tikimybė.* TEV, Vilnius, 2006.

5. V. Čekanavičius, G. Murauskas. *Statistika ir jos taikymai, 1,2 t.* TEV, Vilnius, 2002.

6. A. Žemaitis. *Trumpas tikimybių teorijos ir matematinės statistikos kursas.* Vilnius: Technika. 2002.

Akademiniai tikimybių teorijos ir matematinės statistikos kursai

7. A. Aksomaitis. *Tikimybių teorija ir statistika.* Kaunas: Technologija. 2000.

8. J. Kubilius. *Tikimybių teorija ir matematinė statistika.* Vilnius. 1996.

Tikimybių teorija Internete

9. http://www.mathcs.carleton.edu/probweb/probweb.html

10. http://books.google.com/ Ieškokite: Probability