Remigijus Leipus

# Ekonometrija II

http://uosis.mif.vu.lt/∼remis

Vilnius, 2013

# Turinys

# 1 Trendo ir sezoniškumo vertinimas bei eliminavimas

Paprastai pirmasis žingsnis duomenų analizėje yra duomenų grafinis pavaizdavimas. Duomenų vizualizacija leidžia „įtarti“ koks modelis turėtų būti naudojamas. Populiariausias yra išskaidymas į trendo, sezoniškumo ir triukšmo komponenčių sumą:

$$X_t = m_t + s_t + Z_t, \tag{1.1}$$

kur $m_t$ yra lėtai besikeičianti funkcija (trendo komponentė); $s_t$ yra periodinė funkcija su žinomu periodu $d$, atspindinti tokių sezoninių faktorių, kaip metų laikai, savaitės dienos ir pan., įtaką; $Z_t$ yra atsitiktinė triukšmo komponentė, matematiškai aprašoma stacionaraus proceso pagalba (žr. 3 skyrelį).

## 1.1 Trendo komponentės vertinimas ir eliminavimas

Pradinis uždavinys – įvertinti ir eliminuoti trendo ir sezoniškumo komponentes, taip kad liekanos pasidarytų „panašios“ į stacionaraus proceso realizacijos elgesį. Aptarsime dažniausiai sutinkamus metodus.

*Trendo eliminavimas mažiausių kvadratų metodu.* Pirmuoju būdu (dar vadinamu determinuoto trendo metodu) „makroskopinė“ komponentė aprašoma kaip tam tikra determinuota funkcija (pavyzdžiui, logaritminė, eksponentinė, polinominė ir t.t.), kurios parametrai įvertinami mažiausių kvadratų metodu.

Tarkime, kad sezoninės dalies (1.1) išraiškoje nėra, t. y.

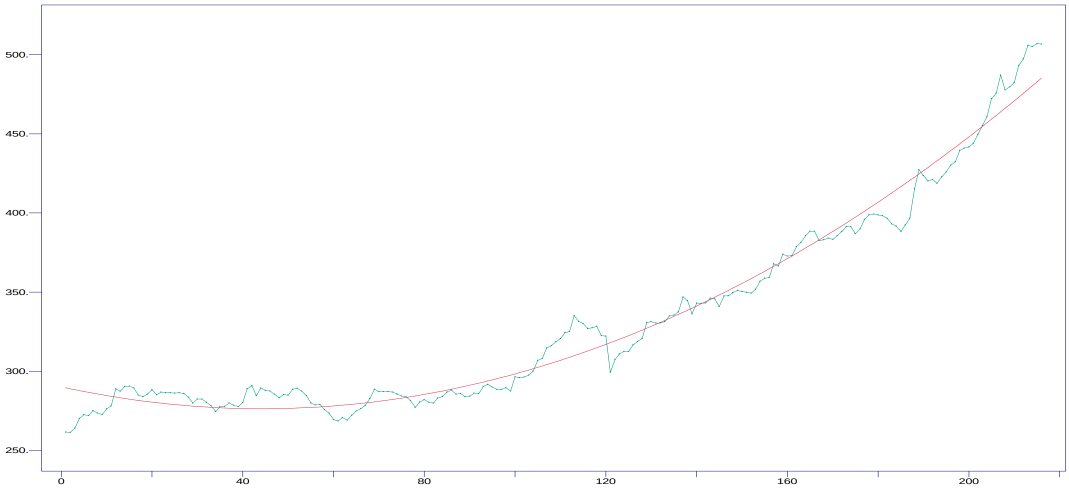
$$X_t = m_t + Z_t, \tag{1.2}$$

ir trendas $m_t$ gali būti nusakytas kokia nors parametrine funkcija, pavyzdžiui, kvadratiniu daugianariu $m_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Tuomet įverčiai $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ gaunami minimizuojant liekanų kvadratų sumą atžvilgiu $a_0$, $a_1$, $a_2$:

$$\sum_{t=1}^{n} (x_t - m_t)^2 = \sum_{t=1}^{n} (x_t - (a_0 + a_1 t + a_2 t^2))^2. \tag{1.3}$$

Gautasis trendo įvertis tuomet yra $\hat{m}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t + \hat{a}_2 t^2$.

1 paveiksle parodyta LITIN indekso kasdieninės reikšmės laikotarpyje nuo 2002.11.04 iki 2003.09.10 ir jų aproksimacija mažiausių kvadratų metodu.




1 pav. LITIN indekso kasdieninės reikšmės laikotarpyje nuo 2002.11.04 iki 2003.09.10 ir jų aproksimacija kvadratine funkcija $\hat{m}_t = 0,0070729t^2 - 0,62567t + 290,26$.

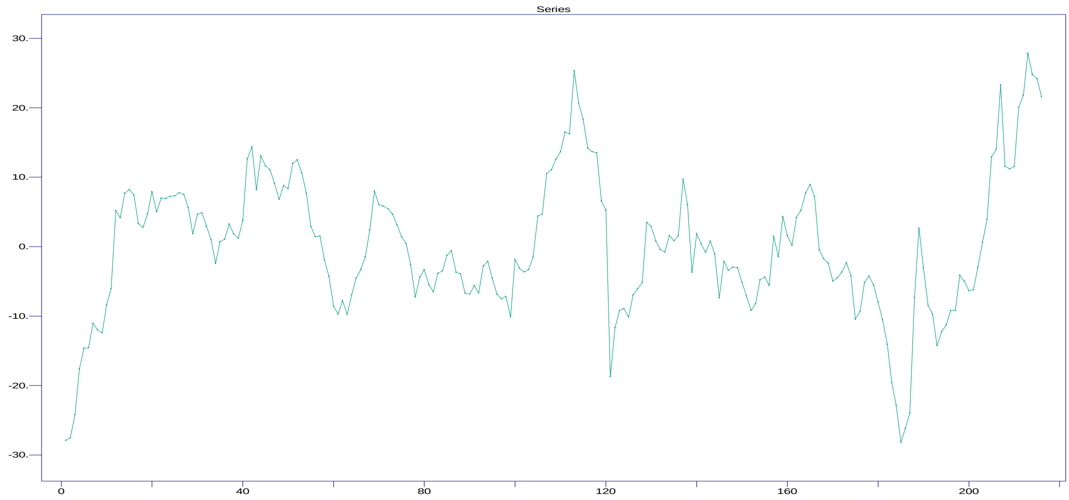
2 ir 3 paveiksle parodyta LITIN indekso (žr. 1 paveikslą) liekanos $\hat{Z}_t = x_t - \hat{m}_t$ ir jų koreliacinė bei dalinės autokoreliacijos funkcijos (jų apibrėžimai pateikiami 7.2 ir 10 skyreliuose). Vizualiai matome, kad gautos liekanos nėra nekoreliuotos. Remiantis 3 grafikais, kaip matysime vėliau, galima numatyti kokia turėtų būti $X_t$ komponentė $Z_t$.

*Suglodinimas slenkamuoju vidurkiu.* Tarkime, seka $X_t$ nusakoma (1.2) lygybe. Tegul $q$ yra neneigiamas sveikas skaičius ir tegul $Y_t$ yra empirinis $2q+1$ dydžių $X_t$ vidurkis

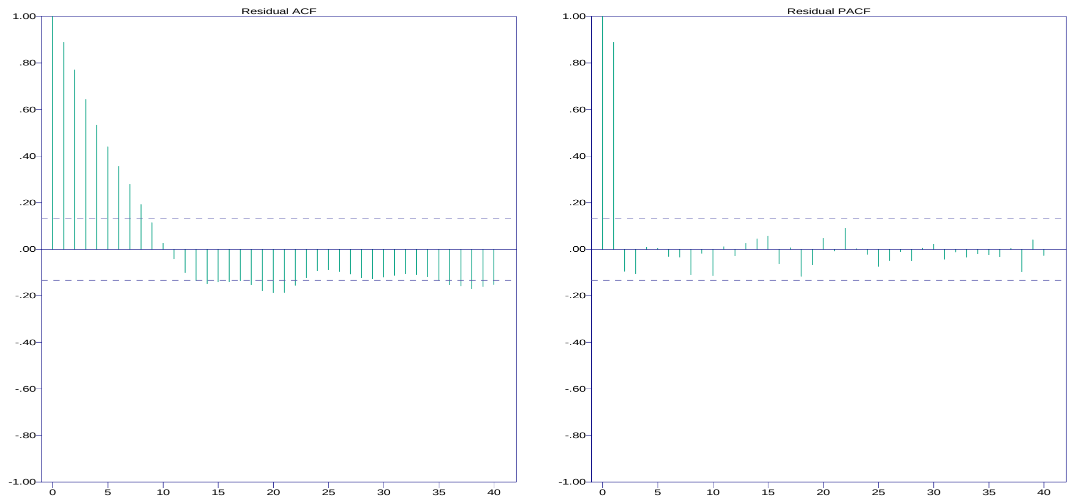
$$Y_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} X_{t+j}.$$

Jeigu laikysime, kad $m_t$ yra „panaši" į tiesinę funkciją kiekviename intervale $[t-q, t+q]$ ir paklaidų vidurkis yra artimas nuliui, tai gausime

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} m_{t+j} + \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} Z_{t+j} \\ &\approx m_t, \qquad q+1 \leqslant t \leqslant n-q. \end{aligned}$$




2 pav. LITIN indekso reikšmių aproksimacijos liekanos $\hat{Z}_t = x_t - \hat{m}_t$.




3 pav. LITIN indekso reikšmių aproksimacijos liekanų koreliacinė bei dalinės autokoreliacijos funkcijos.

(Nes $(2q+1)^{-1}\sum_{j=-q}^{q} m_{t+j}^* = m_t^*$ su $m_j^* = aj + b$.) Tokiu atveju laikysime, kad trendo $m_t$ įvertis yra

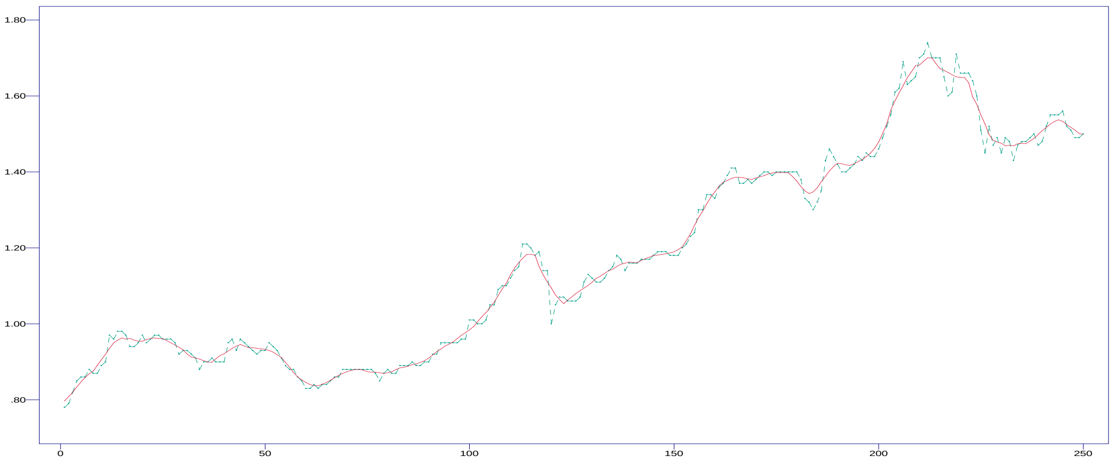
$$\hat{m}_t = \frac{1}{2q+1}\sum_{j=-q}^{q} x_{t+j}, \qquad q+1 \leqslant t \leqslant n-q. \tag{1.4}$$

Likusioms $x_t$ reikšmėms (kai $t \leqslant q$ ir $t > n-q$) (1.4) netinka ir šios reikšmės aproksimuojamos naudojant eksponentinį suglodinimą

$$\begin{aligned}\hat{m}_t &= \sum_{j=0}^{n-t} \alpha(1-\alpha)^j x_{t+j}, \qquad t = 1, \ldots, q,\\ \hat{m}_t &= \sum_{j=0}^{t-1} \alpha(1-\alpha)^j x_{t-j}, \qquad t = n-q+1, \ldots, n.\end{aligned}$$

Empiriškai nustatyta, kad $\alpha$ reikėtų parinkti iš intervalo [0,1;0,3]. Kartais siūloma nestebimas reikšmes $x_t$, $t \leqslant 0$ ar $t > n$ apibrėžti paprasčiausiai imant $x_t := x_1$ kai $t \leqslant 0$ ir $x_t := x_n$ kai $t > n$.

4 pavaizduotos Lietuvos telekomo akcijų uždarymo kainos NVP biržoje laikotarpiu 2002.11.04–2003.10.28 ir slenkamojo vidurkio trendo įvertis su $q = 3$.




4 pav. Lietuvos telekomo akcijų kasdieninės uždarymo kainos NVP biržoje laikotarpiu 2002.11.04 – 2003.10.28 ir slenkamojo vidurkio trendo įvertis su $q = 3$.

Šį suglodinimo metodą galima laikyti „žemo dažnio“ filtru, kuris iš duomenų $x_t$ „išima“ dažnai svyruojančią komponentę $\hat{Z}_t = x_t - \hat{m}_t$ ir palieka lėtai besikeičiančią dalį $\hat{m}_t$. Pastarąjį metodą galima interpretuoti kaip bendro tiesinio filtro $\hat{m}_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j x_{t+j}$ atskirą atvejį.

Įdomus pavyzdys buvo pasiūlytas anglų aktuarijaus Spencer'io 1904 metais. Jis pasiūlė 15 taškų filtrą, kuris neturi poveikio kūbiniam daugianariui. Tegul

$$\begin{aligned} a_i &= a_{-i}, \quad i = 1, \ldots, 7, \\ a_i &= 0, \quad |i| > 7, \\ (a_0, a_1, \ldots, a_7) &= \frac{1}{320}\,(74; 67; 46; 21; 3; -5; -6; -3). \end{aligned}$$

Taikant jį daugianariui $m_t = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$, turėsime

$$\sum_{i=-7}^{7} a_i m_{t+i} = m_t.$$

Šis pavyzdys sako, kad idealiu atveju galima parinkti tokį tiesinį filtrą, kuris nepakeistų trendo dalies. Bendrai, Spencer'io pavyzdį galima lengvai suprasti šio gana trivialaus teiginio, kurį paliekame įrodyti skaitytojui, kontekste:

**1.1 teiginys.** $m_t = \sum_{i=-q}^{q} a_i m_{t+i}$ *visiems* $k$*-os eilės daugianariams* $m_t = c_0 + c_1 t + \cdots + c_k t^k$ *tada ir tik tada, kai*

$$\sum_{i=-q}^{q} a_i = 1$$

*ir*

$$\sum_{i=-q}^{q} i^l a_i = 0 \quad \textit{su visais } l = 1, \ldots, k.$$

*Eksponentinis suglodinimas.* Vienas iš suglodinimo metodo trūkumų yra tas, kad pagal (1.4) lygybę, šį filtrą galima taikyti tik tai duomenų daliai, kuri nėra arti imties kraštų. Minėtas suglodinimas imties galuose gali būti taikomas ir visai imčiai. Toks metodas vadinamas eksponentiniu suglodinimu. Nagrinėkime filtrą

$$\hat{m}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^j x_{t-j},$$

kur $0 < \alpha < 1$. Aišku, norint jį taikyti imčiai $x_1, \ldots, x_n$, reikia nagrinėti „nupjautas“ sumas. Praktiškai eksponentiškai suglodintas trendas gaunamas iš rekurentinių lygybių

$$\begin{aligned} \hat{m}_1 &= x_1, \\ \hat{m}_t &= \alpha x_t + (1-\alpha)\hat{m}_{t-1}, \quad t = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Iš šių lygybių matome, kad su $\alpha = 1$ eksponentinis suglodinimas „neveikia“, nes $\hat{m}_t = x_t$ su visais $t = 1, \ldots, n$; tuo tarpu su $\alpha = 0$ gaunamas „maksimalus“ suglodinimas – $\hat{m}_t = x_1$ su visais $t = 1, \ldots, n$. Dažnai parametrą $\alpha$ siūloma parinkti optimaliai – minimizuojant liekanų sumą $\sum_{j=2}^{n}(x_j - \hat{m}_j)^2$.

5 pavaizduotos Lietuvos telekomo akcijų uždarymo kainos NVP biržoje laikotarpiu 2002.11.04 – 2003.10.28 ir eksponentinio suglodinimo metodu įvertintas trendas.

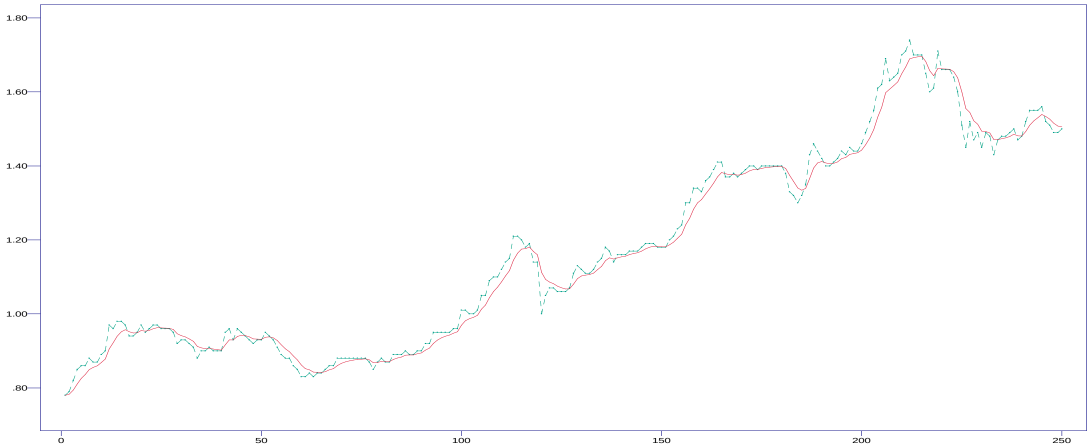
*Skirtumų panaudojimas.* Tai yra vienas populiariausių metodų, naudojamas kaip alternatyva ankstesniems dviem metodams. Jo esmė – trendo eliminavimas nagrinėjant skirtumus („diferencijuojant” duomenis) $X_t - X_{t-1}$. Šis metodas taikytinas tada, kai svarbu yra ne tiek įvertinti trendą, kiek, žinant jo iš anksto jo formą, jį eliminuoti ir toliau tirti „mikroskopinę“ komponentę.

Nusakysime šį metodą tiksliau. Apibrėžkime skirtuminį operatorių $\nabla$ lygybe

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = (1-B)X_t,$$

kur $B$ yra postūmio operatorius, t. y. $BX_t = X_{t-1}$. Operatorių $B$ ir $\nabla$ laipsniai apibrėžiami lygybėmis $B^j X_t = X_{t-j}$ ir $\nabla^j X_t = \nabla(\nabla^{j-1}X_t)$, $j \geqslant 1$ su $\nabla^0 X_t \equiv X_t$. Pavyzdžiui,

$$\begin{aligned} \nabla^2 X_t &= \nabla(\nabla X_t) = (1-B)(1-B)X_t \\ &= (1 - 2B + B^2)X_t \\ &= X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}. \end{aligned}$$




5 pav. Lietuvos telekomo akcijų kasdieninės uždarymo kainos NVP biržoje laikotarpiu 2002.11.04 – 2003.10.28 ir eksponentinio suglodinimo metodu įvertintas trendas su $\alpha = 0,3$.

Jei skirtuminį operatorių taikysime tiesinio trendo modeliui (1.2) su $m_t = at + b$, tai gausime

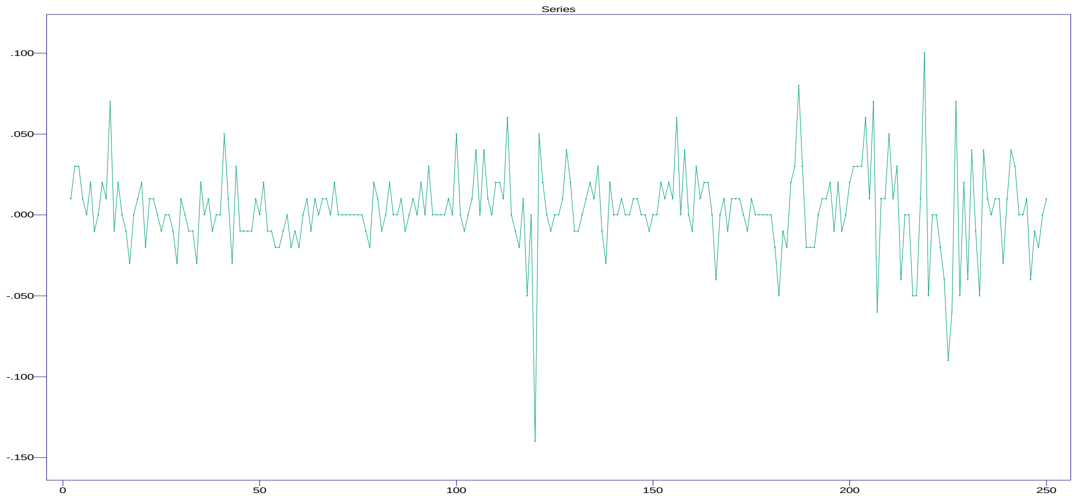
$$\begin{aligned}\nabla X_t &= \nabla m_t + \nabla Z_t \\ &= a + \nabla Z_t.\end{aligned}$$

Panašiai gauname, kad bendro polinominio trendo atveju su $m_t = \sum_{j=0}^{k} a_j t^j$

$$\nabla^k X_t = k!\, a_k + \nabla^k Z_t.$$

Taigi, skirtumų panaudojimas gali būti interpretuojamas kaip aukšto dažnio filtras, kuris „nufiltruoja“ žemo dažnio signalą $m_t$ (lėtai besikeičiančią dalį), palikdamas aukšto dažnio signalą. Tokiu būdu, atlikus „diferencijavimą“ pakankamą kartų skaičių, galima eliminuoti bet kokį polinominį trendą. Aišku, kad kiekvieną kartą panaudojus skirtumus, prarandame vieną stebėjimą.

6 pavaizduotos Lietuvos telekomo akcijų uždarymo kainų transformacija, panaudojant skirtumus.




6 pav. Lietuvos telekomo akcijų kasdieninių uždarymo kainų NVP biržoje laikotarpiu 2002.11.04–2003.10.28 skirtumai.

## 1.2 Trendo ir sezoninės dalies eliminavimas

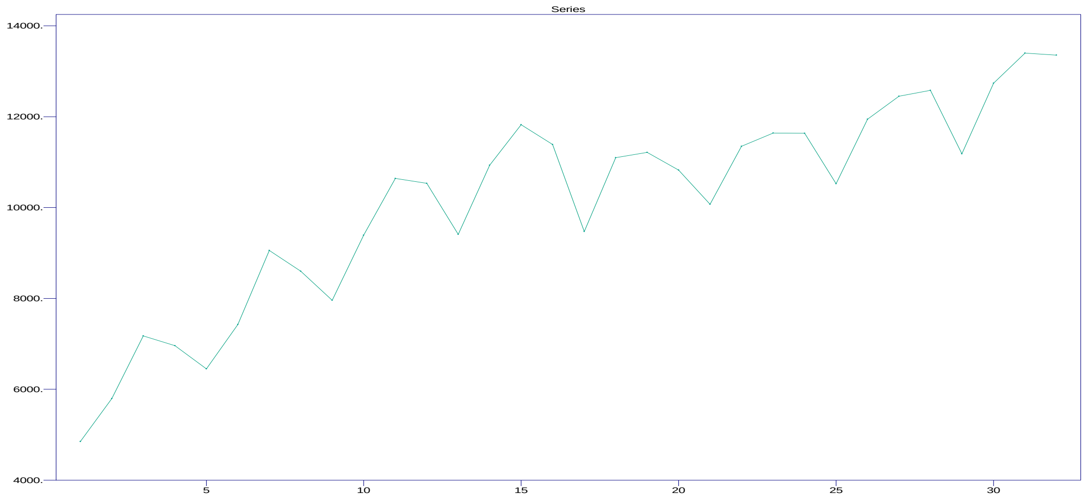
Laikykime, kad duomenis norime aprašyti (1.1) modeliu, kur $\mathrm{E}Z_t = 0$, o sezoninė dalis tenkina

$$s_{t+d} = s_t, \quad \sum_{t=1}^{d} s_t = 0.$$

Iliustracijai nagrinėkime tokį pavyzdį. Lentelėje žemiau pavaizduota Lietuvos BVP faktinėmis kainomis (milijonais litų) 1995–2002 metais. Atitinkamas grafikas pateiktas 7 paveiksle.

| | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 4851,5 | 6449,2 | 7957,4 | 9409,4 | 9471,5 | 10072,4 | 10524,4 | 11184,6 |
| II | 5796,6 | 7426,1 | 9389,9 | 10932,1 | 11099,8 | 11349,0 | 11943,5 | 12738,6 |
| III | 7172,4 | 9055,8 | 10639,9 | 11824,5 | 11213,3 | 11639,2 | 12449,8 | 13398,6 |
| IV | 6960,6 | 8598,2 | 10532,6 | 11388,5 | 10823,7 | 11637,3 | 12580,1 | 13356,8 |

Tegul $x_{j,k}$, $j = 1, \dots, 8$, $k = 1, \dots, 4$, žymi $j$-ųjų metų $k$-ojo ketvirčio reikšmę. Turime $x_{j,k} = x_{k+4(j-1)}$.




7 pav. BVP faktinėmis kainomis (milijonais litų) 1995–2002 metais.

1) Jeigu trendas yra nedidelis, tai galime laikyti, kad jis yra pastovus $j$-ųjų bėgyje ir gali būti įvertintas

$$\hat{m}_j = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} x_{j,k}.$$

Sezoninę komponentę tuomet įvertiname

$$\hat{s}_k = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8}(x_{j,k} - \hat{m}_j).$$

Matome, kad tada $\sum_{k=1}^{4}\hat{s}_k = 0$. Atėmus įvertintas trendo ir sezoniškumo komponentes, gauname liekanas

$$\hat{Z}_{j,k} = x_{j,k} - \hat{m}_j - \hat{s}_k.$$

2) Tuo atveju, kai trendas nėra pastovus kiekviename periode arba mes nenorime daryti šios prielaidos, taikytinas kitas, tikslesnis, metodas. Pirmiausia, žinant „ciklo“ ilgį $d$, galime eliminuoti sezoniškumo efektą, taikydami slenkamojo vidurkio metodą. Priklausomai nuo to, ar $d$ yra lyginis ar nelyginis, įvertiname trendą:

$$\hat{m}_t = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{2}x_{t-q} + x_{t-q+1} + \cdots + x_{t+q-1} + \frac{1}{2}x_{t+q}\right), \text{ kai } d = 2q$$

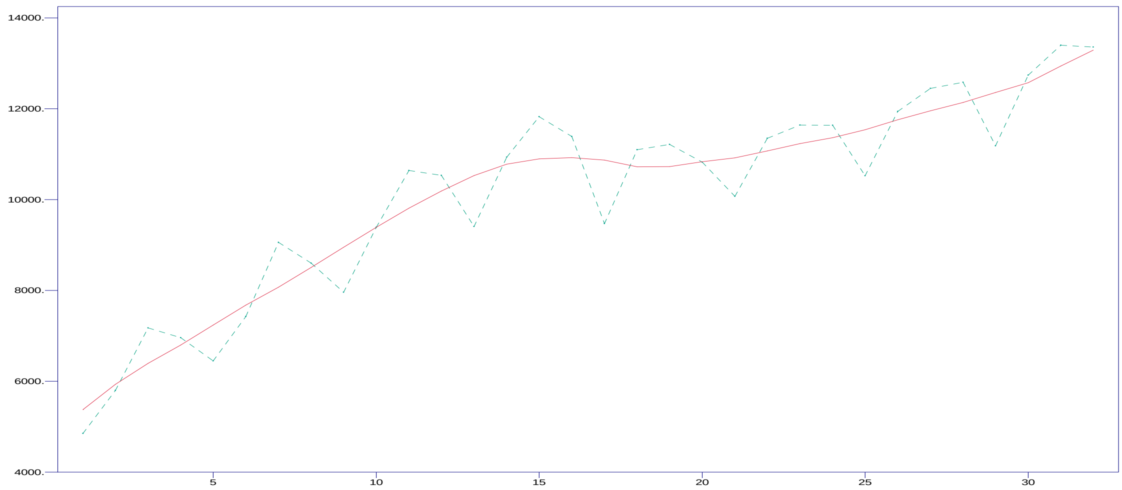
ir

$$\hat{m}_t = \frac{1}{d}\,(x_{t-q} + x_{t-q+1} + \dots + x_{t+q}),\ \text{kai } d = 2q+1;$$

čia $q < t \leqslant n-q$.

8 paveiksle pavaizduotas trendo įvertis $\hat{m}_t$ BVP duomenims su $d = 2q = 4$ (kraštiniams duomenims taikomas eksponentinis suglodinimas):

$$\hat{m}_t = \frac{1}{4}\,\Big(\frac{1}{2}\,x_{t-2} + x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + \frac{1}{2}\,x_{t+2}\Big).$$




8 pav. BVP reikšmių trendo įvertis, taikant slenkamojo vidurkio įvertį su $q = 2$.

Toliau vertiname sezoninę dalį. Kiekvienam $k = 1, \dots, d$ skaičiuojame dydžių $\{x_{k+jd} - \hat{m}_{k+jd},\ q < k + jd \leqslant n-q\}$ aritmetinį vidurkį. Mūsų pavyzdyje turėsime:

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{1}{7}\sum_{j=1}^{7}(x_{k+4j} - \hat{m}_{k+4d}),\ \text{kai } k = 1, 2, \\ w_k &= \frac{1}{7}\sum_{j=0}^{6}(x_{k+4j} - \hat{m}_{k+4d}),\ \text{kai } k = 3, 4. \end{aligned}$$

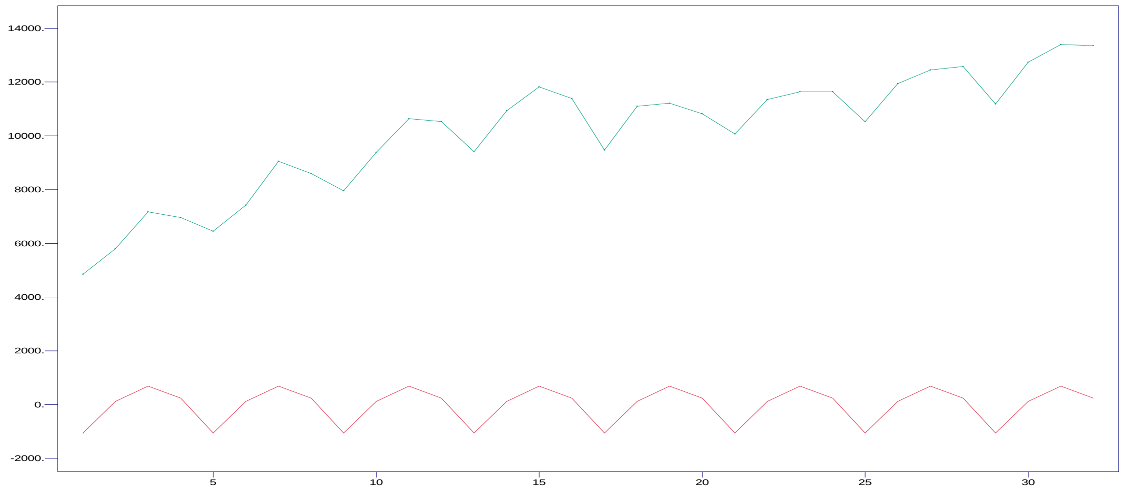
Taip gauti vidurkiai dar nėra sezoninės komponentės įverčiai, nes jų suma $\sum_{k=1}^{d} w_k$ nėra nulis. Sezoninę komponentę vertiname centruotomis $w_k$ reikšmėmis:

$$\hat{s}_k = w_k - \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} w_i, \quad k = 1, \ldots, d,$$

likusias reikšmes periodiškai pratęsiame, t. y. $\hat{s}_k = \hat{s}_{k-d}$, $k > d$. Pastebėsime, kad dabar

$$\sum_{k=1}^{d} \hat{s}_k = \sum_{k=1}^{d} \Big( w_k - \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} w_i \Big) = 0.$$

9 paveiksle pavaizduoti BVP duomenys ir trendo įvertis $\hat{s}_t$ ($\hat{s}_1 = -1055,7$, $\hat{s}_2 = 120,3$, $\hat{s}_3 = 691,46$, $\hat{s}_4 = 243,98$).




9 pav. BVP reikšmės ir sezoninė dalis $\hat{s}_t$.

Toliau nagrinėjame liekanas, gautas atėmus sezonininę komponentę

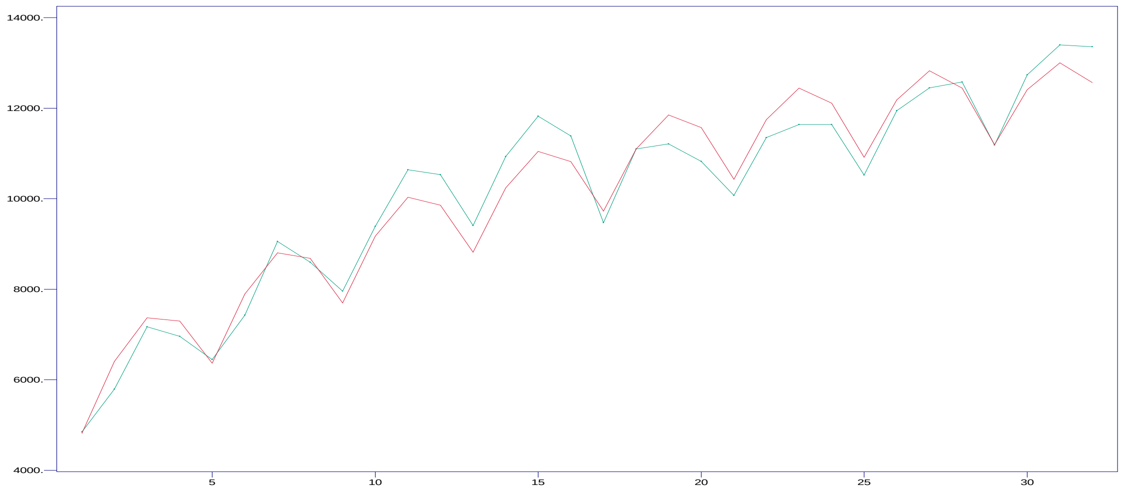
$$d_t = x_t - \hat{s}_t, \quad t = 1, \ldots, n.$$

Gautoji seka dar neatspindi trendo komponentės, kadangi joje lieka fluktuacijos. Toliau vertiname trendą „desezonizuotuose“ duomenys vienu iš anksčiau minėtų metodų. 10 paveiksle pavaizduoti BVP duomenys ir kreivė $\hat{d}_t + \hat{s}_t$, kur

$d_t$ įvertinti antros eilės daugianariu mažiausių kvadratų metodu (žr. (1.3)): $\hat{d}_t = -6,5852t^2 + 425,1t + 5460,5$. Liekanos

$$\hat{Z}_t = x_t - \hat{d}_t - \hat{s}_t = d_t - \hat{d}_t$$

pavaizduotos 11 paveiksle.




10 pav. BVP reikšmės ir seka $\hat{d}_t + \hat{s}_t$. Trendo įvertis $\hat{d}_t$ gautas mažiausių kvadratų metodu, aproksimuojant jį antros eilės daugianariu.

*Sezoninių skirtumų panaudojimas.* Ankstesnis skirtumų metodas gali būti taikomas ir sezoninės komponentės eliminavimui. Tegul $\nabla_d$ yra $d$-skirtumų operatorius:

$$\nabla_d X_t = X_t - X_{t-d} = (1 - B^d)X_t.$$

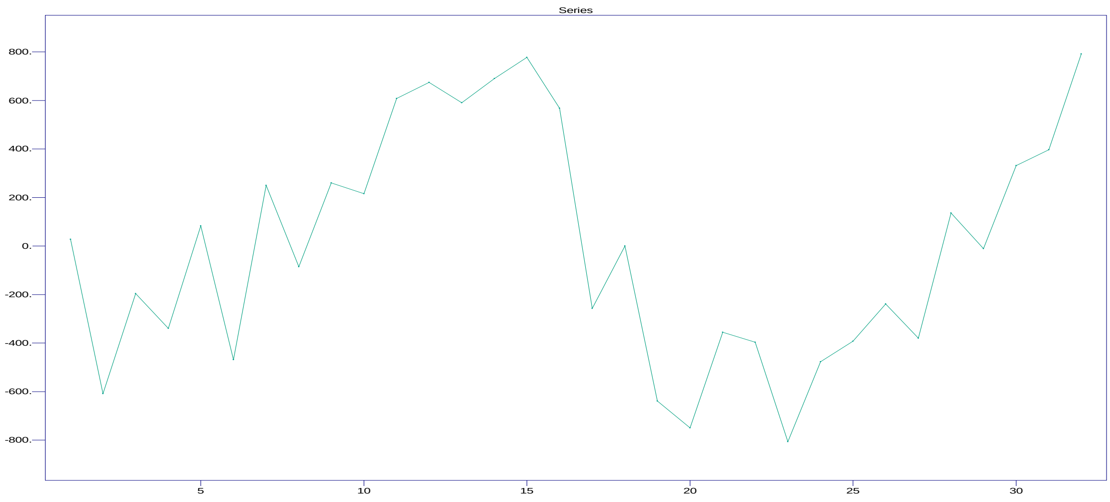
Tuomet taikant šį operatorių modeliui

$$X_t = m_t + s_t + Z_t,$$

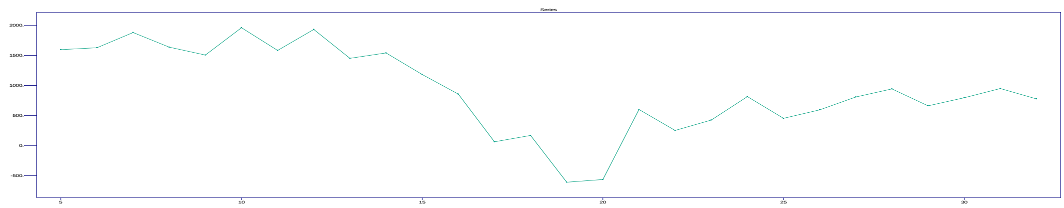
kuriame $s_t$ yra $d$-periodinė funkcija, gausime skirtumų $\nabla_d X_t$ išdėstymą į trendo $m_t - m_{t-d}$ ir triukšmo $Z_t - Z_{t-d}$ komponentes:

$$\nabla_d X_t = m_t - m_{t-d} + Z_t - Z_{t-d}.$$

Tolimesnė analizė atliekama vienu iš išvardintų 1.1 skyrelyje metodų. 12 paveiksle pavaizduoti BVP reikšmių skirtumai $\nabla_4 x_t$.

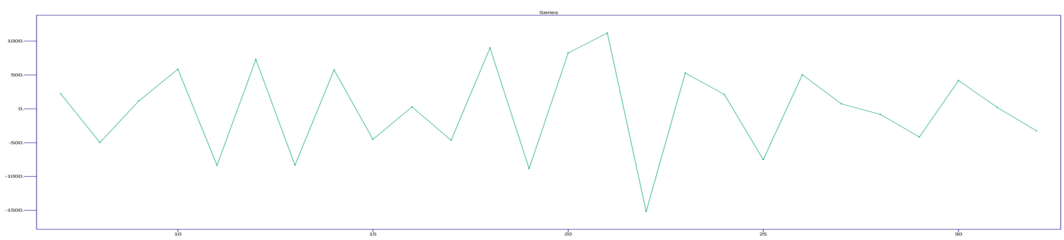



11 pav. Liekanos $\hat{Z}_t = x_t - \hat{d}_t - \hat{s}_t$ BVP duomenims.



12 pav. BVP reikšmių skirtumai $\nabla_4 x_t$.

Jeigu eliminavus sezoninę komponentę matoma trendo komponentė, tikslinga dar kartą „diferencijuoti“ duomenis tiek kartų, kiek prireiks trendui „išnaikinti“. 13 paveiksle pavaizduoti BVP reikšmių skirtumai $\nabla^2\nabla_4 X_t$.



13 pav. BVP reikšmių skirtumai $\nabla^2\nabla_4 x_t$.

# 2 Atsitiktiniai procesai

**2.1 apibrėžimas.** Atsitiktiniu procesu vadinama atsitiktinių dydžių, apibrėžtų vienoje tikimybinėje erdvėje, šeima $\{X_t, t \in T\}$.

Laiko eilučių teorijoje kintamasis $t$ vadinamas laiku ir jo reikšmių aibė $T$ dažniausiai yra $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ (diskretaus laiko atvejis) arba $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ (tolydaus laiko atvejis).

*2.1* PAVYZDYS. Tarkime, $\nu \geqslant 0$ ir $r > 0$ yra du fiksuoti skaičiai, o $A \geqslant 0$ ir $\Theta$ – nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $\Theta$ – tolygiai pasiskirstęs intervale $[0, 2\pi)$. Apibrėžkime

$$X_t = r^{-1} A \cos(\nu t + \Theta).$$

Tokiu atsitiktiniu procesu aprašomas elektros srovės stiprio kitimas, kai įtampa turi atsitiktinę amplitudę $A$ ir atsitiktinę fazę $\Theta$; $r$ – rezistoriaus varža. Laikas $t$ gali būti tiek tolydus, tiek ir diskretus.

*2.2* PAVYZDYS. Standartiniu Brown'o judesiu (arba Wiener'io procesu) vadinamas procesas $\{W(t), t \geqslant 0\}$, tenkinantis sąlygas:

- $W(0) = 0$;
- su visais $n = 3, 4, \dots$ ir su visais rinkiniais $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ pokyčiai $W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ yra nepriklausomi;
- $W(t) - W(s) \sim \mathrm{N}(0, t - s)$, kai $t \geqslant s$.

A priori nėra akivaizdu, kad atsitiktinis procesas su tokiomis savybėmis egzistuoja. Jo egzistavimas išplaukia iš fundamentalios Kolmogorovo teoremos, kurią dabar suformuluosime.

Iš pradžių nusakysime atsitiktinio proceso $\{X_t\}$ daugiamates pasiskirstymo funkcijas. Taip vadinamas funkcijų

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{X_{t_1} \leqslant x_1, \dots, X_{t_n} \leqslant x_n\}$$

rinkinys; čia: $n = 1, 2, \dots,$ $t_1, \dots, t_n \in T \subset \mathbb{R}$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ ir $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

**2.1 teorema.** *Funkcijos* $\{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n), t_1 < t_2 < \dots < t_n, n = 1,2,...\}$ *yra kokio nors atsitiktinio proceso daugiamatės pasiskirstymo funkcijos tada ir tik tada, kai su visais* $n = 1,2,...$, $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ *ir* $k = 1,2,\dots,n$ *teisinga sąlyga*

$$\lim_{x_k \to \infty} F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = F_{t_1,\dots,t_{k-1},t_{k+1},\dots,t_n}(x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n). \tag{2.1}$$

*2.1* PASTABA. Pastaroji lygybė vadinama suderinamumo sąlyga. Svarbu yra įsidėmėti, kad reikalavimas $T \subset \mathbb{R}$ (tada $T$ yra tiesiškai sutvarkyta aibė) yra esminis. Jeigu $T$ nėra sutvarkyta aibė, papildomai reikėtų reikalauti, kad būtų išpildyta „perstatos“ sąlyga.

*2.2* PASTABA. Suderinamumo sąlygą galima suformuluoti ir charakteristinių funkcijų terminais. Jei

$$\varphi_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{j=1}^n u_j x_j} F_{t_1,\dots,t_n}(\mathrm{d}x_1,\dots,\mathrm{d}x_n),$$

tai suderinamumo sąlyga ekvivalenti lygybei

$$\lim_{u_k \to 0} \varphi_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n) = \varphi_{t_1,\dots,t_{k-1},t_{k+1},\dots,t_n}(u_1,\dots,u_{k-1},u_{k+1},\dots,u_n). \tag{2.2}$$

*2.1* PRATIMAS. Parodykite, kad 2.2 pavyzdyje apibrėžtas Wiener'io procesas tenkina suderinamumo sąlygą.

# 3 Stacionarieji procesai

## 3.1 Stacionarumas plačiąja ir siaurąja prasme

**3.1 apibrėžimas.** Atsitiktinio proceso $\{X_t, t \in T\}$, su visais $t \in T$ tenkinančio sąlygą $\mathrm{D}X_t < \infty$, kovariacinė funkcija apibrėžiama lygybe

$$r(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathrm{E}(X_s - \mathrm{E}X_s)(X_t - \mathrm{E}X_t), \quad s,t \in T. \tag{3.1}$$

**3.2 apibrėžimas.** Seka $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ vadinama stacionaria, jeigu:

1) $\forall t \in \mathbb{Z} \quad \mathrm{E}X_t^2 < \infty$,

2) $\forall t \in \mathbb{Z} \quad \mathrm{E}X_t = \mathrm{E}X_0$,

3) $r(s,t) = r(s+h, t+h)$ su visais $s, t, h$ iš $\mathbb{Z}$.

Dažnai literatūroje taip apibrėžtas stacionarumas vadinamas stacionarumu plačiąja (arba silpnąja) prasme.

Kadangi stacionariai sekai tesinga $r(s,t) = r(s-t, 0)$ su visais $s, t \in \mathbb{Z}$, tai patogiau kovariacinę funkciją traktuoti kaip vieno argumento funkciją ir rašyti (ką mes nuo šiol ir darysime) tiesiog $r(s) \equiv r(s, 0)$ visiems $s \in \mathbb{Z}$.

Stacionarios sekos *koreliacinė* funkcija apibrėžiama lygybe

$$\rho(h) = r(h)/r(0)$$

su $h \in \mathbb{Z}$.

Nors stacionarumo apibrėžimas duodamas $T = \mathbb{Z}$ atveju, aišku, kad analogiškas apibrėžimas gali būti pateiktas ir bendresnei aibei T. Tačiau mūsų tikslams (nagrinėjamos diskrečios laiko eilutės) pakanka duoto apibrėžimo.

Dažnai praktikoje susiduriama ir su poreikiu nagrinėti aukštesnės eilės stacionarumo sąvoką.

**3.3 apibrėžimas.** Sakysime, kad $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra $m$-osios eilės stacionari seka, jeigu egzistuoja visi mišrieji vektorių

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$$

momentai iki $m$-os eilės ir jie yra invariantiški postūmio atývilgiu, t. y.

$$\mathrm{E}X_{t_1}^{\alpha_1} X_{t_2}^{\alpha_2} \cdots X_{t_n}^{\alpha_n} = \mathrm{E}X_{t_1+h}^{\alpha_1} X_{t_2+h}^{\alpha_2} \cdots X_{t_n+h}^{\alpha_n}$$

su visais $n \in \mathbb{N}$, $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$, $h \in \mathbb{Z}$ ir $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \leqslant m$.

**3.4 apibrėžimas.** Seka $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ vadinama stacionaria siaurąja (arba griežtąja) prasme, jeigu su visais $k \in \mathbb{N}$ $t_1, t_2, ..., t_k$ ir $h$ iš $\mathbb{Z}$ vektorių $(X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ ir $(X_{t_1+h}, ..., X_{t_k+h})$ pasiskirstymai sutampa.

Nesunku matyti, jeigu seka $\{X_t\}$ yra stacionari siaurąja prasme ir $\mathrm{E}X_t^2 < \infty$ , tai ji yra stacionari ir plačiąja prasme. Atvirkščias gi teiginys nėra teisingas (3.4 pratimas). Tačiau Gauso sekų klasėje abu stacionarumo apibrėžimai yra ekvivalentūs. Iš pradžių apibrėšime Gauso procesą.

**3.5 apibrėžimas.** Atsitiktinis procesas $\{X_t, t \in T\}$ vadinamas Gauso procesu, jeigu visi jo daugiamačiai pasiskirstymai yra normalieji.

Priminsime, kad atsitiktinis vektorius $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ vadinamas normaliai pasiskirsčiusiu su parametrais $a$ ir $\Gamma$, jeigu jo $n$-matė charakteristinė funkcija $\varphi(\lambda) = \mathrm{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda,\xi)}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, yra tokio pavidalo:

$$\varphi(\lambda) = \mathrm{e}^{i(\lambda,a)-(\Gamma\lambda,\lambda)/2}; \tag{3.2}$$

čia: $a = (a_1, \dots, a_n)$, $\Gamma = (\Gamma_{kl})$ – simetrinė ir neneigiamai apibrėžta matrica. Galima patikrinti (žr. 3.3 pratimą), kad $a_k = \mathrm{E}\xi_k$, $\Gamma_{kl} = \mathrm{E}(\xi_k - a_k)(\xi_l - a_l)$.

**3.1 teorema.** *Stacionari plačiąja prasme Gauso seka $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra stacionari ir siaurąja prasme.*

*Įrodymas.* Kadangi seka $\{X_t\}$ yra stacionari plačiąja prasme, tai vektorių $(X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ ir $(X_{t_1+h}, ..., X_{t_k+h})$ vidurkiai ir kovariacinės matricos sutampa. Taigi šie vektoriai turi vieną ir tą patį pasiskirstymą. □

*3.1* PAVYZDYS. Apibrėžkime atsitiktinį procesą

$$X_t = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t);$$

čia: $A$ ir $B$ yra nekoreliuoti atsitiktiniai dydžiai su $\mathrm{E}A = \mathrm{E}B = 0$, $\mathrm{D}A = \mathrm{D}B = 1$ ir $\theta \in [-\pi, \pi]$. Nesunku įsitikinti, kad toks atsitiktinis procesas yra stacionarus ir $\mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \cos(\theta h)$.

*3.2* PAVYZDYS. Tarkime $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių su nuliniu vidurkiu ir dispersija $\sigma^2$ seka. Seką $\{X_t\}$ apibrėžkime lygybe

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}.$$

Tada $\mathrm{E}X_t = 0$ ir

$$\mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2, & \text{kai } h = 0, \\ \theta\sigma^2, & \text{kai } |h| = 1, \\ 0, & \text{kai } |h| > 1. \end{cases}$$

Vadinasi, seka $\{X_t\}$ yra stacionari.

*3.1* PRATIMAS. Tarkime $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, $t \in \mathbb{Z}$, čia $\{Z_t\}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su generuojančiąja momentų funkcija $\mathrm{E}e^{\lambda Z_i} = m(\lambda)$. Išreikšdami generuojančiąją momentų funkciją $\mathrm{E}\exp\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j X_j\right)$ funkcijos $m(\cdot)$ terminais, parodykite, kad $\{X_t\}$ yra stacionari siaurąja prasme seka.

*3.2* PRATIMAS. Tegul atsitiktinė seka apibrėžta lygybe

$$X_t = \cos(\nu t + \Phi), \quad t \in \mathbb{Z}; \tag{3.3}$$

čia: $\Phi$ – tolygiai intervale $(0, 2\pi]$ pasiskirstęs atsitiktinis dydis, $\nu \geqslant 0$. Parodykite, kad (3.3) seka stacionari.

*3.3* PRATIMAS. Tegul Gauso atsitiktinio vektoriaus $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ charakteristinė funkcija yra (3.2) pavidalo. Parodykite, kad $a_k = \mathrm{E}\xi_k$, $\Gamma_{kl} = \mathrm{Cov}(\xi_k, \xi_l)$.

*3.4* PRATIMAS. Sukonstruokite atsitiktinių dydžių seką $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, kuri būtų stacionari plačiąja prasme, bet nestacionari siaurąja prasme.

## 3.2 Stacionarios sekos kovariacinės funkcijos savybės

**3.1 teiginys.** *Tarkime, $r(\cdot)$ – stacionarios sekos $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ kovariacinė funkcija. Tada:*

*1) $r(0) \geqslant 0$,*

*2) $|r(h)| \leqslant r(0)$ su visais $h$,*

*3) $r(-h) = r(h)$ su visais $h$.*

*Įrodymas.* 1) ir 3) savybės išplaukia iš 3.2 apibrėžimo. Norint patikrinti 2) savybę, tereikia panaudoti Koši nelygybę. □

Išvardintosios savybės tėra tik *būtinos* sąlygos, t. y. jeigu bent viena iš šių savybių nebūtų išpildyta, tai $r(\cdot)$ nebūtų kovariacinė funkcija. Būtina ir pakankama sąlyga nusakoma remiantis funkcijos neneigiamo apibrėžtumo sąvoka.

**3.6 apibrėžimas.** Funkcija $r : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ vadinama neneigiamai apibrėžta, jeigu $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, $(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{Z}^n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j r(t_i - t_j) \geqslant 0.$$

**3.2 teorema.** *Lyginė funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ yra stacionariosios sekos kovariacinė funkcija tada ir tik tada, kai ji yra neneigiamai apibrėžta.*

*Įrodymas.* B ū t i n u m a s. Tarkime, $f(\cdot)$ yra stacionarios sekos $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ kovariacinė funkcija. Tada

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j f(t_i - t_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \mathrm{E}(X_{t_i} - \mathrm{E}X_{t_i})(X_{t_j} - \mathrm{E}X_{t_j}) \\ &= \mathrm{E}\Bigg(\sum_{i=1}^{n} a_i (X_{t_i} - \mathrm{E}X_{t_i})\Bigg)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

P a k a n k a m u m a s. Sakykime $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ yra lyginė neneigiamai apibrėžta funkcija. Įrodydami, jog egzistuoja stacionarus procesas, kurio kovariacinė funkcija yra $f(\cdot)$, pasinaudosime Kolmogorovo teorema. Apibrėžkime funkciją

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_n}(u_1, \ldots, u_n) = \mathrm{e}^{-1/2 \sum_{i,j=1}^{n} u_i u_j f(t_i - t_j)}. \tag{3.4}$$

Kadangi $f(\cdot)$ yra lyginė ir neneigiamai apibrėžta, tai (3.4) yra normaliai pasiskirsčiusio vektoriaus charakteristinė funkcija. Akivaizdu, kad ši funkcija tenkina (2.2) suderinamumo sąlygą. Vadinasi, egzistuoja toks atsitiktinis procesas, kurio baigtiniamačių pasiskirstymų charakteristinės funkcijos yra (3.4) funkcijos. Iš 3.3 pratimo išplaukia, kad $f(i - j) = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. $\square$

Iš 3.2 teoremos išplaukia, kad bet kokiai lyginei neneigiamai apibrėžtai funkcijai galima sukonstruoti stacionarų Gauso procesą, kurio kovariacinė funkcija būtų ši funkcija.

*3.5* PRATIMAS. Parodykite, kad kovariacinei funkcijai teisinga nelygybė

$$(r(n) - r(m))^2 \leqslant 2r(0)(r(0) - r(n-m)).$$

*3.6* PRATIMAS. Parodykite, kad funkcija $r : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, apibrėžiama lygybėmis

$$r(h) = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ \rho, & |h| = 1, \\ 0, & |h| > 1, \end{cases}$$

yra stacionarios sekos kovariacinė funkcija tada ir tik tada, kai $|\rho| \leqslant 1/2$.

# 4 Autoregresijos–slenkamojo vidurkio sekos

Pagrindinę praktikoje naudojamų laiko eilučių klasę sudaro vadinamieji autoregresijos–slenkamojo vidurkio modeliai. Šiame skyrelyje nusakysime šiuos modelius ir jų savybes.

## 4.1 Stacionarūs ARMA modeliai

Pirmiausia apibrėšime balto triukšmo seką.

**4.1 apibrėžimas.** Stacionari seka $\{Z_t\}$ vadinama balto triukšmo seka su vidurkiu 0 ir dispersija $\sigma^2$, jeigu $\mathrm{E}Z_t = 0$ ir

$$r(h) = \begin{cases} \sigma^2, & h = 0, \\ 0, & h \neq 0. \end{cases}$$

Žymėsime $Z_t \sim \mathrm{BT}(0, \sigma^2)$.

**4.2 apibrėžimas.** Procesas $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ vadinamas autoregresijos–slenkamojo vidurkio procesu, jeigu $\{X_t\}$ yra stacionarus ir su visais $t$

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - ... - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + ... + \theta_q Z_{t-q}; \qquad (4.1)$$

čia $Z_t \sim \mathrm{BT}(0, \sigma^2)$. Tokią seką žymėsime ARMA$(p, q)$.

(4.1) lygybę galima užrašyti trumpiau:

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t, \quad t \in \mathbb{Z}; \qquad (4.2)$$

čia:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= 1 - \phi_1 z - ... - \phi_p z^p, \\ \theta(z) &= 1 + \theta_1 z + ... + \theta_q z^q \end{aligned}$$

ir $B$ yra postūmio operatorius, t. y. $B^j X_t = X_{t-j}$, $j = 0, 1, \ldots$. Daugianariai $\phi(\cdot)$ bei $\theta(\cdot)$ vadinami atitinkamai autoregresijos bei slenkamojo vidurkio daugianariais.

*4.1* PAVYZDYS. (MA$(q)$ procesas). Jei lygtyje (4.1) $\phi(z) \equiv 1$, t. y.

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q},$$

tai seką $\{X_t\}$ vadinsime $q$-osios eilės slenkamojo vidurkio seka (MA($q$)). Akivaizdu, kad $\mathrm{E}X_t = 0$ ir

$$\mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \begin{cases} \sigma^2 \sum\limits_{j=0}^{q-|h|} \theta_j \theta_{j+|h|}, & |h| \leqslant q, \\ 0, & |h| > q, \end{cases}$$

čia $\theta_0 = 1$. Taigi $\{X_t\}$ yra stacionari seka.

Detaliau panagrinėsime atvejį, kai (4.1) lygtyje $p = 1$, $\theta(z) \equiv 1$ ir $\phi(z) = 1 - \phi z$:

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{4.3}$$

Tada

$$\begin{aligned} X_t &= Z_t + \phi(Z_{t-1} + \phi X_{t-2}) \\ &= \cdots = Z_t + \phi Z_{t-1} + \phi^2 Z_{t-2} + \cdots + \phi^k Z_{t-k} + \phi^{k+1} X_{t-k-1}. \end{aligned}$$

Sakykime, $\mathrm{E}X_t^2 \equiv \mathrm{const} < \infty$. Tada, jeigu $|\phi| < 1$, tai

$$\mathrm{E}\Bigl(X_t - \sum_{j=0}^{n} \phi^j Z_{t-j}\Bigr)^2 = \phi^{2n+2} \mathrm{E}X_{t-n-1}^2 \to 0, \tag{4.4}$$

kai $n \to \infty$. Todėl rašysime

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i Z_{t-i}, \tag{4.5}$$

reiškinį dešinėje pusėje laikydami dalinių sumų riba kvadratinio vidurkio prasme. Nesunku matyti, kad taip apibrėžta seka yra stacionari su šiais vidurkiu ir kovariacija:

$$\mathrm{E}X_t = 0, \quad \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \sigma^2 \frac{\phi^{|h|}}{1 - \phi^2}.$$

Be to, (4.5) lygybė teisinga ir su tikimybe 1 ir šis sprendinys yra vienintelis (žr. 4.1 pratimą).

Jeigu $|\phi| > 1$, tai panašiai įsitikiname, kad

$$X_t = -\sum_{i=1}^{\infty} \phi^{-i} Z_{t+i}$$

yra vienintelis stacionarus (4.3) lygties sprendinys. Tuo tarpu, jei $|\phi| = 1$, tai AR(1) (4.3) lygtis stacionaraus sprendinio neturi (paliekame šį uždavinį kaip pratimą skaitytojui).

Aukščiau gautas AR(1) lygties su $|\phi| < 1$ sprendinys (4.5) priklauso nuo balto triukšmo sekos reikšmių momentais $t, t-1, t-2, \ldots$, t. y. išreiškiamas „praeities" stebėjimais. Tokia sąryšio su $\{Z_t\}$ savybė vadinama kauzalumu. Bendru atveju iš 4.1 pratimo išplaukia, kad operatoriai $\psi(B) \equiv \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i B^i$ su $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\psi_i| < \infty$ stacionarias laiko eilutes perveda į stacionarias. Dažnai tokie operatoriai vadinami tiesiniais filtrais su svoriais $\{\psi_i\}$. Taikomuoju požiūriu svarbūs vadinamieji realiai įgyvendinami filtrai, atitinkantys kauzalų išėjimo srautą. Pirmiausią duosime griežtą kauzalaus ARMA proceso apibrėžimą.

**4.3 apibrėžimas.** ARMA$(p, q)$ procesas, apibrėžtas (4.2) lygtimis, vadinamas *kauzaliu*, jeigu egzistuoja tokia absoliučiai sumuojama seka $\{\psi_i, i \geqslant 0\}$, kad

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i Z_{t-i}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Dabar suformuluosime būtinas ir pakankamas sąlygas, su kuriomis ARMA$(p, q)$ procesas yra kauzalus, bei pademonstruosime, kaip tokiu atveju apskaičiuoti koeficientus $\{\psi_i, i \geqslant 0\}$.

**4.1 teorema.** *Sakykime, $\{X_t\}$ – ARMA(p,q) seka, ir $\phi(\cdot)$ su $\theta(\cdot)$ neturi bendrų nulių. Laiko eilutė $\{X_t\}$ yra kauzali tada ir tik tada, kai $\phi(z) \neq 0$ su visais $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leqslant 1$. Koeficientai $\{\psi_i, i \geqslant 0\}$ apskaičiuojami iš sąryšio*

$$\psi(z) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i z^i = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}, \quad |z| \leqslant 1. \tag{4.6}$$

*Įrodymas.* B ū t i n u m a s. Sakykime, $\{X_t\}$ – kauzalioji ARMA$(p, q)$ laiko eilutė, t. y. $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$; čia $\{\psi_j\}$ – absoliučiai sumuojama seka. Tada (4.2) lygtį galime užrašyti taip:

$$\theta(B) Z_t = \phi(B) \psi(B) Z_t.$$

Pažymėję $\nu(z) = \phi(z)\psi(z) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j z^j$ su $|z| \leqslant 1$, gauname

$$\sum_{j=0}^{q} \theta_j Z_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j Z_{t-j}.$$

Skaliariškai padauginę lygybę iš $Z_{t-k}$, išvedame lygybes $\nu_k = \theta_k$, kai $k \leqslant q$ ir $=0$, kai $k > q$. Taigi

$$\theta(z) = \nu(z) = \phi(z)\psi(z), \quad |z| \leqslant 1. \tag{4.7}$$

Tarkime, egzistuoja toks $z_0$, kad $|z_0| \leqslant 1$ ir $\phi(z_0) = 0$. Kadangi $|\psi(z)| < \infty$, $\forall |z| \leqslant 1$, tai iš (4.7) išplaukia, kad $\theta(z_0) = 0$. Tai prieštarauja prielaidai, kad $\phi(\cdot)$ ir $\theta(\cdot)$ neturi bendrų nulių.

P a k a n k a m u m a s. Sakykime, kad $\phi(z) \neq 0$ skritulyje $|z| \leqslant 1$. Tada galima rasti tokį $\varepsilon > 0$, kad visi $\phi(z)$ nuliai būtų skritulio $|z| \leqslant 1 + \varepsilon$ išorėje. Tuomet srityje $|z| \leqslant 1 + \varepsilon$ turime

$$\frac{1}{\phi(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j z^j \equiv \xi(z).$$

Iš būtino eilutės konvergavimo požymio išplaukia, kad $\xi_j(1+\varepsilon)^j \to 0$, kai $j \to \infty$. Todėl egzistuoja toks $M$, $0 < M < \infty$, kad

$$|\xi_j| < M(1+\varepsilon)^{-j}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Taigi $\sum_0^\infty |\xi_j| < \infty$ ir galime rašyti

$$\xi(B)\phi(B)X_t = \xi(B)\theta(B)Z_t,$$

arba

$$X_t = \xi(B)\theta(B)Z_t.$$

Iš čia iš išplaukia, kad

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j};$$

čia absoliučiai sumuojama seka $\{\psi_j\}$ apibrėžiama (4.6) sąryšiu. □

*4.1* PASTABA. Iš būtinumo įrodymo matome, kad bet kuris stacionarus ARMA lygties su $\phi(z) \neq 0$, $|z| \leqslant 1$ sprendinys $X_t$ turi pavidalą $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ su seka $\{\psi_j\}$, apibrėžta (4.6) lygybe. Kita vertus, akivaizdu, kad $X_t = \psi(B)Z_t$ tenkina (4.2) ARMA lygtį. Vadinasi, $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ yra *vienintelis* ARMA lygties sprendinys, jeigu $\phi(z) \neq 0$ su $|z| \leqslant 1$.

Duali kauzalumo sąvokai yra laiko eilutės apgręžiamumo sąvoka.

**4.4 apibrėžimas.** ARMA laiko eilutė $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$ vadinama *apgręžiama*, jeigu egzistuoja tokia seka $\{\alpha_j\}$, $\sum_{j=0}^{\infty}|\alpha_j| < \infty$, kad

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j X_{t-j}.$$

Panašiai kaip 4.1 teoremoje, turime:

**4.2 teorema.** *Tarkime $\{X_t\}$ yra ARMA(p, q) seka ir $\phi(\cdot)$ su $\theta(\cdot)$ neturi bendrų nulių. Tuomet $\{X_t\}$ yra apgręžiama tada ir tik tada, kai $\theta(z) \neq 0$ skritulyje $|z| \leqslant 1$. Koeficientai $\{\alpha_j\}$ apibrėžiami lygybe*

$$\alpha(z) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j z^j = \frac{\phi(z)}{\theta(z)}, \quad |z| \leqslant 1.$$

Pasinaudojus kauzalumo sąvoka, galima apibrėžti slenkamojo vidurkio su begaline eile (žymėsime MA($\infty$)) sekas. Būtent, $\{X_t\}$ vadinamas MA($\infty$) procesu, jeigu egzistuoja tokia seka $\{\psi_j\}$, kad $\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_j| < \infty$ ir $X_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j Z_{t-j}$; čia $Z_t \sim \mathrm{BT}(0, \sigma^2)$. Panašiai apibrėžiamos AR($\infty$) sekos.

Sakykime, $\phi(\cdot)$ ir $\theta(\cdot)$ neturi bendrų nulių ir egzistuoja toks $z$, kad $|z| = 1$ ir $\phi(z) = 0$. Tokiu atveju ARMA lygtis stacionaraus sprendinio neturi. Kita vertus, jei $\forall z$, $|z| = 1 : \phi(z) \neq 0$, tai iš kompleksinio kintamojo funkcijų teorijos išplaukia, kad

$$\frac{\theta(z)}{\phi(z)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j \equiv \psi(z), \qquad R^{-1} < |z| < R$$

su kažkokiu $R > 1$. Konvergavimas nurodytajame žiede yra absoliutus.

Taigi teisinga tokia teorema:

**4.3 teorema.** *Tarkime, kad $\phi(\cdot)$ neturi nulių ant apskritimo $|z| = 1$ ir $\phi(\cdot)$ su $\theta(\cdot)$ neturi bendrų nulių. Tada ARMA(p,q) lygtis turi vienintelį stacionarų sprendinį*

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j};$$

*čia koeficientai $\{\psi_j\}$ apskaičiuojami iš lygybės*

$$\psi(z) \equiv \frac{\theta(z)}{\phi(z)}, \qquad R^{-1} < |z| < R.$$

Paminėsime išvadas tais atvejais kuomet negalioja 4.1 teoremos prielaidos.

1. Jeigu $\phi(\cdot)$ ir $\theta(\cdot)$ neturi bendrų nulių, tačiau egzistuoja $z$, kad $|z| = 1$ ir $\phi(z) = 0$, tai tuomet ARMA lygtis stacionaraus sprendinio neturi. Tokių modelių pavyzdžiai - ARIMA ir ARUMA (žr. Woodward *et al.* (2012)).

2. Tarkime $\phi(\cdot)$ ir $\theta(\cdot)$ turi bent vieną bendrą nulį, kuris tenkina $|z| = 1$. Tada egzistuoja daugiau nei vienas stacionarus sprendinys.

3. Tarkime $\phi(\cdot)$ ir $\theta(\cdot)$ turi bendrus nulius, tačiau jie netenkina $|z| = 1$. Tada stacionarus sprendinys yra vienintelis ir sutampa su sprendiniu, gautu suprastinus bendrus daugiklius.

*4.1* PRATIMAS. Tegul $\{X_t\}$ – stacionari seka su kovariacine funkcija $r(\cdot)$, $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Įrodykite, kad tai su visais $t \in \mathbb{Z}$ eilutė $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$ konverguoja absoliučiai su tikimybe 1 bei kvadratinio vidurkio prasme ir abiem atvejais ribos sutampa, o $Y_t := \psi(B)X_t \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$ yra stacionari seka su kovariacine funkcija

$$r_Y(h) = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \psi_i \psi_j r(h - i + j). \tag{4.8}$$

*4.2* PRATIMAS. Tarkime, AR(2) seka $\{X_t\}$ apibrėžta lygtimis

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = Z_t, \quad Z_t \sim \mathrm{BT}(0, \sigma^2).$$

Įrodykite, kad $\{X_t\}$ kauzali tada ir tik tada, kai $(\phi_1, \phi_2)$ patenka į sritį

$$\begin{cases} \phi_1 + \phi_2 < 1, \\ \phi_2 - \phi_1 < 1, \\ |\phi_2| < 1. \end{cases}$$

## 4.2 Asimptotinis stacionarumas

Praktikoje nagrinėjamosios laiko eilutės „startuoja" iš tam tikros pradinės reikšmės. Tuomet jau stacionaraus proceso galime negauti, tačiau galime kalbėti apie asimptotiškai stacionarų procesą. Paaiškinsime AR(1) modelio pavyzdžiu.

Tegul seka $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ startuoja iš pradinės reikšmės $X_0$, kuri gali būti ir atsitiktinis dydis. Tada

$$X_t = Z_t + \phi Z_{t-1} + \cdots + \phi^{t-1} Z_1 + \phi^t X_0.$$

Taigi $\mathrm{E}X_t = \phi^t \mathrm{E}X_0$ ir, jei $\mathrm{E}X_0 \neq 0$, procesas nėra stacionarus „vidurkyje“.

Tegul $X_0$ nepriklauso nuo dydžių $Z_t, t \geqslant 1$ (arba su jais nekoreliuoja) ir $\mathrm{E}X_0^2 < \infty$. Tada, jeigu $|\phi| < 1$,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}X_t &= \sigma^2(1 + \phi^2 + \cdots + \phi^{2(t-1)}) + \phi^{2t}\mathrm{D}X_0 \\ &= \frac{\sigma^2(1-\phi^{2t})}{1-\phi^2} + \phi^{2t}\mathrm{D}X_0 \\ &\to \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}, \quad \text{kai } t \to \infty. \end{aligned}$$

Taigi, abiem atvejais AR(1) procesas nėra stacionarus, tačiau jis „darosi stacionarus“ su dideliais $t$. Praktiškai generuojant tokio proceso *stacionarią* realizaciją, turime pradines reikšmes „nupjauti“.

## 4.3 Kovariacinė generuojančioji funkcija

Stacionaraus proceso $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ su kovariacija $r(\cdot)$ kovariacinė generuojančioji funkcija apibrėžiama lygybe

$$g(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} r(j) z^j; \tag{4.9}$$

čia eilutės konvergavimo sritis yra žiedas $\delta^{-1} < |z| < \delta, \ \delta > 1$.

Taigi $r(j)$ yra koeficientas prie $z^j$ arba $z^{-j}$ kovariacinės generuojančiosios funkcijos (4.9) skleidinyje.

Toliau tarkime, kad $X_t$ yra dvipusio slenkamojo vidurkio seka

$$X_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i Z_{t-i}, \quad Z_t \sim \mathrm{BT}(0, \sigma^2); \tag{4.10}$$

čia $\psi(z) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} \psi_i z^i$ absoliučiai konverguoja žiede $\delta^{-1} < |z| < \delta, \ \delta > 1$. Tada

$$r(j) = \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i \psi_{i+|j|}$$

ir

$$g(z) = \sigma^2 \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \psi_i \psi_{i+|j|} z^j = \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i z^i \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^{-j}$$

arba

$$g(z) = \sigma^2 \psi(z) \psi(z^{-1}), \quad \delta^{-1} < |z| < \delta. \tag{4.11}$$

*4.2* PAVYZDYS. Iš 4.3 teoremos žinome, kad bet kuri ARMA$(p, q)$ seka $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$ su funkcija $\phi(z)$, neturinčia nulių ant apskritimo $|z| = 1$, gali būti užrašyta (4.10) pavidalu. Koeficientai $\{\psi_i\}$ apskaičiuojami iš lygybės

$$\psi(z) = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}.$$

Iš (4.11) išplaukia, kad ARMA$(p, q)$ sekos kovariacinė generuojančioji funkcija yra

$$g(z) = \sigma^2 \frac{\theta(z)\theta(z^{-1})}{\phi(z)\phi(z^{-1})}.$$

*4.3* PRATIMAS. Duota MA(2) seka

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2}.$$

Užrašę kovariacinę generuojančiąją funkciją, apskaičiuokite šios sekos kovariacinę funkciją $r(k)$.

# 5 ARIMA, ARUMA ir SARIMA

ARIMA, ARUMA ir SARIMA yra plačiai naudojami *nestacionarūs* laiko eilučių modeliai, glaudžiai susiję su ARMA modeliu.

**5.1 apibrėžimas.** Atsitiktinė seka $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ vadinama $(p, d, q)$ eilės autoregresijos slenkamojo vidurkio integruotu procesu (čia $d = 1, 2, \dots$), jeigu skirtumai $(1-B)^d X_t$ tenkina ARMA$(p, q)$ lygtį, t. y.

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B) Z_t, \tag{5.1}$$

kur $Z_t \sim \mathrm{BT}(0, \sigma^2)$. Tokį modelį žymėsime ARIMA$(p, d, q)$.

Nesunku matyti, kad, pridėję prie $X_t$ bet kokį $d-1$ eilės daugianarį, nepažeisime (5.1) lygties, t. y.

$$\phi(B)(1-B)^d (X_t + m(t)) = \theta(B) Z_t$$

su $m(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{d-1} t^{d-1}$ (čia $a_0, \dots, a_{d-1}$ gali būti netgi atsitiktiniai koeficientai). Kitaip sakant, jei $\{X_t\}$ yra ARIMA$(p, d, q)$ seka, tai $\{X_t + m(t)\}$ irgi yra ARIMA$(p, d, q)$. Todėl ARIMA taikytini duomenims turintiems atitinkamą trendo komponentę. Tiesa, šis trendas gali būti ir nulis. ARIMA lygtis nusako ne $\{X_t\}$, o $\{(1-B)^d X_t\}$ savybes.

Euristiškai kalbant, šis modelis vadinamas *integruotu*, kadangi $X_t$ gali būti atstatyti sumuojant (integruojant) dydžius $Y_t = (1-B)^d X_t$. Pavyzdžiui, ARIMA(0,1,0) atveju

$$\sum_{k=1}^{t} Y_k = X_t - X_0.$$

Pateiksime keletą modelių, tenkinančių ARIMA modelio apibrėžimą.

*5.1* PAVYZDYS. Tarkime, turime gerai žinomą *atsitiktinio klaidžiojimo* modelį

$$X_t = X_{t-1} + Z_t, \quad t \geqslant 1, \quad X_0 = 0,$$

arba

$$X_t = \sum_{k=1}^{t} Z_k.$$

čia $\{Z_t\}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Šis modelis dažnai naudojamas aprašant akcijų grąžų elgesį. Akivaizdu, kad atsitiktinio klaidžiojimo modelis yra ARIMA(0,1,0).

Kartais ARIMA lygtis turi šiek tiek bendresnį pavidalą

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = a + \theta(B) Z_t, \tag{5.2}$$

kur $a$ yra konstanta. Konstantos $a$ vaidmuo ARIMA modelyje yra kitoks nei yra ARMA atveju

$$\phi(B) X_t = a + \theta(B) Z_t.$$

Pastaruoju atveju $a$ yra susijęs su $X_t$ vidurkiu $\mu$: $a = \mu(1-\phi_1-\cdots-\phi_p)$. Tuo tarpu ARIMA$(p,d,q)$ atveju $a$ įeina į koeficientą prie $t^d$ polinominio trendo modelyje (žr. 5.2, 5.3 pavyzdžius).

*5.2* PAVYZDYS. Nagrinėkime *atsitiktinio klaidžiojimo su dreifu* modelį

$$X_t = a + X_{t-1} + Z_t, \quad t \geqslant 1, \quad X_0 = 0,$$

arba

$$X_t = ta + \sum_{j=1}^{t} Z_j.$$

Matome, kad atsitiktinio klaidžiojimo su dreifu modelis tenkina (5.2).

*5.3* PAVYZDYS. *Tiesinio trendo* modelis $X_t = at + b + Z_t$ tenkina ARIMA(0,1,1) lygtį

$$(1-B) X_t = a + Z_t - Z_{t-1},$$

t. y. $Y_t = (1-B)X_t$ yra neapgręžiamas MA(1) modelis.

Kai kurie autoriai (žr. Woodward ir kt. (2012)) siūlo apibendrinti ARIMA modelį, vietoj daugianario $(1-z)^d$ imant bet kokį $d$-os eilės daugianarį $\lambda(z) = 1-\lambda_1 z-\cdots-\lambda_d z^d$, kurio nuliai (realieji ir/ar kompleksiniai) yra ant vienetinio kompleksinio apskritimo $|z| = 1$. Šiuo atveju atitinkama lygtis įgyja pavidalą

$$\phi(B)\lambda(B)(X_t - \mu) = \theta(B) Z_t. \tag{5.3}$$

Tokį modelį vadinsime ARUMA$(p,d,q)$.

Pastebėsime, kad (5.3) lygtis gali būti perrašyta pavidalu

$$\phi(B)\lambda(B) X_t = \phi(1)\lambda(1)\mu + \theta(B) Z_t.$$

Tuo atveju, kai $\lambda(B) = (1-B)^d$, turime $\lambda(1) = 0$ ir konstanta $\phi(1)\lambda(1)\mu$ išnyksta. Bendru atveju tai nėra teisinga.

*5.4* PAVYZDYS. Tarkime

$$X_t + X_{t-2} = 4 + Z_t.$$

Šis modelis turi ARUMA(0,2,0) formą su $\lambda(z) = 1 + z^2$ ir gali būti perrašytas

$$(1 + B^2)(X_t - 2) = Z_t.$$

Tuo atveju, kai ARIMA aprašo dar ir sezoninę dalį, naudojamas SARIMA modelis

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^D X_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)Z_t,$$

čia

$$\begin{aligned}
\phi_p(B) &= 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p, \\
\theta_q(B) &= 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q, \\
\Phi_P(B^s) &= 1 - \Phi_1 B^s - \cdots - \Phi_P B^{sP}, \\
\Theta_Q(B^s) &= 1 + \Theta_1 B^s + \cdots + \Theta_Q B^{sQ}.
\end{aligned}$$

Žymėsime SARIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$.

Turėdami galvoje, kad

$$1 - z^s = \begin{cases} (1-z)(1+z)\prod_{k=1}^{s/2-1}(1 - z\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}k/s})(1 - z\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}k/s}), & s \text{ -- lyginis}, \\ (1-z)\prod_{k=1}^{(s-1)/2}(1 - z\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}k/s})(1 - z\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}k/s}), & s \text{ -- nelyginis}, \end{cases}$$

matome, kad SARIMA yra atskiras ARUMA atvejis.

*5.1* PRATIMAS. Apskaičiuokite dispersiją $\mathrm{D}X_t$ ir kovariaciją $\mathrm{Cov}(X_{t-k}, X_t)$ atskiriems ARIMA atvejams ir ištirkite jų asimptotinį elgesį, kai $t \to \infty$.

# 6 Ilgos atminties procesai ir FARIMA

Svarbi stacionarių procesų klasė yra ilgos atminties procesai. Jie pasirodo įvairiose srityse: hidrologijoje, ekonomikoje, finansuose, fizikoje ir t.t. Šiame skyrelyje aptarsime vieną ilgos atminties modeliavimo būdą – FARIMA procesus.

**6.1 apibrėžimas.** Stacionarus procesas $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ vadinamas *trumpos atminties* procesu, jeigu

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |r(k)| < \infty \quad \text{ir} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k) > 0; \tag{6.1}$$

vadinamas *ilgos atminties* procesu, jeigu

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |r(k)| = \infty;$$

vadinamas *neigiamos atminties* procesu, jeigu

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |r(k)| < \infty \quad \text{ir} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k) = 0.$$

Pateiktieji apibrėžimai yra labai bendri ir, norint aprašyti tokių procesų asimptotinę teoriją bei statistines išvadas, reikia sukonkretinti kovariacijos $r(k)$ elgesį. Ilgos atminties procesų aveju reikalausime, kad kovariacinė funkcija tenkintų lėto (hiperboliško) gęsimo sąlygą

$$r(k) \sim ck^{2d-1}, \quad c > 0,\ 0 < d < 1/2, \tag{6.2}$$

kai $k \to \infty$. Panašiai, neigiamos atminties atveju reikalausime, kad kažkuriems $c < 0$ ir $-1/2 < d < 0$ galiotų

$$r(k) \sim ck^{2d-1} \quad \text{ir} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k) = 0. \tag{6.3}$$

Įvestasis parametras $d$ yra vadinamas *atminties parametru.* Trumpa atmintis dažnai postuluojama kaip atvejis $d = 0$.

Priminsime, kad ARMA$(p, q)$ procesai yra trumpos atminties procesai. Pavyzdžiui, AR(1) sekos $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$, $t \in \mathbb{Z}$ atveju turime

$$r(k) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{1-\phi^2}\,\phi^{|k|}, & \text{kai } |\phi| < 1, \\ \dfrac{\sigma^2}{\phi^2 - 1}\,\phi^{-|k|}, & \text{kai } |\phi| > 1. \end{cases}$$

Taigi, galioja (6.1). Bendrai, visiems ARMA procesams galioja

$$|r(k)| \leqslant C a^{|k|}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

su kažkuriomis konstantomis $C > 0$ ir $0 < a < 1$.

Toliau aptarsime kaip aprašyti modelius, kurie pasižymi (6.2) ir (6.3) savybėmis. Apibrėžkime operatorių $\nabla^d \equiv (1-B)^d$ formalia eilute

$$(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j B^j,$$

kur koeficientai $\alpha_j$ gaunami iš binominės eilutės

$$(1-z)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j z^j.$$

Priminsime, kad pastaroji eilutė konverguoja visiems $|z| \leqslant 1$, $z \neq 1$ tada ir tik tada, kai $d > -1$. Koeficientai $\alpha_j$, $j = 0, 1, \ldots$ yra randami iš lygybių $\alpha_0 = 1$ ir

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{(-d+j-1)(-d+j-2)\cdots(-d+1)(-d)}{j!} \\ &= \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)}, \qquad j = 1, 2, \ldots; \end{aligned}$$

čia $\Gamma(x)$ yra gama funkcija:

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t, & x > 0, \\ \infty, & x = 0, \\ x^{-1}\Gamma(x+1), & x < 0. \end{cases}$$

Toliau laikykime, kad $|d| < 1/2$, $d \neq 0$. Iš Stirlingo formulės turime, kad

$$\alpha_j \sim \frac{1}{\Gamma(-d)} j^{-d-1}, \quad j \to \infty.$$

Vadinasi, $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 < \infty$ $(d > -1/2)$.

Analogiškai, skleidinio $(1-z)^{-d} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j$ (čia $|z| \leqslant 1$, $z \neq 1$ ir $d \leqslant 1$) atveju turime

$$\psi_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d)} \sim \frac{1}{\Gamma(d)} j^{d-1}, \quad j \to \infty,$$

ir $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ $(d < 1/2)$.

Toliau apibrėžkime seką $\{X_t\}$ lygtimi

$$(1-B)^d X_t = Z_t, \quad Z_t \sim \mathrm{BT}(0, \sigma^2). \tag{6.4}$$

Laikome, kad kairėje pusėje esanti eilutė (kaip ir kitos atsirandančios šiame skyrelyje eilutės) $(1-B)^d X_t \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j X_{t-j}$ konverguoja vidutinių kvadratų prasme. Vadinasi, jei $d > -1/2$, tai tokia eilutė yra korektiškai nusakyta, nes $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 < \infty$. Tokią seką vadinsime FARIMA(0,$d$,0) procesu.

Intuityviai aišku, kad (6.4) sprendinys turi pavidalą

$$X_t = (1-B)^{-d} Z_t \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \tag{6.5}$$

kur su $d < 1/2$ galioja $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$.

**6.1 teorema.** *Tarkime* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *nusakytas* (6.5) *lygybėmis su* $|d| < 1/2$, $d \neq 0$. *Tuomet:*

*(a) koeficientai* $\psi_j$ *tenkina*

$$\psi_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d)} \sim \frac{1}{\Gamma(d)} j^{d-1}, \quad j \to \infty$$

*ir, jeigu* $-1/2 < d < 0$, *tai*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = 0, \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} r(j) = 0.$$

*(b) kovariacinė funkcija $r(\cdot)$ tenkina*

$$\begin{aligned} r(0) &= \sigma^2 \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma^2(1-d)}, \\ r(k) &= \sigma^2 \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-d)\Gamma(d)} \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(k-d+1)} \sim \sigma^2 \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-d)\Gamma(d)} k^{2d-1}, \ k \to \infty. \end{aligned}$$

**6.2 teorema.** *Tarkime $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ nusakytas* (6.4) *lygtimis su $|d| < 1/2$, $d \neq 0$ ir $\{Z_t\}$ yra ergodiškas balto triukšmo procesas. Tuomet* (6.5) *lygybėmis nusakytas procesas $\{X_t\}$ yra vienintelis stacionarus ergodiškas* (6.4) *sprendinys su $\mathrm{E}X_t = 0$.*

Įrodymus galima rasti Brockwell ir Davis (1991) bei Giraičio, Koul ir Surgailio (2012) knygose.

*6.1* PASTABA. Tuo atveju, kai $0 < d < 1/2$ ir ergodiškumo prielaida negalioja, gali būti be galo daug stacionarių (6.4) sprendinių, kuriuos galima gauti prie bet kurio (6.4) stacionaraus sprendinio pridėjus atsitiktinį dydį $Y$ ($\mathrm{E}Y^2 < \infty$).

Panašiai įvedami ir bendresni FARIMA$(p, d, q)$ modeliai, turintys pavidalą

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B) Z_t.$$

# 7 Vertinimas laiko srityje

Šiame skyrelyje nagrinėsime stacionarių laiko eilučių vidurkio bei kovariacinės funkcijos įverčius.

## 7.1 Vidurkio įvertis

Tarkime, $X_1, ..., X_n$ yra imtis iš stacionarios sekos $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Pažymėkime

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

**7.1 teorema.** *Sakykime, $\{X_t\}$ yra stacionari seka su vidurkiu $\mu$ ir kovariacine funkcija $r(\cdot)$. Tada tvirtinimai*

$$\mathrm{E}(\overline{X} - \mu)^2 \to 0 \tag{1}$$

*ir*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r(k) \to 0 \tag{2}$$

*yra ekvivalentūs.*

*Įrodymas.* (1) $\Longrightarrow$ (2). Turime

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r(k)\Big)^2 &= \Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k-\mu)(X_0-\mu)\Big)^2 \\
&= \Big(\mathrm{E}(X_0-\mu)\Big\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu))\Big\}\Big)^2 \\
&\leqslant \mathrm{E}(X_0-\mu)^2\mathrm{E}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)\Big)^2 \\
&= r(0)\mathrm{E}(X_0-\mu)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

(2) $\Longrightarrow$ (1). Pažymėkime $s_n = \sum_{k=1}^{n} r(k)$ ir perrašykime

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\overline{X} - \mu)^2 &= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} r(i-j) = \frac{1}{n}\sum_{|m|<n}\Big(1-\frac{|m|}{n}\Big)r(m) \\
&= \frac{1}{n^2}\Big(nr(0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} s_i\Big).
\end{aligned}$$

Fiksuotam $\epsilon > 0$ parinkime tokį $N$, kad su visais $n > N$ būtų teisinga nelygybė $n^{-1}|s_n| \leqslant \epsilon$. Tada su pakankamai dideliais $n$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\overline{X}-\mu)^2 &\leqslant \frac{r(0)}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}|s_i| = \frac{r(0)}{n} + \frac{2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{N}|s_i| + \sum_{i=N+1}^{n-1}|s_i|\right) \leqslant \\
&\leqslant \frac{r(0)}{n} + \frac{2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{N}|s_i| + \sum_{i=N+1}^{n-1} i\epsilon\right) \leqslant \frac{r(0)}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{N}|s_i| + \epsilon \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \epsilon.
\end{aligned}$$

Kadangi $\epsilon > 0$ buvo laisvai pasirinktas, tai $\mathrm{E}(\overline{X}-\mu)^2 \to 0$. □

**7.1 išvada.** *Tarkime, teisingos 7.1 teoremos prielaidos. Tuomet*

*(1) jeigu $r(n) \to 0$, tai $\mathrm{E}(\overline{X}-\mu)^2 \to 0$,*

*(2) jeigu $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|r(k)| < \infty$, tai $n\mathrm{E}(\overline{X}-\mu)^2 \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k)$.*

*Įrodymas.* (1) tiesiogiai išplaukia iš 7.1 teoremos, o (2) – iš sąryšių

$$n\mathrm{E}(\overline{X}-\mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} r(i-j) = \sum_{|k|<n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)r(k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k).$$

□

Jeigu $\sum_{-\infty}^{\infty}|r(k)| < \infty$, tai, pasirėmę šia išvada, galime teigti, jog egzistuoja spektrinis tankis $f(\cdot)$ ir

$$n\mathrm{E}(\overline{X}-\mu)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k) = 2\pi f(0). \tag{7.1}$$

Dvipusio slenkamojo vidurkio sekos $X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi_k Z_{t-k}$ atveju, jeigu $\sum|\psi_k| < \infty$, turėsime $\sum|r(k)| < \infty$. Todėl dešinioji (7.1) pusė yra $2\pi f(0) = \sigma^2|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi_k|^2$.

*7.1* PASTABA. Vietoje empirinio vidurkio $\overline{X}$ galima nagrinėti ir kitokius įverčius, pavyzdžiui, geriausią tiesinį nepaslinktą vidurkio įvertį (žr. 7.1 pratimą). Tačiau yra žinoma, kad jo asimptotinės savybės yra labai panašios į $\overline{X}$ savybes.

*7.2* PASTABA. Norint sukonstruoti vidurkio $\mu$ pasikliautinąjį intervalą, reikia rezultatų apie $\overline{X}$ asimptotinį normalumą. Juos galima rasti, pavyzdžiui, Anderson (1971) knygoje. Pastebėsime, kad tuo atveju, kai stebimoji imtis gauta iš stacionarios Gauso sekos, galima užrašyti tikslų $\overline{X}$ skirstinį:

$$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu) \sim \mathrm{N}\Big(0, \sum_{|m|<n}\Big(1-\frac{|m|}{n}\Big)r(m)\Big).$$

Taigi, jeigu kovariacinė funkcija yra žinoma, galime sukonstruoti tikslų vidurkio $\mu$ pasikliautinąjį intervalą. Nežinant kovariacinės funkcijos, imamas jos įvertis.

*7.1* PRATIMAS. Tarkime $\{X_t\}$ yra stacionarus procesas su vidurkiu $\mu$ ir kovariacine funkcija $r(\cdot)$. Sakome, kad $\hat{\mu}_n$ yra geriausias nepaslinktas vidurkio $\mu$ įvertis, jeigu $\hat{\mu}_n = c_1X_1 + ... + c_nX_n$, $\mathrm{E}\hat{\mu}_n = \mu$ ir $c_1, \dots, c_n$ minimizuoja $\mathrm{E}(\hat{\mu}_n - \mu)^2$. Parodykite, kad geriausias nepaslinktas $\mu$ įvertis yra užrašomas formule

$$\hat{\mu}_n = (\mathbf{1}'R_n^{-1}\mathbf{1})^{-1}\mathbf{1}'R_n^{-1}\mathbf{X}_n;$$

čia $R_n$ yra vektoriaus-stulpelio $\mathbf{X}_n = (X_1, ..., X_n)'$ kovariacinė matrica ir $\mathbf{1} = (1, ..., 1)'$.

## 7.2 Kovariacinės funkcijos įvertis

Tarkime, $X_1, ..., X_n$ yra imtis iš stacionarios sekos $\{X_t\}$ su nežinomais vidurkiu ir kovariacija.

Kovariacinės funkcijos įvertį apibrėžkime lygybe

$$\hat{r}(h) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-|h|}(X_k - \overline{X})(X_{k+|h|} - \overline{X}), \quad 0 \leqslant |h| < n. \tag{7.2}$$

Šis įvertis pasižymi tuo, kad su visais $n \geqslant 1$ matrica

$$\hat{R}_n = \begin{pmatrix} \hat{r}(0) & \hat{r}(1) & . \ . \ . & \hat{r}(n-1) \\ \hat{r}(1) & \hat{r}(0) & . \ . \ . & \hat{r}(n-2) \\ . & . & . \ . \ . \ . & . \\ \hat{r}(n-1) & \hat{r}(n-2) & . \ . \ . & \hat{r}(0) \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

yra neneigiamai apibrėžta.

**7.1 teiginys.** *Matrica $\hat{R}_n$, apibrėžta* (7.3) *lygybe, yra neneigiamai apibrėžta su visais $n \geqslant 1$.*

*Įrodymas.* Turime

$$\hat{R}_n = \frac{1}{n}\, D_n D_n';$$

čia

$$D_n = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 & 0 & Y_1 & Y_2 & . & . & . & Y_{n-1} & Y_n \\ 0 & . & . & . & 0 & Y_1 & Y_2 & . & . & . & . & Y_n & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & Y_1 & . & . & . & . & Y_n & 0 & . & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yra $n \times 2n$ matrica ir $Y_j = X_j - \overline{X}$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Tada su visais $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$

$$a'\hat{R}_n a = \frac{1}{n}\, a' D_n D_n' a = \frac{1}{n}\,(a'D_n)(a'D_n)' \geqslant 0.$$

□

Koreliacinės funkcijos $\rho(h)$ įverčiu laikysime

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{r}(h)}{\hat{r}(0)}.$$

Aišku, kad atitinkama empirinė koreliacinė matrica taip pat bus neneigiamai apibrėžta.

Dėl paprastumo nuo šiol nagrinėjamosios stacionariosios sekos vidurkį laikysime lygiu nuliui ($\mathrm{E}X_t = 0$), tuomet

$$\hat{r}(h) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-|h|} X_k X_{k+|h|}, \quad |h| < n. \tag{7.4}$$

*7.3* PASTABA. Kadangi $\mathrm{E}\hat{r}(h) = (1-|h|/n)r(h)$, tai $\hat{r}(h)$ yra tik *asimptotiškai* nepaslinktas $r(h)$ įvertis. Dėl šios priežasties daugiklis $n^{-1}$ (7.2) ar (7.4) lygybėse dažnai keičiamas daugikliu $(n-|h|)^{-1}$. Tačiau tada matrica $\hat{R}_n$ yra nebūtinai neneigiamai apibrėžta.

**7.2 teorema.** *Tarkime, $\{X_t\}$ yra stacionarioji seka su vidurkiu 0 ir kovariacija $r(\cdot)$. Tarkime, be to, kad su visais $h$ seka $\{X_{t+h}X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ taip pat yra stacionari. Tada yra ekvivalentūs tokie du teiginiai:*

(1) $$\mathrm{E}(\hat{r}(h) - r(h))^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

*ir*

$$\text{(2)} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_{k+h}X_k - r(h))(X_hX_0 - r(h)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

*Įrodymas.* Fiksuokime $h \geqslant 0$ ir pažymėkime $\xi_k = X_{k+h}X_k$. Tada su pakankamai dideliais $n$

$$\hat{r}(h) = \Big(1 - \frac{h}{n}\Big)\bar{\xi}_{n-h}; \tag{7.5}$$

čia $\bar{\xi}_m = m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\xi_k$. Kadangi $\{\xi_k\}$ yra stacionari seka su vidurkiu $r(h)$, tai iš 7.1 teoremos išplaukia, jog teiginiai

$$\mathrm{E}(\bar{\xi}_{n-h} - r(h))^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ir

$$\frac{1}{n-h}\sum_{k=1}^{n-h} \mathrm{E}(\xi_k - r(h))(\xi_0 - r(h)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

yra ekvivalentūs. Pasinaudoję (7.5) lygybe, gauname teoremos teiginį. □

*7.4* PASTABA. Pastarosios teoremos prielaida bus teisinga, jeigu, pavyzdžiui, $\{X_t\}$ – stacionarioji siaurąja prasme seka su nuliniu vidurkiu ir baigtiniu ketvirtuoju momentu ($\mathrm{E}X_0^4 < \infty$) arba $\{X_t\}$ – 4-os eilės stacionarioji seka (žr. 3.3 apibrėžimą).

Jeigu nagrinėjamoji seka yra Gauso, tai gauname tokį rezultatą:

**7.2 išvada.** *Tarkime, $\{X_t\}$ yra stacionari Gauso seka su vidurkiu 0 ir kovariacija $r(\cdot)$. Tuomet*

$$\mathrm{E}(\hat{r}(h) - r(h))^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

*tada ir tik tada, kai*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r^2(k) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0. \tag{7.6}$$

*Įrodymas.* Pasirėmę 7.2 pratimu, galime teigti, kad 7.2 teoremos (2) sąlyga yra ekvivalenti

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{E}X_{k+h}X_kX_hX_0 - r^2(h)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{E}X_{k+h}X_k\mathrm{E}X_hX_0 + \mathrm{E}X_{k+h}X_h\mathrm{E}X_kX_0$$
$$+\mathrm{E}X_{k+h}X_0\mathrm{E}X_kX_h - r^2(h)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(r^2(k) + r(k+h)r(k-h)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{7.7}$$

Pasinaudoję nelygybe

$$|r(k+h)r(k-h)| \leqslant r^2(k+h) + r^2(k-h),$$

gauname, kad (7.7) teisinga, kai

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r^2(k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Kita vertus, iš (7.7) su $h = 0$ išplaukia, kad $n^{-1}\sum_{k=1}^{n} r^2(k) \to 0$. □

Įdomu pastebėti, kad (7.6) sąryšis 7.2 išvadoje yra ekvivalentus prielaidai, jog spektrinė pasiskirstymo funkcija $F$, atitinkanti kovariaciją $r(\cdot)$ (žr. **??** skyrelį), yra tolydi. Kitaip sakant, stacionariai Gauso sekai su nuliniu vidurkiu empirinė kovariacija $\hat{r}(h)$ yra suderintasis $L^2$ prasme $r(h)$ įvertis tada ir tik tada, kai spektrinė pasiskirstymo funkcija $F$ yra tolydi.

*7.2* PRATIMAS. Tarkime, $\{X_t\}$ yra Gauso atsitiktinė seka su nuliniu vidurkiu. Įrodykite, kad

$$\mathrm{E}X_{t_1}X_{t_2}X_{t_3}X_{t_4} = \mathrm{E}X_{t_1}X_{t_2}\mathrm{E}X_{t_3}X_{t_4} + \mathrm{E}X_{t_1}X_{t_3}\mathrm{E}X_{t_2}X_{t_4} + \mathrm{E}X_{t_1}X_{t_4}\mathrm{E}X_{t_2}X_{t_3}. \tag{7.8}$$

# 8 ARMA sekos parametrų vertinimas

## 8.1 Autoregresijos parametrų vertinimas

Pirmiausia nagrinėkime kauzalų autoregresijos modelį

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t, \tag{8.1}$$

kur $Z_t \sim \mathrm{BT}(0, \sigma^2)$. Šią lygtį galime perrašyti įprastine regresijos forma:

$$X_t = \mathbb{X}'_{t-1}\phi + Z_t, \tag{8.2}$$

čia $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)'$, $\mathbb{X}_{t-1} = (X_{t-1}, \dots, X_{t-p})'$.

Gerai žinoma, kad (8.2) regresijai mažiausių kvadratų $\phi$ įvertis yra

$$\hat{\phi} = \left(\sum_{t=1}^{n} \mathbb{X}_{t-1}\mathbb{X}'_{t-1}\right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{n} \mathbb{X}_{t-1}X_t\right).$$

Taigi, čia gali būti taikomi (su nedidelėmis modifikacijomis) standartinės regresinės analizės rezultatai. Tame tarpe, jeigu $\hat{Z}_t = X_t - \mathbb{X}'_{t-1}\hat{\phi}$ yra atitinkamos liekanos, tai joms galima taikyti klasikinę liekanų analizę.

Pastebėsime, kad tuo atveju kai $Z_t$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę N(0,$\sigma^2$) dydžiai, $\hat{\phi}$ yra ir didžiausio tikėtinumo įvertis. Paprasčiausiu AR(1) atveju, kai $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$, turime

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2}.$$

Iš klasikinio rezultato taip pat išplaukia ir ši teorema apie asimptotinį įverčio pasiskirstymą.

**8.1 teorema.** *Jei $Z_t$ – nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su vidurkiu 0 ir dispersija $\sigma^2$, o $\mathrm{E}Z_t^4 < \infty$, tai*

$$\sqrt{n}(\hat{\phi} - \phi) \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, \sigma^2\Gamma_p^{-1}),$$

*kur $\xrightarrow{d}$ žymi konvergavimą pagal pasiskirstymą, o*

$$\Gamma_p = \mathrm{E}\mathbb{X}\mathbb{X}' = \begin{pmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(p-1) \\ r(1) & r(0) & \dots & r(p-2) \\ . & . & \dots & . \\ r(p-1) & r(p-2) & \dots & r(0) \end{pmatrix}.$$

*8.1* PAVYZDYS. Tarkime $p = 1$. Tuomet AR(1) modeliui turime

$$\sqrt{n}(\hat{\phi} - \phi) \xrightarrow{d} \mathrm{N}\Big(0, \frac{\sigma^2}{r(0)}\Big).$$

Kadangi $r(0) = \sigma^2/(1 - \phi^2)$, tai $\sqrt{n}(\hat{\phi} - \phi) \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, 1 - \phi^2)$, arba

$$\hat{\phi} \sim \mathrm{AN}\Big(\phi, \frac{1 - \phi^2}{n}\Big).$$

Remiantis pastarąja teorema, galima konstruoti pasikliautinuosius intervalus bei kritines sritis atitinkamų hipotezių tikrinimui.

Kitas būdas, dažnai taikomas praktikoje, remiasi Yule–Walker'io lygčių panaudojimu. Trumpai aprašysime jį. Padauginę skaliariškai lygtį $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$ iš $X_{t-k}$, $k = 1, \ldots, p$, gausime lygybę $r(k) = \phi_1 r(k-1) + \cdots + \phi_p r(k-p)$, kurią perrašę koreliacijoms turėsime

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(t-1) + \cdots + \phi_p \rho(k-p), \quad k = 1, \ldots, p.$$

Šias lygtis galime perrašyti matriciniu pavidalu:

$$\begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ . \\ \rho(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & . \; . \; . & \rho(p-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & . \; . \; . & \rho(p-2) \\ . & . & . \; . \; . \; . & . \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & . \; . \; . & \rho(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ . \\ \phi_p \end{pmatrix}.$$

Pakeitę koreliacijas į jų empirinius analogus, gausime parametrų $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_p)'$ Yule–Walker'io įvertį:

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ . \\ \hat{\phi}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}(1) & . \; . \; . & \hat{\rho}(p-1) \\ \hat{\rho}(1) & 1 & . \; . \; . & \hat{\rho}(p-2) \\ . & . & . \; . \; . \; . & . \\ \hat{\rho}(p-1) & \hat{\rho}(p-2) & . \; . \; . & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ . \\ \hat{\rho}_p \end{pmatrix}.$$

Pastebėsime, kad AR($p$) atveju atvirkštinės matricos, naudojamos aukščiau, yra neišsigimusios. (Gerai žinoma, kad tam pakanka, kad $r(0) > 0$ ir $r(h) \to 0$, kai $n \to \infty$.) Nors šiuo atveju įvertis turi gražų išreikštinį pavidalą, susiduriama su sunkumais, kai norima skaičiuoti atvirkštinę matricą dideliems $p$ ir $n$. Tokiu atveju gelbsti žinomi algoritmai, kaip, pavyzdžiui, Durbino–Levinsono ar inovacijų algoritmas. Jų aprašymą galima rasti Brockwell ir Davis (1991).

## 8.2 Slenkamojo vidurkio parametrų vertinimas

MA modelio parametrų vertinimas pasirodo nėra toks paprastas kaip autoregresijos atveju. Iliustracijai imkime MA(1) modelį $X_t = Z_t - \theta Z_{t-1}$. Ieškosime parametro $\theta$ įverčio momentų metodu. Kadangi

$$\rho(1) = -\frac{\theta}{1+\theta^2},$$

arba $\rho(1)\theta^2 + \theta + \rho(1) = 0$. Vadinasi, įvertis $\theta$ randamas iš

$$\hat{\theta} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\hat{\rho}^2(1)}}{2\hat{\rho}(1)}.$$

Taigi, gauname netiesinį įvertį, kurio savybes nelengva tirti. Dar sudėtingesnė situacija MA($q$) atveju.

Kita vertus, patogu taikyti šiek tiek modifikuotą mažiausių kvadratų metodą. Jei MA(1) procesas yra apgręžiamas, t. y. $|\theta| < 1$, tai

$$Z_t = X_t + \theta Z_{t-1} = X_t + \theta X_{t-1} + \theta^2 X_{t-2} + \dots.$$

Pažymėkime $S(\theta) = \sum_{t=1}^n Z_t^2$. Aišku, ši išraiška dar nėra tinkama $\theta$ įverčiui rasti. Norint gautį įvertį, kuris remiasi stebėjimais $X_1, \dots, X_n$, laikykime kad $Z_0 = 0$; tuomet ant aibės $Z_0 = 0$ turėsime

$$\begin{aligned}
Z_1 &= X_1 + \theta Z_0 = X_1,\\
Z_2 &= X_2 + \theta Z_1 = X_2 + \theta Z_1,\\
Z_3 &= X_3 + \theta Z_2 = X_3 + \theta X_2 + \theta^2 X_1,\\
&\dots\\
Z_n &= X_n + \theta Z_{n-1} = X_n + \theta X_{n-1} + \dots + \theta^{n-1} X_1.
\end{aligned}$$

Tegul $S_*(\theta) = \sum_{t=1}^n Z_t^2\big|_{Z_0=0}$. Šio dydžio minimizavimas ir vadinamas *sąlyginiu mažiausių kvadratų metodu.* $S_*(\theta)$ minimumo taško galima ieškoti taikant skaitinį Gauso–Niutono metodą. Pagal jį, pasirenkame kažkurį pradinį tašką $\theta^*$, $Z_t \equiv Z_t(\theta)$ pakeičiame į dydį

$$\tilde{Z}_t(\theta) = Z_t(\theta^*) + (\theta - \theta^*)\frac{\mathrm{d}Z_t(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\bigg|_{\theta=\theta^*} \tag{8.3}$$

ir išraišką $\sum_{t=1}^n \tilde{Z}_t^2(\theta)$ minimizuojame pagal $\theta$. (8.3) yra tiesinė pagal $\theta$, todėl nesunku rasti analitinę šio minimumo taško (pažymėkime jį $\theta_{(1)}$) išraišką.

Toliau $\theta^*$ keičiame į $\theta_{(1)}$ ir kartojame procedūrą. Pastebėsime, kad (8.3) išraiškoje išvestines galima skaičiuoti rekurentiškai, nes

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}Z_t(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=\theta^*} &= \frac{\mathrm{d}(X_t+\theta Z_{t-1}(\theta))}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=\theta^*} \\
&= \frac{\mathrm{d}(\theta Z_{t-1}(\theta))}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=\theta^*} \\
&= Z_{t-1}(\theta^*) + \theta^* \frac{\mathrm{d}Z_{t-1}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=\theta^*}, \quad \frac{\mathrm{d}Z_0(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = 0.
\end{aligned}$$

Bendru MA($q$) atveju taikoma daugiamatė Gauso–Niutono procedūra, kur į sumą $S_*(\boldsymbol{\theta})$ įeina dydžiai $Z_t = X_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$, $Z_0 = Z_{-1} = \cdots = Z_{1-q} = 0$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_q)$.

## 8.3 Autoregresijos-slenkamojo vidurkio parametrų vertinimas

Pradėkime nuo paprasto kauzalaus ir apgręžiamo ARMA(1,1) modelio:

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t - \theta Z_{t-1}.$$

Panašiai kaip aukščiau, parametro $(\phi, \theta)$ įvertį galima rasti sąlyginio mažiausių kvadratų metodo pagalba, minimizuojant $S_*(\phi,\theta) = \sum_{t=1}^n Z_t^2$, čia dydžiai $Z_t \equiv Z_t(\phi,\theta)$ randami iš lygybių

$$Z_t(\phi,\theta) = X_t - \phi X_{t-1} + Z_{t-1}(\phi,\theta), \quad Z_0 = X_0 = 0.$$

Panašiai elgiamasi ir bendro ARMA($p,q$) modelio atveju. Iš formulių

$$Z_t = X_t - \phi X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

su $X_0 = X_{-1} = \cdots = X_{1-p} = Z_0 = \cdots = Z_{1-q} = 0$ randame $Z_t \equiv Z_t(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta})$, $t = p+1, \ldots, n$, ir minimizuojame pagal $(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta})$ išraišką $S_*(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^n Z_t^2(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta})$.

## 8.4 Didžiausio tikėtinumo metodas

Tarkime, imtis $X_1, \ldots, X_n$ gauta stebint kauzalią AR(1) seką $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$, čia $Z_t$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai turintys teigiamą tankį $f_Z$.

Mūsų tikslas – užrašyti vektoriaus $(X_1, \ldots, X_n)$ tankio funkciją $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$. Turime

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2,\ldots,X_n|X_1}(x_2, \ldots, x_n|x_1).$$

Duotam $x_1$ nagrinėkime abipus vienareikšmes transformacijas

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} x_2 - \phi x_1 \\ x_3 - \phi x_2 \\ \vdots \\ x_n - \phi x_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{8.4}$$

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \xrightarrow{g^{-1}} \begin{pmatrix} \phi x_1 + z_2 \\ \phi^2 x_1 + \phi z_2 + z_3 \\ \vdots \\ \phi^{n-1} x_1 + \phi^{n-2} z_2 + \cdots + z_n \end{pmatrix}.$$

Pastebėsime kad (8.4) transformacijos Jakobianas yra

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -\phi & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -\phi & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & & & & \vdots & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\phi & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

todėl

$$\begin{aligned} f_{X_2,\ldots,X_n|X_1}(x_2, \ldots, x_n|x_1) &= f_{Z_2,\ldots,Z_n}(x_2 - \phi x_1, \ldots, x_n - \phi x_{n-1}) \\ &= f_Z(x_2 - \phi x_1) \ldots f_Z(x_n - \phi x_{n-1}). \end{aligned}$$

Tuo atveju kai $Z_t, t \in \mathbb{Z}$ yra N(0,$\sigma^2$) dydžiai, turime $X_1 \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2/(1 - \phi^2))$, t. y.

$$f_{X_1}(x_1) = \Big(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \phi^2} \exp\Big\{ - \frac{1}{2\sigma^2}(1 - \phi^2) x_1^2 \Big\}. \tag{8.5}$$

Be to, $(Z_2, \ldots, Z_n)$ tankio funkcija yra

$$f_{Z_2,\ldots,Z_n}(z_2, \ldots, z_n) = \Big(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\Big)^{\frac{n-1}{2}} \exp\Big\{ - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^{n} z_t^2 \Big\}$$

ir todėl sąlyginis $X_2, \ldots, X_n$ tankis atžvilgiu $X_1$ yra

$$f_{X_2,\ldots,X_n|X_1}(x_2, \ldots, x_n|x_1) = \Big(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\Big)^{\frac{n-1}{2}} \exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}(x_t - \phi x_{t-1})^2\Big\}. \tag{8.6}$$

Iš (8.5) ir (8.6) gauname stebėjimų $X_1, \ldots, X_n$ tikėtinumo funkciją

$$\begin{aligned} L(\phi, \sigma^2) &= \Big(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\Big)^{\frac{n}{2}} \sqrt{1-\phi^2} \exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\Big[\sum_{t=2}^{n}(X_t - \phi X_{t-1})^2 + (1-\phi^2)X_1^2\Big]\Big\} \\ &= \Big(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\Big)^{\frac{n}{2}} \sqrt{1-\phi^2} \exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\ S(\phi)\Big\}, \end{aligned}$$

kur $S(\phi) = \sum_{t=2}^{n}(X_t - \phi X_{t-1})^2 + (1-\phi^2)X_1^2$. Tuomet logaritminė tikėtinumo funkcija yra

$$\lambda(\phi, \sigma^2) := \ln L(\phi, \sigma^2) = \frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 + \frac{1}{2}\ln(1-\phi^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\ S(\phi).$$

Iš čia, spręsdami lygtį $\frac{\partial\lambda(\phi,\sigma^2)}{\partial\sigma^2} = 0$, gaunam

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S(\hat{\phi})}{n}.$$

Aprašysime kelis $\hat{\phi}$ radimo metodus. 1) Naudojant skaitinius metodus, galima rasti $\hat{\phi}$, kuris maksimizuoja tikslią log-tikėtinumo funkciją $\lambda(\phi, \sigma^2)$. 2) Skaičiavimus galima supaprastinti, minimizuojant tik narį $S(\phi)$ ir turint galvoje, kad atmetamame naryje $(1/2)\ln(1-\phi^2)$ parametras $\phi$ nėra arti 1. 3) Paprasčiausia yra minimizuoti $S_*(\phi)$ išraiškoje $S(\phi) = S_*(\phi) + (1-\phi^2)X_1^2$, turint galvoje, kad narys $(1-\phi^2)X_1^2$ yra mažas palyginus su pirmuoju dėmeniu kai $n$ dideli (galima gauti sprendinio išreikštinę formą).

Pastebėsime, kad visų trijų įverčių asimptotinės savybės yra vienodos. Panašiai elgiamasi ir bendro ARMA$(p, q)$ modelio atveju. Teoremos apie įverčių asimptotinį elgesį yra gerai žinomos, žr. Brockwell ir Davis (1991).

## 8.5 Liekanų analizė

Parinkus modelį ir įvertinus jo parametrus, lieka ištirti gauto modelio adekvatumą, t. y. patikrinti ar *įvertintas* modelis tenkina teorinio modelio prielaidas.

Dažniausiai tenka tikrinti, ar liekanos $\hat{Z}_t$ tenkina balto triukšmo sąlygas, t. y. yra nekoreliuotos, turi vidurkį 0 ir pastovią dispersiją.

Paprastai pradedama nuo tikrinimo ar liekanos turi normalųjį skirstinį. Dažniausiai tai galima matyti vizualiai iš standartizuotų liekanų $\hat{Z}_t/\hat{\sigma}$ histogramos bei kvantilių-kvantilių grafiko. Tikslesnis tikrinimas turėtų vykti remiantis žinomais normalumo tikrinimo kriterijais: Kolmogorov'o, Anderson'o–Darling'o, Shapiro–Wilk'o kriterijais arba momentų sulyginimo kriterijais, pvz. Jarque–Bera ar d'Agostino testu.

Tam, kad patikrintume ar liekanos sudaro balto triukšmo seką, nubraižomi empirinių ACF ir PACF grafikai, rodantys galimą liekanų formą ir tai, ar jos yra statistiškai nereikšmingos. Priminsime, kad duotai imčiai $X_1, \ldots, X_n$ empirinė (auto)koreliacinė funkcija (ACF) apibrėžiama lygybe

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{j=1}^{n-k}(X_j - \overline{X})(X_{j+k} - \overline{X})}{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Turime tokį teiginį:

**8.1 teiginys.** *Tegul* $X_t = Z_t \sim \text{n.v.p.}(0, \sigma^2)$. *Tuomet bet kuriam* $h = 1, 2, \ldots$

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \hat{\rho}(1) \\ \hat{\rho}(2) \\ \vdots \\ \hat{\rho}(h) \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, I_h).$$

Remiantis pastaruoju teiginiu galima sukonstruoti kritinę sritį hipotezei $H_0$: $\rho(k) = 0$ su alternatyva $H_1$: $\rho(k) \neq 0$ tikrinti. $H_0$ atmesime, jeigu $\sqrt{n}\hat{\rho}(k)$ yra pakankamai didelis. 8.1 teiginys yra atskiras atvejis bendro teiginio apie empirinių koreliacijų asimptotinį normalumą tiesiniams procesams pavidalo $X_t = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_j Z_{t-j}$, kur $Z_t \sim \text{n.v.p.}(0, \sigma^2)$, žr., pavyzdžiui, 7.2.1, 7.2.2 teoremas Brockwell ir Davis (1991) knygoje.

Intuityviai aišku, kad 8.1 teiginys gali būti panaudotas tikrinant hipotezę apie tai, kad *iš karto kelios* koreliacijos yra lygios nuliui: $H_0$: $\rho(1) = \cdots = \rho(m) = 0$ su alternatyva $H_1$: $\exists i \in \{1, \ldots, m\}$ $\rho(i) \neq 0$. Box ir Pierce (1970) hipotezės $H_0$ tikrinimui pasiūlė vadinamąją *Portmanteau* statistiką

$$Q^*(m) = n\sum_{k=1}^{m}\hat{\rho}^2(k).$$

Tuo atveju, kai $Z_t \sim$ n.v.p.$(0, \sigma^2)$ ir esant išpildytoms atitinkamoms momentinėms sąlygoms, $Q^*(m)$ skirstinių prasme konverguoja į atsitiktinį dydį, turintį chi-kvadrato su $m$ laisvės laipsnių pasiskirstymą. Tam, kad pagerinti šios statistikos galios savybes mažų imčių atveju, Ljung ir Box (1978) pasiūlė modifikaciją

$$Q(m) = n(n+2) \sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\rho}^2(k)}{n-k}.$$

Kaip ir $Q^*(m)$ atveju, pastarosios statistikos ribinis skirstinys yra chi-kvadratas su $m$ laisvės laipsnių. Pastebėsime, kad praktikoje reikia atidžiai parinkti $m$ (dažnai literatūroje siūloma parinkti $m \approx \ln n$). Tuo atveju, kai į liekanas įeina vertinami parametrai, chi-kvadrato laisvės laipsnių skaičius atitinkamai sumažėja. Pavyzdžiui, ARMA$(p, q)$ modelio su įvertintais parametrais atveju chi-kvadrato laipsnių skaičius yra $n - p - q$.

*8.1* PRATIMAS. Tarkime, $X_1, \ldots, X_n$ yra imtis, gauta stebint MA(1) dydžius $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ su $Z_t \sim \mathrm{N}(0, 1)$. Užrašykite tikėtinumo funkciją parametro $\theta$ įverčiui skaičiuoti.

# 9 Prognozavimas

Šiame skyriuje išsiaiškinsime, kaip, turint stebimą imtį $X_1, \dots, X_n$, nusakyti nestebimų dydžių $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$ prognozę. Pagrindinis įrankis, naudojamas šiai prognozei nusakyti, yra prognozės lygtis. Pradžioje priminsime kai kuriuos Hilberto erdvių teorijos faktus.

## 9.1 Teorema apie projekciją ir prognozės lygtis

**9.1 apibrėžimas.** Tiesinė erdvė su skaliarine sandauga, kuri yra pilna atžvilgiu normos atitinkančios duotą skaliarinę sandaugą, vadinama *Hilberto erdve.*

Priminsime, kad norma $\|\cdot\|$, atitinkanti skaliarinę sandaugą $\langle\cdot,\cdot\rangle$, apibrėžiama lygybe $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Hilberto erdvių pavyzdžiai yra $\mathbb{R}^k = \{x = (x_1, \dots, x_k), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k\}$ su skaliarine sandauga $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^k x_i y_i$; $\mathbb{C}^k = \{x = (x_1, \dots, x_k), x_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, k\}$ su skaliarine sandauga $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^k x_i \overline{y}_i$; sekų erdvė $\ell^2 = \{x = (x_1, x_2, \dots), \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty\}$ su skaliarine sandauga $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i \overline{y}_i$; erdvė $L^2$ (apie ją bus kalbama išsamiau).

Prognozės sąvoka yra tampriai susijusi su fundamentalia teorema apie projekciją (įrodymą galima rasti pvz. Brockwell ir Davis (1991) knygoje).

**9.1 teorema** (Teorema apie projekciją)**.** *Tarkime $\mathcal{M}$ yra uždaras Hilberto erdvės $\mathcal{H}$ poerdvis ir $x \in \mathcal{H}$. Tuomet*

*(a) egzistuoja vienintelis $\hat{x} \in \mathcal{M}$, kad $\|x - \hat{x}\| = \inf_{y\in\mathcal{M}} \|x - y\|$;*

*(b) $\hat{x} \in \mathcal{M}$ ir $\|x - \hat{x}\| = \inf_{y\in\mathcal{M}} \|x - y\|$ tada ir tik tada, kai $\hat{x} \in \mathcal{M}$ ir $x - \hat{x} \in \mathcal{M}^\perp$.*

Čia $\mathcal{M}^\perp$ yra *ortogonalus aibės $\mathcal{M}$ papildinys*, t. y.

$$\mathcal{M}^\perp = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y\rangle = 0 \ \forall y \in \mathcal{M}\}.$$

Nesunku įrodyti, kad bet kurio $\mathcal{H}$ poaibio $\mathcal{M}$ ortogonalus papildinys $\mathcal{M}^\perp$ yra uždaras $\mathcal{H}$ poerdvis.

Iš teoremos apie projekciją gauname, kad bet kokiam uždaram Hilberto erdvės $\mathcal{H}$ poerdviui $\mathcal{M}$ egzistuoja toks vienintelis atvaizdis $P_\mathcal{M} : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$, kad $I - P_\mathcal{M} : \mathcal{H} \to \mathcal{M}^\perp$ (čia $I$ žymi tapatingą atvaizdį iš $\mathcal{H}$ į $\mathcal{H}$). Be to, $P_\mathcal{M} x = \hat{x}$.

Matome, kad norint duotam $x \in \mathcal{H}$ rasti artimiausią elementą $\hat{x}$ iš uždaro poerdvio $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ reikia spręsti lygtį

$$\langle x - \hat{x}, y \rangle = 0 \ \forall y \in \mathcal{M}. \tag{9.1}$$

Ši lygtis vadinama *prognozės lygtimi.*

Toliau nagrinėsime atvejį, kuomet $\mathcal{M} = \overline{\mathrm{sp}}\{x_1, \ldots, x_n\}$, čia $\overline{\mathrm{sp}}\{x_1, \ldots, x_n\} = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$ yra uždaras tiesinis aibės $\{x_1, \ldots, x_n\}$ apvalkalas[1]. Šiuo atveju duotam $x \in \mathcal{H}$ egzistuoja vienintelis elementas $P_{\mathcal{M}}x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, kuris randamas iš prognozės lygties

$$\langle x - P_{\mathcal{M}}x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathcal{M}$$

arba ekvivalenčiai

$$\langle P_{\mathcal{M}}x, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Taigi, norint rasti projekciją $P_{\overline{\mathrm{sp}}\{x_1,\ldots,x_n\}}x$, reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x_i, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Remiantis teorema apie projekciją, ši lygtis turi bent vieną sprendinį $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (gal būt ne vienintelį) ir *vienintelę* projekcijos reikšmę $P_{\mathcal{M}}x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$.

## 9.2 $L^2$ erdvė

**9.2 apibrėžimas.** Tegul $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ yra tikimybinė erdvė. Aibę atsitiktinių dydžių $X$, nusakytų šioje erdvėje ir tenkinančių $\mathrm{E}X^2 < \infty$ žymėsime $L_2$.

Apibrėžkime atvaizdį $\langle\ ,\ \rangle\colon L_2 \times L_2 \to \mathbb{R}$ formule $\langle X, Y \rangle = \mathrm{E}XY$. Nesunku matyti, kad taip apibrėžta operacija tenkina visas skaliarinės sandaugos savybes, išskyrus savybę $\langle X, X \rangle = 0 \iff X = 0$. Mat $\mathrm{E}X^2 = 0 \iff \mathrm{P}(X = 0) = 1$. Todėl toliau, vietoj vieno dydžio $X \in L_2$ nagrinėsime jo ekvivalentumo klasę, laikydami, kad ekvivalentumo klasei priklauso visi $Y \in L_2$, kurie beveik visur sutampa su $X$, t. y. $\mathrm{P}(X = Y) = 1$.

Taip apibrėžta ekvivalentumo klasių aibė yra tiesinė erdvė (patikrinti) ir yra pilna normos $\|\cdot\|$ atžvilgiu. Taigi aukščiau nusakyta ekvivalentumo klasių aibė yra Hilberto erdvė, kurią žymėsime $L^2$.

[1]Bet kokio Hilberto erdvės $\mathcal{H}$ poaibio $\{x_t, t \in T\}$ uždaru tiesiniu apvalkalu vadinamas mažiausias uždaras $\mathcal{H}$ poerdvis, apimantis $\{x_t, t \in T\}$

**9.3 apibrėžimas.** Tegul $\mathcal{M}$ yra uždaras $L^2$ poerdvis. Geriausia $X \in L^2$ prognoze vidutinių kvadratų prasme vadinsime tokį $\hat{X} \in \mathcal{M}$, kuris tenkina

$$\|X - \hat{X}\|^2 = \inf_{Y \in \mathcal{M}} \|X - Y\|^2 = \inf_{Y \in \mathcal{M}} \mathrm{E}(X - Y)^2.$$

Iš teoremos apie projekciją matome, kad $\hat{X} = P_{\mathcal{M}}X$, arba, ekvivalenčiai, $\hat{X}$ yra toks vienintelis $\mathcal{M}$ elementas, kuriam

$$\langle X - P_{\mathcal{M}}X, Y \rangle = 0 \quad \forall Y \in \mathcal{M}.$$

Pastaroji lygybė gali būti perrašyta

$$\mathrm{E}(YP_{\mathcal{M}}X) = \mathrm{E}(YX) \quad \forall Y \in \mathcal{M}.$$

Todėl $P_{\mathcal{M}}X$ gali būti sutapatintas su elemento $X \in L^2$ sąlyginiu vidurkiu atžvilgiu uždaro poerdvio $\mathcal{M} \subset L^2$: $\mathrm{E}(X|\mathcal{M}) = P_{\mathcal{M}}X$. Taip apibrėžtas sąlyginis vidurkis pasižymi įprastinėmis sąlyginio vidurkio savybėmis.

Tegul

$$\mathcal{M}(Y_1, \ldots, Y_n\} = \{g(Y_1, \ldots, Y_n),\ g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ -\ \text{mati}\} \cap L^2$$

yra uždaras $L^2$ poerdvis, sudarytas iš dydžių $g(Y_1, \ldots, Y_n)$ su $\mathrm{E}g^2(Y_1, \ldots, Y_n) < \infty$. (Pastebėsime, kad konstantos įeina į poerdvį $\mathcal{M}(Y_1, \ldots, Y_n\}$.) Šiuo atveju atsitiktinio dydžio $X \in L^2$ sąlyginis vidurkis atžvilgiu $Y_1, \ldots, Y_n$ apibrėžiamas lygybe

$$\mathrm{E}(X|Y_n, \ldots, Y_n) = P_{\mathcal{M}(Y_1, \ldots, Y_n)}X.$$

Toliau nagrinėkime atvejį kuomet $\mathcal{M} = \overline{\mathrm{sp}}\{1, Y_1, \ldots, Y_n\}$. Aišku, kad

$$\overline{\mathrm{sp}}\{1, Y_1, \ldots, Y_n\} \subset \mathcal{M}\{Y_1, \ldots, Y_n\}.$$

Todėl prognozė $P_{\overline{\mathrm{sp}}\{1, Y_1, \ldots, Y_n\}}X$ negali būti geresnė (vidutinių kvadratų prasme) nei $P_{\mathcal{M}\{Y_1, \ldots, Y_n\}}X$. Tačiau praktikoje apsiribojama *tiesine* prognoze $P_{\overline{\mathrm{sp}}\{1, Y_1, \ldots, Y_n\}}X$, kurią nėra sudėtinga suskaičiuoti. Šiuo atveju

$$P_{\overline{\mathrm{sp}}\{1, Y_1, \ldots, Y_n\}}X = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Y_i, \quad Y_0 := 1.$$

Taigi, $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ randami sprendžiant prognozės lygtį

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathrm{E}(Y_i Y_j) = \mathrm{E}(X Y_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Iš šios lygties matome, kad ieškomieji koeficientai $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ priklauso tik nuo pirmos bei antros eilės momentų $\mathrm{E}X$, $\mathrm{E}Y_i$, $\mathrm{E}(XY_i)$, $\mathrm{E}(Y_iY_j)$, $i, j = 1, \dots, n$.

**9.4 apibrėžimas.** Tegul $X, Y_1, \dots, Y_n$ yra $L^2$ elementai. Tuomet *geriausia tiesine $X$ prognoze* atžvilgiu $Y_1, \dots, Y_n$ vadinsime tokį $\overline{\mathrm{sp}}\{1, Y_1, \dots, Y_n\}$ elementą $\hat{X}$, kuris tenkina

$$\|X - \hat{X}\|^2 = \inf_{Y \in \overline{\mathrm{sp}}\{1, Y_1, \dots, Y_n\}} \|X - Y\|^2.$$

Iš teoremos apie projekciją seka, kad $\hat{X} = P_{\overline{\mathrm{sp}}\{1, Y_1, \dots, Y_n\}} X$.

*9.1* PASTABA. Tuo atveju, kai $(X, Y_1, \dots, Y_n)$ turi daugiamatį normalųjį skirstinį, turime

$$P_{\overline{\mathrm{sp}}\{1, Y_1, \dots, Y_n\}} X = \mathrm{E}(X | Y_1, \dots, Y_n).$$

## 9.3 Stacionarių procesų prognozė

Tegul $X_1, \dots, X_n$ yra imtis iš stacionarios sekos $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ su vidurkiu $\mu$ ir kovariacine funkcija $r(\cdot)$. Ieškosime nestebimų elementų $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$ tiesinės prognozės atžvilgiu $X_1, \dots, X_n$, t. y. nusakysime

$$P_{\overline{\mathrm{sp}}\{1, X_1, \dots, X_n\}} X_{n+h}, \quad h = 1, 2, \dots.$$

Nesunku matyti, kad

$$P_{\overline{\mathrm{sp}}\{1, X_1, \dots, X_n\}} X_{n+h} = \mu + P_{\overline{\mathrm{sp}}\{Y_1, \dots, Y_n\}} Y_{n+h} \ \text{ su } \ Y_k := X_k - \mu.$$

Todėl, nemažinant bendrumo, laikysime kad $\mathrm{E}X_t = 0$.

*Vieno žingsnio prognozė.* Apibrėškime

$$\hat{X}_{n+1} = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_1, \dots, X_n\}} X_{n+1}, & n \geqslant 1. \end{cases}$$

Tuomet $\hat{X}_{n+1} = \phi_{n1}X_n + \cdots + \phi_{nn}X_1$, $n \geqslant 1$, kur koeficientai $\phi_{n1}, \ldots, \phi_{nn}$ randami iš prognozės lygties

$$\langle X_{n+1} - \hat{X}_{n+1}, X_{n+1-j}\rangle = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

arba, ekvivalenčiai,

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_{ni}\langle X_{n+1-i}, X_{n+1-j}\rangle = \langle X_{n+1}, X_{n+1-j}\rangle, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Taigi, norint rasti koeficientus $\phi_{n_1}, \ldots, \phi_{nn}$, reikia išspręsti lygtis

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_{ni} r(i-j) = r(j), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{9.2}$$

Pažymėję kovariacijų matricą $(r(i-j))_{i,j=1,\ldots,n} =: R_n$, bei pažymėję $r_n := (r(1), \ldots, r(n))'$, $\phi_n := (\phi_{n1}, \ldots, \phi_{nn})'$, (9.2) lygtis galime užrašyti trumpai

$$R_n\phi_n = r_n. \tag{9.3}$$

Vėlgi, teorema apie projekciją garantuoja sprendinio $(\phi_{n1}, \ldots, \phi_{nn})$ (galbūt ne vienintelio) ir vienintelės prognozės $\hat{X}_{n+1} = \phi_{n1}X_n + \cdots + \phi_{nn}X_1$ egzistavimą. Gerai žinoma, kad $R_n$ yra neišsigimusi su visais $n \geqslant 1$, jeigu $r(0) > 0$ ir $r(h) \to 0$, kai $h \to \infty$. Todėl daugeliu atveju galima rasti vienintelį sprendinį

$$\phi_n = R_n^{-1} r_n.$$

Tokiu atveju

$$\hat{X}_{n+1} = \mathbb{X}_n' R_n^{-1} r_n, \quad \mathbb{X}_n := (X_1, \ldots, X_n)'.$$

Kuomet $r(h)$ neartėja į nulį, galima rasti ne vienintelį tokį sprendinį (žr. 9.1 pratimą).

Svarbi prognozės kokybės charakteristika yra *vidutinė kvadratinė prognozės paklaida*, apibrėžiama lygybe $v_n = \mathrm{E}(X_{n+1} - \hat{X}_{n+1})^2$. Turime

$$\begin{aligned} v_n &= \mathrm{E}X_{n+1}^2 - 2\mathrm{E}X_{n+1}\hat{X}_{n+1} + \mathrm{E}\hat{X}_{n+1}^2 \\ &= r(0) + \mathrm{E}\hat{X}_{n+1}(\hat{X}_{n+1} - X_{n+1}) - \mathrm{E}X_{n+1}\hat{X}_{n+1} \\ &= r(0) - \mathrm{E}X_{n+1}\hat{X}_{n+1} \\ &= r(0) - \sum_{i=1}^{n} \phi_{ni} r(i). \end{aligned} \tag{9.4}$$

Tuo atveju, kai matrica $R_n$ yra neišsigimusi, gauname

$$v_n = r(0) - r_n' R_n^{-1} r_n.$$

*Kelių žingsnių prognozė.* Panašiai kaip vieno žingsnio atveju, turime

$$P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_1,\dots,X_n\}} X_{n+h} = \phi_{n1}^{(h)} X_n + \cdots + \phi_{nn}^{(h)} X_1, \quad h \geqslant 1, \tag{9.5}$$

kur vektorius $\phi_n^{(h)} := (\phi_{n1}^{(h)}, \dots, \phi_{nn}^{(h)})'$ randamas iš lygties

$$R_n \phi_n^{(h)} = r_n^{(h)}, \quad r_n^{(h)} := (r(h), \dots, r(n+h-1))'. \tag{9.6}$$

Tuo atveju, kai kovariacijų matrica $R_n$ yra neišsigimusi, išspręsti (9.3) ar (9.6) lygtis nėra lengva, ypač dideliems $n$. Todėl praktikoje prognozių skaičiavimui naudojami rekurentiniai metodai. Dažniausiai yra taikomi Durbin'o–Levinson'o bei inovacijų algoritmai. Čia pateiksime tik Durbin'o–Levinson'o algoritmą.

Durbin'o–Levinson'o algoritmas. Jeigu $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra stacionari seka su $\mathrm{E}X_t = 0$ ir kovariacija $r(\cdot)$, kuriai matrica $R_n$ yra neišsigimusi su visais $n \geqslant 1$, tai koeficientai $\phi_{n1}, \dots, \phi_{nn}$ ir vidutinė kvadratinė prognozės paklaida $v_n$ randami iš lygybių $\phi_{11} = \rho(1)$, $v_0 = r(0)$, $v_1 = r(0)(1 - \rho^2(1))$,

$$\begin{aligned}
v_n &= v_{n-1}(1 - \phi_{nn}^2), \\
\phi_{nn} &= \frac{r(n) - \sum_{i=1}^{n-1} \phi_{n-1,i} r(n-i)}{v_{n-1}}, \\
\begin{pmatrix} \phi_{n1} \\ \vdots \\ \phi_{n,n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi_{n-1,1} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,n-1} \end{pmatrix} - \phi_{nn} \begin{pmatrix} \phi_{n-1,n-1} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,1} \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 2.
\end{aligned}$$

Remiantis (9.4), $\phi_{nn}$ išraišką galima perrašyti ir taip:

$$\phi_{nn} = \frac{\rho(n) - \sum_{i=1}^{n-1} \phi_{n-1,i} \rho(n-i)}{1 - \sum_{i=1}^{n-1} \phi_{n-1,i} \rho(i)}.$$

Durbin'o–Levinson'o algoritmo įrodymą galima rasti pavyzdžiui Brockwell ir Davis (2002) knygoje.

## 9.4 ARMA procesų prognozavimas

AR(p) modelis. Tarkime, kad imtis $X_1, \dots, X_n$ gauta stebint kauzalų AR($p$) procesą

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Rasime vieno žingsnio prognozę $\hat{X}_{n+1}$. Trumpumo dėlei žymėkime $P_n := P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_1,\dots,X_n\}}$. Turime

$$\begin{aligned} P_n X_{n+1} &= P_n(\phi_1 X_n + \cdots + \phi_p X_{n+1-p} + Z_{n+1}) \\ &= \phi_1 P_n X_n + \cdots + \phi_p P_n X_{n+1-p} + P_n Z_{n+1}. \end{aligned}$$

Tuo atveju, kai $n$ yra pakankamai didelis ($n \geqslant p$), gauname

$$\hat{X}_{n+1} = \phi_1 X_n + \cdots + \phi_p X_{n+1-p}$$

ir

$$X_{n+1} - \hat{X}_{n+1} = Z_{n+1}. \tag{9.7}$$

Taigi, vidutinė kvadratinė prognozės paklaida $v_n = \sigma^2$.

Skaičiuojant kelių žingsnių prognozę, galima rekurentiškai įsistatyti jau turimas prognozių reikšmes. Atveju $h = 2$ turime ($n$ pakankamai didelis):

$$P_n X_{n+2} = \phi_1 \hat{X}_{n+1} + \phi_2 X_n + \cdots + \phi_p X_{n+2-p}$$

ir

$$\begin{aligned} X_{n+2} - P_n X_{n+2} &= \phi_1(X_{n+1} - \hat{X}_{n+1}) + Z_{n+2} \\ &= \phi_1 Z_{n+1} + Z_{n+2}. \end{aligned}$$

Taigi,

$$\mathrm{E}(X_{n+2} - P_n X_{n+2})^2 = (1 + \phi_1^2)\sigma^2 \geqslant \sigma^2 = \mathrm{E}(X_{n+1} - \hat{X}_{n+1})^2.$$

Panašiai, jeigu $n$ yra pakankamai didelis, gauname

$$P_n X_{n+h} = \phi_1 P_n X_{n+h-1} + \cdots + \phi_{h-1} P_n X_{n+1} + \phi_h X_n + \cdots + \phi_p X_{n+h-p}.$$

MA(q) modelis. Pradėkime nuo apgręžiamo MA(1) proceso $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, $t \in \mathbb{Z}$. Turime

$$Z_t = \sum_{i=0}^{\infty} (-\theta)^j X_{t-j}.$$

Todėl, norint nusakyti atitinkamas prognozes, reikia apibrėžti projekcijos operatorių $\tilde{P}_n$ begalinės praeities $\{X_t, -\infty < t \leqslant n\}$ atžvilgiu. Laikysime, kad

$$\tilde{P}_n X_{n+h} = \lim_{m \to -\infty} P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_m, \dots, X_0, \dots, X_n\}} X_{n+h}.$$

Čia riba nusakyta vidutinių kvadratų prasme.

Taigi, MA(1) atveju gauname

$$\tilde{P}_n X_{n+1} \ = \ \tilde{P}_n Z_{n+1} + \theta \tilde{P}_n Z_n \ = \ \theta Z_n. \tag{9.8}$$

Vadinasi,

$$X_{n+1} - \tilde{P}_n X_{n+1} = Z_{n+1}$$

ir

$$\mathrm{E}(X_{n+1} - \tilde{P}_n X_{n+1})^2 = \sigma^2.$$

Pastebėsime, kad (9.8) išraiškoje $Z_n$ yra nestebimas, taigi prognozės skaičiavimui reikėtų laikyti $Z_0 = 0$. Tuomet $Z_1 = X_1$, $Z_2 = X_2 - \theta Z_1$ ir t.t.

$h \geqslant 2$ atveju gausime

$$\tilde{P}_n X_{n+h} = \tilde{P}_n Z_{n+h} + \theta \tilde{P}_n Z_{n+h-1} = 0,$$

t. y. MA(1) proceso $h \geqslant 2$ žingsnių prognozė yra $\mathrm{E}X_n$ (intuityviai aišku). Tada

$$X_{n+h} - \tilde{P}_n X_{n+h} = Z_{n+h} + \theta Z_{n+h-1}$$

ir vidutinė kvadratinė prognozės paklaida lygi $(1+\theta^2)\sigma^2$ visiems $h \geqslant 2$. Panašios išvados galioja ir bendro MA($q$) modelio atveju.

ARMA($p, q$) modelis. Tegul duotas kauzalus ir apgręžiamas ARMA($p, q$) modelis

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Tuomet

$$\tilde{P}_n X_{n+1} = \phi_1 X_n + \cdots + \phi_p X_{n+1-p} + \theta_1 Z_n + \cdots + \theta_q Z_{n+1-q}$$

ir

$$X_{n+1} - \tilde{P}_n X_{n+1} = Z_{n+1}.$$

Taigi vieno žingsnio prognozės vidutinė paklaida lygi $\sigma^2$. Nesunku matyti, kad kelių žingsnių prognozės skaičiuojasi rekurentiškai:

$$\tilde{P}_n X_{n+h} = \phi_1 \tilde{P}_n X_{n+h-1} + \cdots + \phi_p \tilde{P}_n X_{n+h-p} + \theta_1 \tilde{P}_n Z_{n+h-1} + \cdots + \theta_q \tilde{P}_n Z_{n+h-q},$$

čia

$$\tilde{P}_n X_{n+h-j} = X_{n+h-j}, \quad \text{kai} \quad j \geqslant h, \quad \tilde{P}_n Z_{n+h-j} = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad j < h, \\ Z_{n+h-j}, & \text{kai} \quad j \geqslant h. \end{cases}$$

Tam, kad rasti vidutinę kvadratinę prognozės paklaidą, patogu naudoti MA($\infty$) reprezentaciją $X_t = Z_t + \psi_1 Z_{t-1} + \psi_2 Z_{t-2} + \ldots$. Iš jos gauname

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n X_{n+h} &= \tilde{P}_n Z_{n+h} + \psi_1 \tilde{P}_n Z_{n+h-1} + \psi_2 \tilde{P}_n Z_{n+h-2} + \ldots \\ &= \psi_h Z_n + \psi_{h+1} Z_{n-1} + \ldots \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_{n+h} - \tilde{P}_n X_{n+h})^2 &= \mathrm{E}(Z_{n+h} + \psi_1 Z_{n+h-1} + \cdots + \psi_{h-1} Z_{n+1})^2 \\ &= (1 + \psi_1^2 + \cdots + \psi_{h-1}^2)\sigma^2. \end{aligned}$$

## 9.5 Prognozės rėžiai

Tegul $\{X_t\}$ yra stacionarus Gauss'o procesas su vidurkiu 0, neišsigimusia kovariacijų matrica $R_n$, $n \geqslant 1$. Tuomet geriausia tiesinė $h$ žingsnių prognozė turi pavidalą (žr. (9.5), (9.6))

$$P_n X_{n+h} = (r_n^{(h)})' R_n^{-1} (X_n, \ldots, X_1)'.$$

Kadangi $(X_n, \ldots, X_1)'$ turi daugiamatį normalųjį skirstinį, tai

$$P_n X_{n+h} = \mathrm{E}(X_{n+h} | X_n, \ldots, X_1)$$

ir prognozės paklaida $X_{n+h} - P_n X_{n+h}$ yra pasiskirsčiusi pagal normalųjį dėsnį su vidurkiu 0 ir dispersija $\sigma_{n,h}^2 := \mathrm{E}(X_{n+h} - P_n X_{n+h})^2$. Kiekvienu konkrečiu atveju $\sigma_{n,h}^2$ gali būti suskaičiuotas. Tuomet duotam $1 - \alpha$ (pvz., 0,9; 0,95)

$$\mathrm{P}\big\{X_{n+h} \in [P_n X_{n+h} - z_{1-\alpha/2}\sigma_{n,h}, P_n X_{n+h} + z_{1-\alpha/2}\sigma_{n,h}]\big\} = 1 - \alpha,$$

čia $z_{1-\alpha/2}$ žymi standartinio normaliojo dėsnio $(1 - \alpha/2)$-eilės kvantilį. Intervalas $[P_n X_{n+h} - z_{1-\alpha/2}\sigma_{n,h}, P_n X_{n+h} + z_{1-\alpha/2}\sigma_{n,h}]$ nusako $X_{n+h}$ stebėjimo $(1 - \alpha)$-*eilės prognozės rėžius*.

*9.1* PAVYZDYS. Tuo atveju, kai $\{X_t\}$ yra kauzalus AR($p$) procesas ir $Z_t$ turi normalųjį skirstinį su parametrais $(0, \sigma^2)$, vieno žingsnio prognozės paklaida lygi $Z_{n+1}$ (žr. (9.7) lygybę). Taigi $(1-\alpha)$-eilės prognozės rėžiai yra $P_n X_{n+1} \pm z_{1-\alpha/2}\sigma$.

*9.1* PRATIMAS. Tegul procesas $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ duotas lygybe

$$X_t = A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t),$$

čia $\lambda \in (0, \pi)$ yra konstanta, $A$ ir $B$ nekoreliuoti atsitiktiniai dydžiai su $\mathrm{E}A = \mathrm{E}B = 0$, $\mathrm{E}A^2 = \mathrm{E}B^2 = \sigma^2$. Parodykite, kad šis procesas yra stacionarus ir raskite jo kovariacinę funkciją. Parodykite, kad kovariacijų matrica $R_n$ yra išsigimusi kai $n \geqslant 3$ ir todėl galima užrašyti ne vieną prognozės $\hat{X}_{n+1}$ išraišką. (Pasinaudodami matematine indukcija parodykite, kad $X_{n+1} = 2X_n \cos\lambda - X_{n-1}$, $n \geqslant 2$.)

*9.2* PRATIMAS. Užrašykite AR($p$) proceso $h$ žingsnių vidutinės kvadratinės prognozės paklaidos išraišką.

*9.3* PRATIMAS. Raskite stacionaraus ergodiško FARIMA(0,$d$,0) proceso, nusakyto (6.4) lygtimi, vieno žingsnio prognozės koeficientus.

# 10 Dalinės autokoreliacijos funkcija

Kaip žinome, slenkamojo vidurkio modelio

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}, \quad Z_t \sim \mathrm{BT}(0, \sigma^2)$$

kovariacinė funkcija yra

$$r(h) = \begin{cases} 0, & |h| > q, \\ \sigma^2 \sum_{i=0}^{q-|h|} \theta_i \theta_{i+|h|}, & |h| \leqslant q, \end{cases}$$

t. y. iš koreliacinės funkcijos $\rho(h) = r(h)/r(0)$ eilės galima identifikuoti MA modelio eilę. Akivaizdu, kad analogiškas kelias netinka autoregresijos atveju. Žemiau paaiškinsime, kaip identifikuoti modelį autoregresijos atveju.

Fiksuokime $k > 1$ ir nagrinėkime imtį $X_{t-k}, X_{t-k+1}, \ldots, X_t$ iš stacionarios sekos $\{X_t\}$ su nuliniu vidurkiu. Tarkime, $\hat{X}_t := P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_{t-k+1},\ldots,X_{t-1}\}} X_t$ yra vieno žingsnio $X_t$ *prognozė* atžvilgiu $X_{t-k+1}, \ldots, X_{t-1}$, čia $\overline{\mathrm{sp}}\{X_t, t \in T\}$ žymi tiesinį uždarą apvalkalą generuotą $X_t, t \in T$. Tuomet

$$\hat{X}_t = \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_{k-1} X_{t-k+1},$$

kur $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ randami atitinkamo algoritmo pagalba. Pažymėkime liekaną

$$\hat{Z}_t = X_t - \hat{X}_t = X_t - \beta_1 X_{t-1} - \cdots - \beta_{k-1} X_{t-k+1}.$$

Dėl stacionarumo, vieno žingsnio $X_{t-k}$ prognozė „atgal“ $\hat{\hat{X}}_{t-k} := P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_{t-k+1},\ldots,X_{t-1}\}} X_{t-k}$ yra

$$\hat{\hat{X}}_{t-k} = \beta_1 X_{t-k+1} + \cdots + \beta_{k-1} X_{t-1},$$

o liekana

$$\hat{\hat{Z}}_{t-k} = X_{t-k} - \hat{\hat{X}}_{t-k} = X_{t-k} - \beta_1 X_{t-k+1} - \cdots - \beta_{k-1} X_{t-1}.$$

Koreliacija tarp liekanų $\hat{Z}_t$ ir $\hat{\hat{Z}}_{t-k}$ vadinama *dalinės autokoreliacijos funkcija* (angl. PACF – partial autocorrelation function). Ją žymėsime $\alpha(k)$.

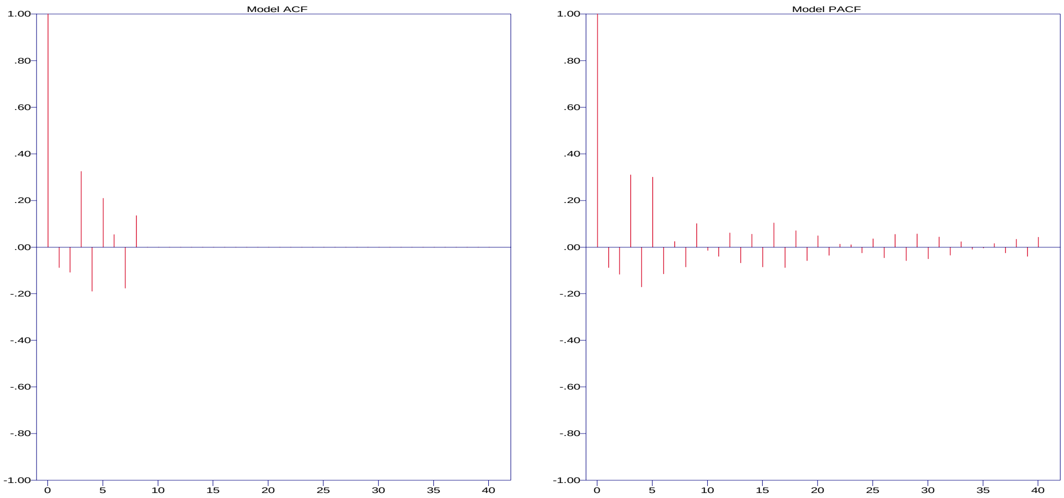
**10.1 apibrėžimas.** Stacionarios sekos $\{X_t\}$ dalinės autokoreliacijos funkcija apibrėžiama

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= \mathrm{Corr}(\hat{Z}_t, \hat{\hat{Z}}_{t-k}) = \mathrm{Corr}(\hat{Z}_{k+1}, \hat{\hat{Z}}_1) \\ &= \mathrm{Corr}(X_{k+1} - P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_2,\ldots,X_k\}} X_{k+1}, X_1 - P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_2,\ldots,X_k\}} X_1), \ k \geqslant 2, \\ \alpha(1) &= \rho(1). \end{aligned}$$

Skaičiavimams dažnai patogu naudotis tuo, kad

$$\alpha(k) = \frac{\mathrm{Cov}(X_{k+1}, X_1 - P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_2,\dots,X_k\}}X_1)}{\mathrm{Cov}(X_{k+1}, X_{k+1} - P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_2,\dots,X_k\}}X_{k+1})}. \qquad (10.1)$$

14 paveiksle pavaizduota slenkamojo vidurkio su $q = 8$ proceso koreliacija ir dalinė autokoreliacija.




14 pav. MA(8) proceso su koeficientais $(\theta_1, \dots, \theta_8) = (0,2; -0,3; 0,4; -0,1; 0,1; 0,2; -0,3; 0,2)$ koreliacija ir dalinė autokoreliacija, $Z_t \sim \mathrm{N}(0,1)$.

*10.1* PAVYZDYS. Tegul $X_1, X_2, X_3$ yra imtis iš stacionarios sekos. Tuomet (patikrinkite, kad $\beta_1 = \rho(1)$)

$$\hat{X}_3 = \rho(1)X_2, \ \hat{\hat{X}}_1 = \rho(1)X_2.$$

Todėl,

$$\begin{aligned} \alpha(2) &= \mathrm{Corr}(X_3 - \rho(1)X_2, X_1 - \rho(1)X_2) \\ &= \frac{\mathrm{Cov}(X_3 - \rho(1)X_2, X_1 - \rho(1)X_2)}{\sqrt{\mathrm{D}(X_3 - \rho(1)X_2)}\sqrt{\mathrm{D}(X_1 - \rho(1)X_2)}} \\ &= \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)}, \end{aligned}$$

nes

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_3 - \rho(1)X_2, X_1 - \rho(1)X_2) &= \mathrm{Cov}(X_3, X_1 - \rho(1)X_2) \\
&= r(2) - \rho(1)r(1) \\
&= r(0)(\rho(2) - \rho^2(1)),
\end{aligned}$$

o

$$\mathrm{D}(X_3 - \rho(1)X_2) = r(0)(1 - \rho^2(1)).$$

Bendru atveju turime (žr. (10.1))

$$\alpha(k) = \frac{\rho(k) - \beta_1\rho(k-1) - \cdots - \beta_{k-1}\rho(1)}{1 - \beta_1\rho(1) - \cdots - \beta_{k-1}\rho(k-1)}. \tag{10.2}$$

Čia $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ galima rasti iš prognozės lygties

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \ldots & \rho(k-2) \\ \rho(1) & 1 & \ldots & \rho(k-3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho(k-2) & \rho(k-3) & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(k-1) \end{pmatrix}.$$

Jeigu tarsime, kad seka $X_t$ aprašoma AR(1) lygtimi, tai turėsime $\rho(k) = \phi^k$. Vadinasi, šiuo atveju $\alpha(2) = 0$ ir (nesunku matyti) $\alpha(k) = 0$, kai $k \geqslant 2$.

Panašios išvados galioja ir bendru kauzalaus AR($p$) proceso atveju, t. y. kai $X_{k+1} = \phi_1 X_k + \cdots + \phi_p X_{k+1-p} + Z_{k+1}$. Pirmiausia pastebėsime, kad su $k > p$ teisinga

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{k+1} &= P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_2,\ldots,X_k\}} X_{k+1} \\
&= P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_2,\ldots,X_k\}} (\phi_1 X_k + \cdots + \phi_p X_{k+1-p} + Z_{k+1}) \\
&= \phi_1 P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_2,\ldots,X_k\}} X_k + \cdots + \phi_p P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_2,\ldots,X_k\}} X_{k+1-p} + P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_2,\ldots,X_k\}} Z_{k+1} \\
&= \phi_1 X_k + \cdots + \phi_p X_{k+1-p} \\
&= X_{k+1} - Z_{k+1}.
\end{aligned}$$

Iš kitos pusės, dėl stacionarumo,

$$\begin{aligned}
\hat{\hat{X}}_1 &= P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_2,\ldots,X_k\}} X_1 \\
&= \phi_1 X_2 + \cdots + \phi_p X_{p+1}.
\end{aligned}$$

Taigi, jei $k > p$,

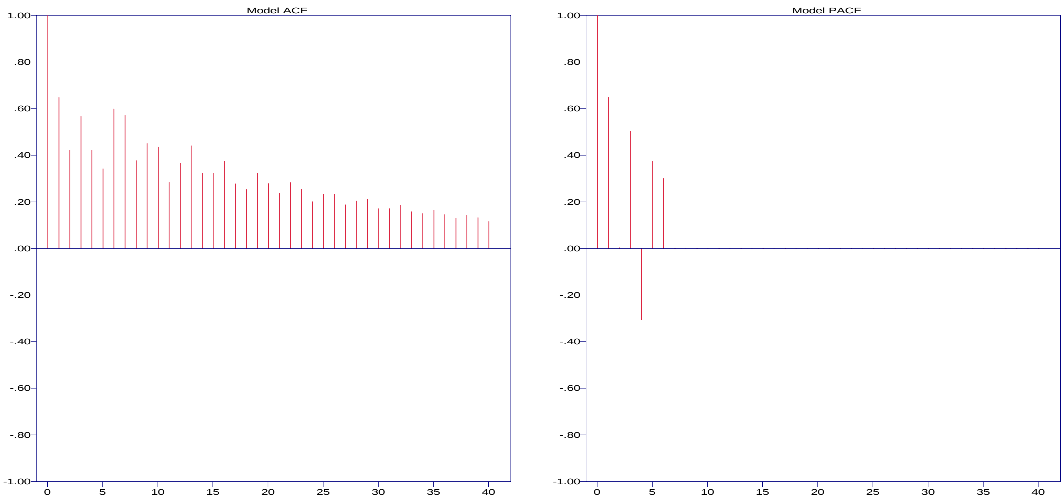
$$\begin{aligned}\alpha(k) &= \operatorname{Corr}(\hat{Z}_{k+1}, \hat{\hat{Z}}_1) \\ &= \operatorname{Corr}(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1}, X_1 - \hat{\hat{X}}_1) \\ &= \operatorname{Corr}(Z_{k+1}, X_1 - \phi_1 X_2 - \cdots - \phi_p X_{p+1}) \\ &= 0,\end{aligned}$$

nes dydis $X_1 - \phi_1 X_2 - \cdots - \phi_p X_{p+1} \equiv f(Z_{p+1}, Z_p, \dots)$ nekoreliuoja su $Z_{k+1}$. (Pastarąjį faktą galima išvesti ir remiantis (10.2) bei Yule–Walker'io lygtimis.) Taigi gavome:

**10.1 teiginys.** *Kauzalaus AR(p) proceso atveju dalinės autokoreliacijos funkcija tenkina*

$$\alpha(k) = 0, \quad k > p.$$

15 paveiksle pavaizduota autoregresijos proceso su $p = 6$ koreliacija ir dalinė autokoreliacija.




15 pav. AR(6) proceso su koeficientais $(\phi_1, \dots, \phi_6) = (0,8; -0,5; 0,6; -0,4; 0,1; 0,3)$ koreliacija ir dalinė autokoreliacija, $Z_t \sim \mathrm{N}(0,1)$.

*10.2* PAVYZDYS. Nagrinėkime MA(1) modelį $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, $|\theta| < 1$. Tuomet, kaip matėm,

$$\begin{aligned}
\alpha(1) &= \rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}, \\
\alpha(2) &= \frac{\rho(2)-\rho^2(1)}{1-\rho^2(1)} = \frac{-\rho^2(1)}{1-\rho^2(1)} \\
&= -\frac{\theta^2}{1+\theta^2+\theta^4}.
\end{aligned}$$

Nesudėtingi skaičiavimai duoda bendrą PACF formulę:

$$\alpha(k) = \frac{(-1)^{k+1}\theta^k(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(k+1)}}. \tag{10.3}$$

Dalinės autokoreliacijos sąvoka, kaip jau minėjome, yra tampriai susijusi su prognozavimu. Tegul prognozės išraiškoje

$$P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_1,\ldots,X_k\}} X_{k+1} = \phi_{k1}X_k + \cdots + \phi_{kk}X_1$$

koeficientai $\phi_{k1}, \ldots, \phi_{kk}$ visiems $k$ nustatomi vienareikšmiškai, t. y. kovariacijų matrica

$$\begin{pmatrix} r(0) & r(1) & \ldots & r(k) \\ r(1) & r(0) & \ldots & r(k-1) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ r(k) & r(k-1) & \ldots & r(0) \end{pmatrix}$$

yra neišsigimusi su visais $k$ (taip yra, jeigu $r(0) > 0$ ir $r(h) \to 0$ su $h \to \infty$). Tada iš prognozės lygties

$$\langle X_{k+1} - (\phi_{k1}X_k + \cdots + \phi_{kk}X_1), X_j \rangle = 0, \ j = 1, \ldots, k$$

gauname tokias Yule–Walker'io tipo lygtis:

$$\begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \ldots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \ldots & \rho(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \ldots & \rho(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(k) \end{pmatrix}.$$

Remiantis Durbino–Levinsono algoritmu (žr. Brockwell ir Davis (1991)) parodoma, kad dalinė autokoreliacijos funkcija $\alpha(k)$ sutampa su $\phi_{kk}$.

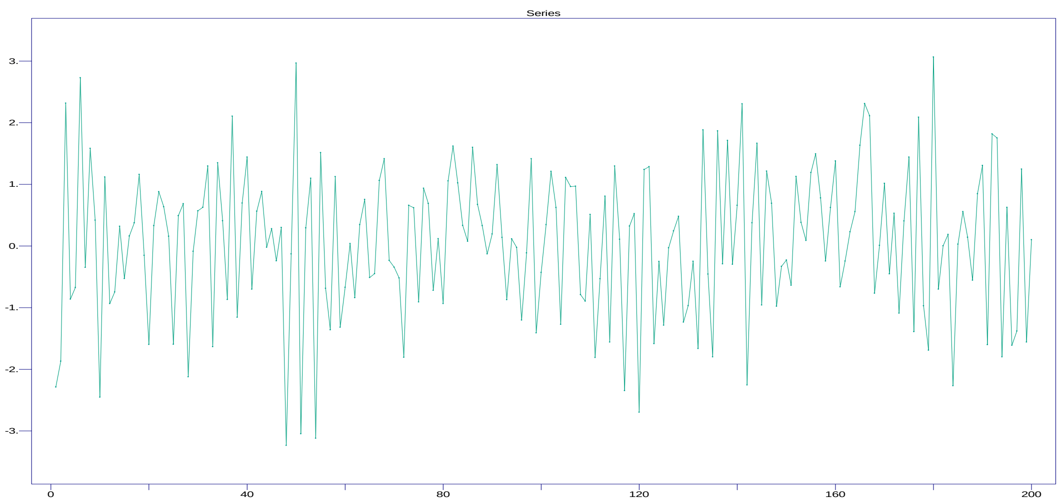
Iš lygybės

$$\begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \cdots & \rho(k-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \cdots & \rho(0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(k) \end{pmatrix},$$

pakeitus koreliacijas $\rho(k)$ empirinėmis koreliacijomis $\hat{\rho}(k)$, gauname *dalinės autokoreliacijos įvertį* $\hat{\alpha}(k) = \hat{\phi}_{kk}$ (jis yra yra stebėjimų $X_1, \ldots, X_n$ funkcija), $1 \leqslant k < n$. Pastebėsime, kad empirinėms PACF reikšmėms skaičiuoti taip pat galima taikyti rekurentinį Durbin'o–Watson'o algoritmą.

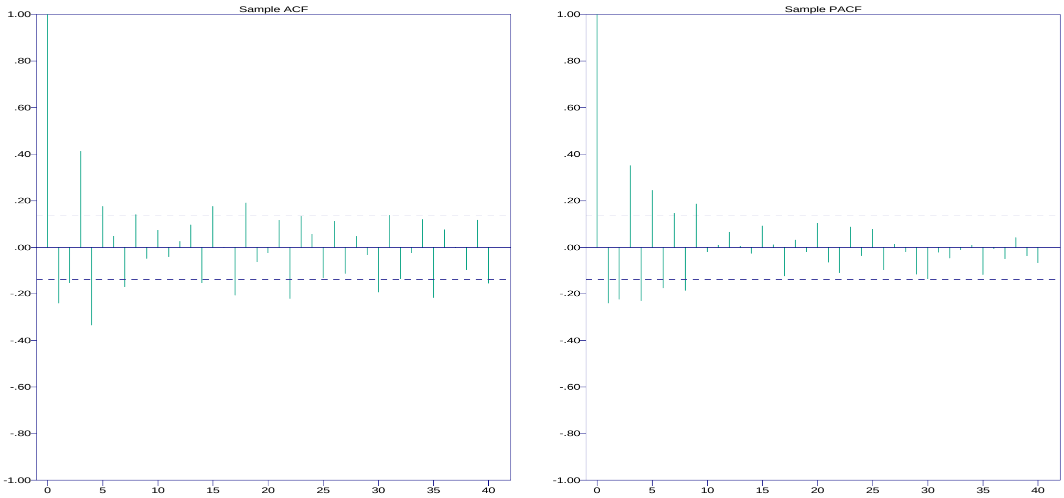
Panašiai kaip slenkamojo vidurkio atveju empirinė koreliacinė funkcija padeda nustatyti modelio eilę, autoregresijos modelio eilę gali padėti nustatyti empirinė dalinės autokoreliacijos funkcija. Pažymėtina, kad PACF nėra informatyvi slenkamojo vidurkio atveju.

16 ir 17 paveiksluose pavaizduota slenkamojo vidurkio proceso su $q = 8$ generuota trajektorija, bei empirinės koreliacija ir dalinė autokoreliacija.

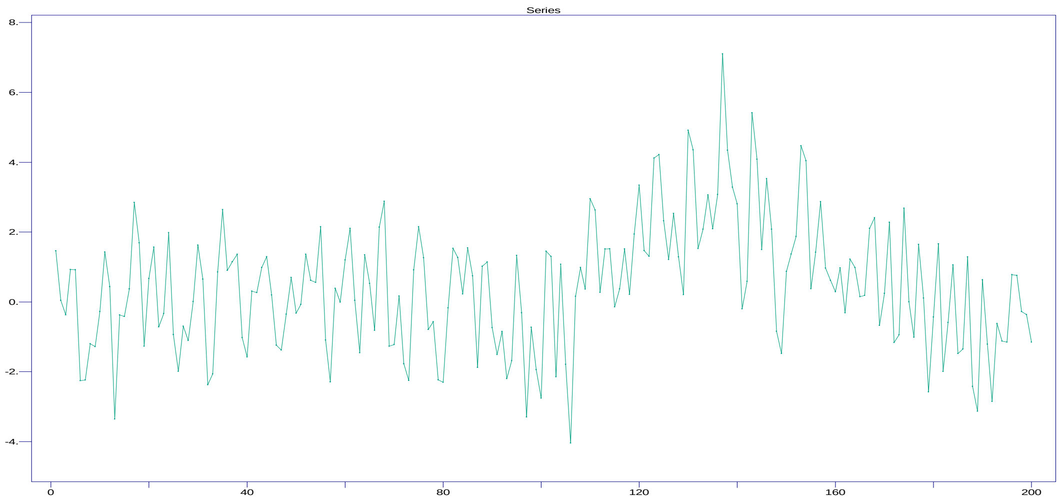



16 pav. MA(8) proceso (žr. 14 pav.) generuota realizacija, $Z_t \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

18 ir 19 paveiksluose pavaizduota autoregresijos proceso su $p = 6$ generuota trajektorija, bei empirinės koreliacija ir dalinė autokoreliacija.

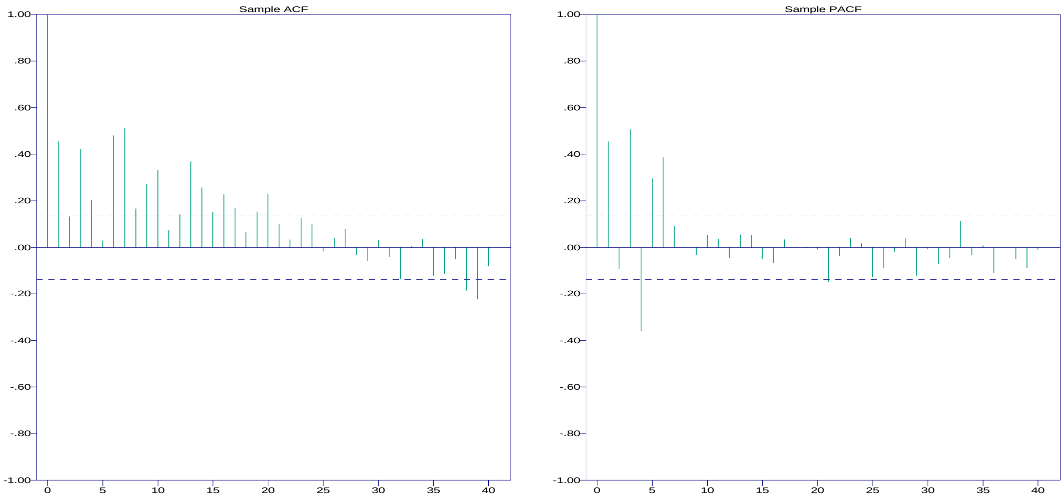



17 pav. MA(8) proceso (žr. 14 pav.) empirinė autokoreliacija ir empirinė dalinė autokoreliacija.




18 pav. AR(6) proceso (žr. 15 pav.) generuota realizacija, $Z_t \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Kaip ir empirinei koreliacijai, žinomos teoremos apie asimptotinį empirinės dalinės autokoreliacijos skirstinį. Pavyzdžiui, AR($p$) modelio atveju,




19 pav. AR(6) proceso (žr. 15 pav.) empirinė autokoreliacija ir empirinė dalinė autokoreliacija.

su $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\hat{\phi}_{kk} \xrightarrow{d} N(0,1), \text{ kai } k > p.$$

*10.1* PRATIMAS. Įrodykite (10.2) lygybę.

*10.2* PRATIMAS. Įrodykite (10.3) formulę.

*10.3* PRATIMAS. Remdamiesi 9.3 pratimu, parodykite kad FARIMA(0,$d$,0) atveju dalinės autokoreliacijos funkcija yra $\alpha(k) = d/(k-d)$.

# 11 Kainos ir finansinės grąžos

Kaip matysime, paprastai finansų ekonometrijoje analizuojama ne kainos, o jų grąžos. Tarp priežasčių, lemiančių tokį analizės objekto pasirinkimą, reikėtų paminėti pagrindines:

• vidutiniam investuotojui grąža yra *pilna*, nepriklausanti nuo skalės (matavimo vienetų) informacija apie investavimo galimybes;

• dažnai grąžos turi „gražesnes" nei kainos statistikines savybes, todėl su jomis lengviau „dirbti". Konkrečiau kalbant, kainos skirtingais laiko momentais yra žymiau stipriau koreliuotos nei (santykiniai) pokyčiai.

Bendrai kalbant, yra keletas grąžos apibrėžimų. Dažnai finansų matematikoje (ypač tolydaus laiko) grąžos sąvoka nėra intuityviai lengvai suvokiama, ekonometrijoje ir diskretaus laiko finansų matematikoje naudojama paprastosios arba logaritminės finansinės grąžos sąvoka.

## 11.1 Finansinių duomenų stilizuoti faktai

Paprastai finansinių laiko eilučių analizės objektu yra finansiniai duomenys, pavyzdžiui, akcijų ar obligacijų kainos, indeksų reikšmės, valiutų keitimo kursai ir pan. Kita vertus, svarbus faktorius yra jų periodiškumas – stebimi tiek žemo dažnio (kassavaitiniai, kasmėnesiniai,. . . ) duomenys, tiek ir aukšto dažnio (kasdieniniai, kasvalandiniai) ar net ultra aukšto dažnio duomenys (kelių sekundžių trukmės laiko intervalai ar net nuosekliai fiksuojami visi kainų pokyčių momentai).

Neretai empirinis finansų rinkos tyrimas siekia paaiškinti stebimus duomenis ir jų savybes remiantis ekonominės, politinės ar kitokios informacijos pasirodymo aplinkybėmis. Atrodytų, jog tokių finansinių instrumentų, kaip, pavyzdžiui, grūdų ateities pardavimo sandoriai, IBM akcijos ar valiutų kursai, kainų savybės turėtų skirtis, nes yra sąlygojamos skirtingų aplinkybių. Iš tikrųjų gi, paskutiniojo šimtmečio empiriniai kainų kitimo tyrimai parodė, kad statistiniu požiūriu tokie finansiniai instrumentai (vertybiniai popieriai) turi daug bendrų bruožų. Šios skirtingiems finansiniams instrumentams būdingos savybės dažnai vadinamos *stilizuotais faktais.* Juos toliau ir aptarsime.

Tegul $S_t$ žymi vertybinio popieriaus kainą momentu $t$. Matyt paprasčiausi finansinių duomenų (kaip ir kitų ekonominių duomenų) stilizuoti faktai yra pastovaus augimo ir sezoniškumo efektai. Pirmasis iš jų atspindi vertybinių popierių kainų augimą, o antrasis – tokių faktorių, kaip metų laikai, Kalėdos ir pan., įtaką kainoms. Sezoniškumo efektas aprašomas periodine funkcija ir paprastai eliminuojamas iš kainos standartiniais metodais (žr. 1 skyrelį). Taigi, kaina priklauso nuo augimo efekto, vadinamo trendu $m_t$, ir nuo įvairiausių atsitiktinių poveikių, vadinamų triukšmu $Z_t$, arba tiksliau atsitiktinius svyravimus atspindinčia ciklo dalimi. Remiantis ekonominiais argumentais vertybinio popieriaus kainos $S = \{S_t\colon\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ elgesys aprašomas funkcija

$$S_t = m_t e^{Z_t}.$$

Išskiriami du pagrindiniai trendo funkcijos $m_t$ modeliavimo būdai. Pagal pirmąjį iš jų, trendas nusakomas neatsitiktine funkcija $m_t = Ae^{\mu t}$, čia $\mu$ ir $A$ yra konstantos. Tokiu atveju kainos logaritmas turi pavidalą

$$\ln S_t = \alpha + \mu t + Z_t,$$

čia $\alpha := \ln A$. Antruoju būdu trendas $m_t$ modeliuojamas remiantis buvusia kainos reikšme $S_{t-\Delta}$ ir parametru $\mu$ taip, kad

$$m_t = S_{t-\Delta} \mathrm{e}^{\mu\Delta}.$$

Šiuo atveju trendą aprašo atsitiktinė funkcija ir todėl ekonometrikoje šis modelis vadinamas stochastinio trendo modeliu. Stochastinio trendo atveju kainos logaritmas turi pavidalą

$$\ln S_t = \ln S_{t-\Delta} + \mu\Delta + Z_t.$$

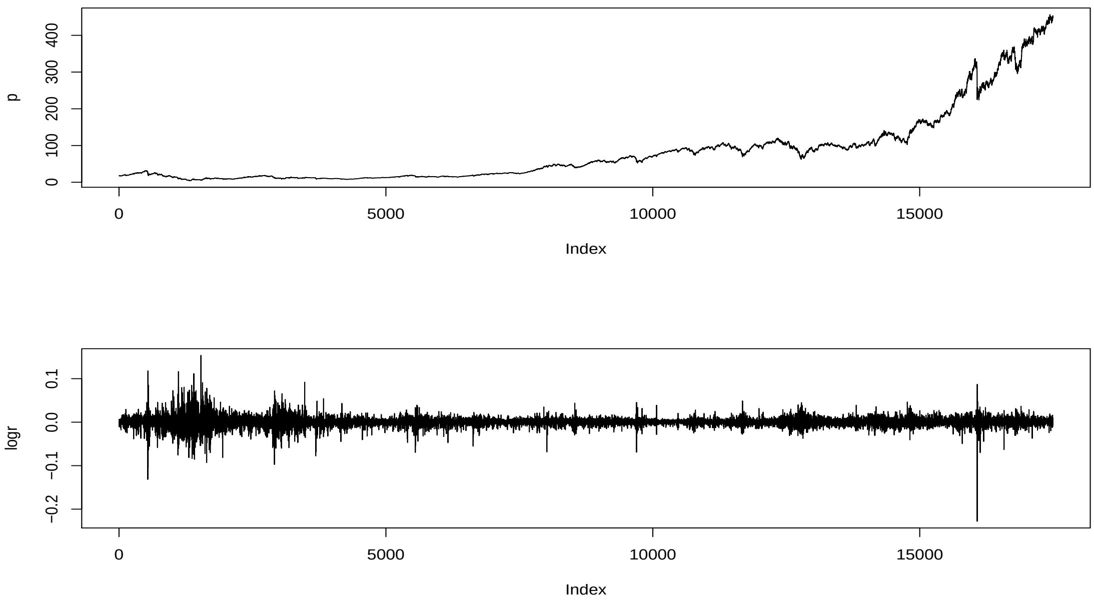
Kuris iš dviejų minėtų būdų geriau tinka realių duomenų modeliavimui, atsakoma, patikrinus atitinkamas statistines hipotezes.

20 paveiksle pavaizduoti S&P 500 indekso reikšmės ir jų logaritminės grąžos $r_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$.

Finansinių duomenų savybių analizei paprastai yra naudojamas stochastinio trendo modelis kadangi realūs duomenys neprieštarauja tam, kad $\ln S_t - \ln S_{t-\Delta}$ transformacija elgiasi kaip stacionaraus atsitiktinio proceso trajektorija. Be to, ši transformacija nepriklauso nuo kainos matavimo vienetų ir pasižymi kitomis „gražiomis“ savybėmis. Tolesnė kainos analizė reikalauja subtilesnių metodų triukšmo komponentei $Z_t$ tirti.

Duotam laiko intervalui $\Delta \in (0, T]$, toliau vadinamam *dažniu*, *logaritmine grąža* arba tiesiog grąža, kai aišku pagal kontekstą, vadinsime kainos transformaciją

$$r(t, \Delta) := \ln S_{t\Delta} - \ln S_{(t-1)\Delta}, \quad t = 1, \ldots, N, \quad N := [T/\Delta] \leqslant T/\Delta, \quad (11.1)$$




20 pav. S&P 500 indekso uždarymo kainos ir jų logaritminės grąžos.

čia $[x]$ žymi realaus skaičiaus $x$ sveikąją dalį. Daugelyje ekonometrinių modelių laikoma, kad $\Delta = 1$. Tokiu atveju naudosime žymėjimą $r_t := r(t, 1)$. Dažniausiai logaritminės gražos skaičiuojamos kasdieniams duomenims. Nors, kaip minėta, pastaraisiais metais atsirado techninės galimybės rinkti bei analizuoti ir vadinamuosius aukšto dažnio duomenis, kuomet $\Delta$ atitinka valandas ar minutes, bei ultra aukšto dažnio duomenis, kuomet fiksuojami visi kainų pokyčiai, t. y. duomenys neagreguojami. Svarbu pažymėti, kad minimos žemiau empirinės logaritminių grąžų savybės priklauso nuo dažnio $\Delta$.

Viena iš svarbiausių finansinių duomenų empirinės analizės sąlygų yra statistinių savybių invariantiškumas laiko atžvilgiu. Jei praeities duomenų savybės neturi nieko bendro su dabarties ir ateities kainų kitimu, tai tokių duomenų tyrimas būtų beprasmiškas. Todėl svarbia statistinės analizės prielaida yra funkcijos $r(\cdot, \Delta)$ *stacionarumo hipotezė*: bet kuriems $t_1, \ldots, t_k$ ir $s$, vektorių $\{r(t_1, \Delta), \ldots, r(t_k, \Delta)\}$ ir $\{r(t_1 + s, \Delta), \ldots, r(t_k + s, \Delta)\}$ tikimybiniai skirstiniai yra lygūs. Jei ši prielaida teisinga, tai nuo $t$ nepriklauso nei funkcija $F_\Delta(u) := P(r(t,\Delta) > u)$, $u > 0$, vadinama skirstinio uodega, nei kovariacija vadinama funkcija $C_\Delta(s) := \mathrm{Cov}(r(t,\Delta), r(t+s,\Delta))$ (jei egzistuoja antrasis grąžos momentas). Stacionarumo prielaida nėra vienintelė būtina triukšmo komponentės tyrimo sąlyga. Detaliau nenagrinėdami, tik paminėsime, kad taip pat būtina tikrinti naudojamų statistinių įverčių konvergavimą į tiriamas triukšmo charakteristikas, nes priešingu atveju tos charakteristikos gali neegzistuoti. Pavyzdžiui, jei tokia charakteristika yra $\mathrm{E}f(r(t,\Delta))$, nepriklausanti nuo $t$ pagal stacionarumo prielaidą, tai reiktų įsitikinti, jog, didinant $N$, suma $(1/N)\sum_{t=1}^{N} f(r(t,\Delta))$ kuria nors prasme artėja prie baigtinio skaičiaus.

Toliau aprašomi keli svarbiausi stilizuoti faktai susiję su skirstinio uodegos ir kovariacijos elgesiu.

- *Sunkios uodegos*: Dideli kainų pokyčiai pasirodo žymiai dažniau nei tuo atveju, kai skirstinys yra normalusis. Toks efektas galėtų būti paaiškinamas tuo, kad logaritminės grąžos skirstinys turi sunkią uodegą, t. y. kuriam nors baigtiniam skaičiui $a > 0$, $F_\Delta(u) \approx u^{-a}$, kai $u \to \infty$. Palyginimui, Wiener'io proceso $W$ pokyčiai $W(t) - W(t-\Delta)$ turi normalųjį skirstinį, kurio uodega $1 - \Phi(u/\sqrt{\Delta}) = ce^{-u^2/(2\Delta)}$ laikoma lengva. Vienas pirmųjų sunkių uodegų efektą finansiniuose duomenyse pastebėjo Mandelbrot (1963), dėl šios priežasties pasiūlęs vietoje $W(t)$ naudoti simetrinį $\alpha$-stabilųjį procesą $X_\alpha(t)$. Mat $X_\alpha$ pokyčių skirstiniai turi sunkias uodegas, kurioms $a = \alpha < 2$. Tačiau vėlesni tyrimai parodė, kad finansinių duomenų logaritmines grąžas geriau aproksimuoja tie skirstiniai turintys sunkias uodegas, kurių skaičius $a \in (2, 4)$. Taip pat pastebėta, kad uodegų charakteris keičiasi, pereinant nuo vieno logaritminės grąžos dažnio prie kito. Išsamiausiai kol kas ištirtos kasdienių duomenų logaritminės grąžos.

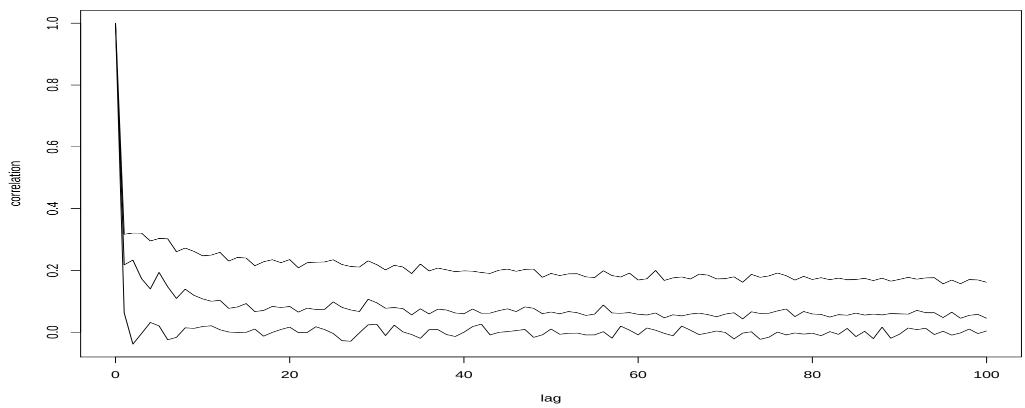
- *Asimetrija.* To paties absoliutinio dydžio grąžas lydi nevienodo dydžio kintamumo reikšmės – kintamumas yra didesnis po neigiamos grąžos (t. y. po kainos kritimo). Tai paprastai aiškinama tuo, kad investuotojai „jautriau“ reaguoja į neigiamą informaciją, nei į teigiamą informaciją. Dėl šios asimetrijos kovariacija tarp grąžos ir būsimų kintamumo reikšmių yra *neigiama.* Šis efektas dar vadinamas sverto efektu (angl. leverage effect).

- *Kintamumo klasterizacija.* Tikėtina, kad finansiniuose duomenyse didelio kintamumo periodai ir mažo kintamumo periodai seka vienas paskui kitą, t. y. stebima kintamumų klasterizacija.

- *Taylor'o efektas.* Pačios grąžos $r_t$ tarpusavy yra beveik nekoreliuotos, o jų absoliutinių dydžių laipsniai $|r_t|^\delta$ ($\delta > 0$) turi nenulinę koreliaciją. Stipriausia koreliacija stebima absoliutinėms grąžoms, t. y. kai $\delta = 1$. Ši savybė pirmą kartą buvo paminėta Taylor'o (1986) ir dėl to kartais vadinama Taylor'o efektu.

- *Ilgalaikė atmintis.* Koreliacijos tarp $|r_t|^\delta$ ir $|r_s|^\delta$ įvertis, didėjant $|t-s|$, gęsta lėtai (panašiai kaip laipsninė funkcija). Tas pats teisinga ir koreliacijai tarp kintamumo įverčių. Dar sakoma, kad šie dydžiai pasižymi stipriu nuolatinumu (angl. persistency). Yra keletas hipotezių, bandančių pagrįsti ilgalaikės atminties efektą grąžų kvadratuose ar absoliutiniuose dydžiuose. Daugelis jų remiasi įvairių nestacionarumų egzistavimu (trendų, šuolių buvimas ir pan., žr., pavyzdžiui, Lobato ir Savin (1998). Tačiau vis tiek dar yra daug neaiškumų ir šio fenomeno paaiškinimas yra vienas aktualiausių šiuolaikinės finansų ekonometrijos uždavinių.

  21 paveiksle pavaizduotos S&P 500 duomenų grąžų, jų kvadratų ir absoliutinių dydžių koreliacinės funkcijos. Grafike aiškia matomas ilgalaikės atminties efektas.




21 pav. S&P 500 duomenų grąžų, jų kvadratų ir absoliutinių dydžių koreliacinės funkcijos (iš apačios į viršų).

- *Suminis gausiškumas.* Žemesniems dažniams $\Delta$, logaritminių grąžų $r(t, \Delta)$ skirstinys (kuris, bendrai, įvairiems $\Delta$ yra skirtingas) vis labiau „panašėja" į normalųjį skirstinį.

Faktas, jog kai kurie stilizuoti faktai skiriasi įvairiems dažniams $\Delta$, reiškia, kad diskretaus laiko finansų rinkos modeliai nėra pakankami ir dėl to siūlomi įvairūs tolydaus laiko kainų modeliai, kurie čia nebus detaliau nagrinėjami.

Vienas pagrindinių finansinių laiko eilučių analizės uždavinių yra paieška tokių modelių, kurie kaip galima adekvačiau pasižymėtų savybėmis panašiomis į aptinkamus stilizuotus faktus. Priminsime, kad „laiko eilutės“ (angl. time series) sąvoka atspindi tai, kad duomenys yra interpretuojami kaip kryptinga atsitiktinių dydžių seka $X_t$, $t = 0, 1, 2, \dots$, kurioje $t$ indeksas yra diskretaus laiko kintamasis.

# 12 Sąlyginis heteroskedastiškumas

Kaip ir regresinėje analizėje, kur svarbią klasę sudaro heteroskedastinių paklaidų (t. y. su nepastovia dispersija) regresijos modeliai, aprašant finansinius duomenis svarbiausią vietą užima vadinamieji sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai. Šiame skyriuje aptarsime finansinių duomenų modeliavimo aspektus šiek tiek detaliau.

Tarkime, kad $r_t$ yra logaritminės grąžos:

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}.$$

Priminsime, kad finansinių duomenų laiko eilutės pasižymi tam tikromis savybėmis, dar vadinamomis stilizuotais faktais:

- $r_t$ yra beveik nekoreliuoti dydžiai;
- grąžų transformacijos $|r_t|$, $r_t^2$ arba $|r_t|^\delta$ ($\delta > 0$) yra stipriai koreliuotos;
- kintamumo klasterizacija;
- $r_t$ skirstinys turi „sunkias uodegas“;
- asimetrija.

Šiame skyriuje aptarsime kai kuriuos populiarius modelius, kurie plačiai taikomi finansinių grąžų modeliavimui ir daugiau ar mažiau atspindi išvardintuosius stilizuotus faktus.

## 12.1 ARCH modeliai

Vienas pirmųjų modelių, taikomų modeliuoti finansines grąžas, yra *autoregresijos sąlyginio heteroskedastiškumo* (angl. AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (ARCH)) modelis. Jį 1982 metais pasiūlė Engle. Jo ištakos slypi paprastame „istoriniame“ kintamumo įvertyje

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} r_{t-j}^2. \tag{12.1}$$

Pastarojo modelio pagrindiniai trūkumai yra tie, kad visos istorinės grąžos turi tą patį svorį, be to, nėra aiškus skaičiaus $N$ parinkimas. Kitas gerai žinomas kintamumo modelis remiasi eksponentiniu suglodinimu:

$$\sigma_t^2 = \lambda r_{t-1}^2 + (1 - \lambda)\sigma_{t-1}^2. \tag{12.2}$$

Pagrindinės (12.2) modelio savybės (trūkumai) yra tokie: koeficientai išdėstyme $\sigma_t^2 = \lambda \sum_{j=1}^{\infty}(1-\lambda)^{j-1} r_{t-j}^2$ monotoniškai gęsta, suma yra begalinė, o $\lambda$ nustatymas neaiškus.

Engle pasiūlytame modelyje grąžos $r_t$ turi pavidalą

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{12.3}$$

kur dažniausiai laikoma, kad $\varepsilon_t$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę N(0,1) atsitiktiniai dydžiai, o $\sigma_t > 0$ nusakomas lygybe

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p r_{t-p}^2; \tag{12.4}$$

čia svoriai $\alpha_0 > 0$, $\alpha_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, p$, ir, skirtingai nei (12.1), gali būti įvertinti. Toliau laikysime, kad $\varepsilon_t$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su parametrais (0,1).

Tegul $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(r_{t-1}, r_{t-2}, \ldots)$ yra $\sigma$-algebra, generuota dydžių $r_t, r_{t-1}, \ldots$. Jeigu laikysime, kad $\{\varepsilon_t\}$ sudaro martingalinių skirtumų seką, t. y. $\varepsilon_t$ tenkina $\mathrm{E}(\varepsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$ ir $\mathrm{E}(\varepsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}) = 1$ su visais $t$, tai grąžos $r_t$ sąlyginis vidurkis ir sąlyginė dispersija atžvilgiu $\mathcal{F}_{t-1}$ yra atitinkamai

$$\mathrm{E}(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathrm{E}(\sigma_t\varepsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t \mathrm{E}(\varepsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0 \tag{12.5}$$

ir

$$\mathrm{E}(r_t^2|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathrm{E}(\sigma_t^2\varepsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2 \mathrm{E}(\varepsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2. \tag{12.6}$$

Pastaroji dispersijos savybė ir atspindima „sąlyginio heteroskedastiškumo“ termine – sąlyginė grąžos $r_t$ dispersija atžvilgiu informacijos iki momento $t-1$, panašiai kaip AR($p$) modelyje, yra praėjusių grąžų kvadratų tiesinė kombinacija. Vadinasi, sąlyginė dispersija $\sigma_t^2$ yra atsitiktinė bei priklausanti nuo laiko. Pastebėsime kad *besąlyginė* dispersija $\mathrm{D}r_t = \mathrm{E}\sigma_t^2 = \mathrm{const}$ (jei egzistuoja), taigi modelis gali būti stacionarus. (12.3)–(12.4) lygtys ir nusako vadinamąjį as *p-os eilės autoregresijos sąlyginio heteroskedastiškumo* arba, trumpiau, ARCH($p$) modelį.

Detaliau panagrinėkime ARCH(1) atvejį.

$$\begin{cases} r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2, \quad t \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{12.7}$$

Taikant šias formules rekurentiškai, turėsime

$$\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2 \\
&= \alpha_0 + \alpha_0 \alpha_1 \, \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1^2 r_{t-2}^2 \varepsilon_{t-1}^2 \; = \; \dots \\
&= \alpha_0 + \alpha_0 \sum_{j=1}^{n} \alpha_1^j \varepsilon_{t-1}^2 \dots \varepsilon_{t-j}^2 + \alpha_1^{n+1} \varepsilon_{t-1}^2 \dots \varepsilon_{t-n}^2 r_{t-n-1}^2. \qquad (12.8)
\end{aligned}$$

Todėl galima spėti, kad, jeigu $\alpha_1 < 1$, tai lygčių (12.7) sprendinys turi pavidalą

$$r_t^* = \sqrt{\sigma_t^{*2}}\,\varepsilon_t \quad \text{su} \quad \sigma_t^{*2} \;=\; \alpha_0 + \alpha_0 \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_1^j \varepsilon_{t-1}^2 \dots \varepsilon_{t-j}^2. \qquad (12.9)$$

Tam kad suformuluotume griežtą teiginį, apibrėšime NA (angl. nonanticipative) procesų klasę.

**12.1 apibrėžimas.** (12.7) seka $\{r_t, t \in \mathbb{Z}\}$ vadinama NA seka, jeigu su visais $t$ grąžos $r_t$ nepriklauso nuo triukšmo reikšmių $\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+2}, \dots$.

**12.1 teiginys.** *a) Tarkime, kad* $\alpha_1 < 1$. *Tuomet* $r_t^*$, *nusakytas* (12.9), *yra stacionarus siaurąja prasme ARCH(1) lygčių, nusakytų* (12.7), *sprendinys, tenkinantis* $\mathrm{E} r_t^{*2} < \infty$. *Be to, pastarasis sprendinys yra vienintelis NA sprendinys, kuriam galioja* $\mathrm{E} r_t^2 = \mathrm{const} < \infty$.
*b) Jeigu* $\alpha_1 \geqslant 1$, *tai NA sprendinio su savybe* $\mathrm{E} r_t^2 = \mathrm{const} < \infty$ *neegzistuoja.*

*Įrodymas.* a) Aišku, kad atžvilgiu $\sigma$-algebros $\mathcal{F}_{t-1}^* = \sigma(r_{t-1}^*, r_{t-2}^*, \dots)$ galioja lygybės $\mathrm{E}(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}^*) = 0$ ir $\mathrm{E}(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}^*) = 1$. Todėl iš (12.9) lygybės gauname

$$\mathrm{E} r_t^{*2} \;=\; \mathrm{E} \sigma_t^{*2} \;=\; \alpha_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j \;=\; \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} < \infty.$$

Iš čia išplaukia, kad $r_t^{*2} < \infty$ b.v. ir $\{r_t^*\}$ yra stacionarus siaurąja prasme (12.7) lygčių sprendinys, tenkinantis $\mathrm{E} r_t^{*2} < \infty$.

Vienatis. Tarkime, kad $r_t$ yra bet kuris (12.7) lygčių NA sprendinys, tenkinantis $\mathrm{E} r_t^2 = \mathrm{const} < \infty$. Iš (12.8) ir (12.9) turime

$$\sigma_t^2 - \sigma_t^{*2} = \alpha_1^{n+1} \varepsilon_{t-1}^2 \dots \varepsilon_{t-n}^2 r_{t-n-1}^2 - \alpha_0 \sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_1^j \varepsilon_{t-1}^2 \dots \varepsilon_{t-j}^2. \qquad (12.10)$$

Todėl, dėl NA savybės,

$$\mathrm{E}|\sigma_t^2 - \sigma_t^{*2}| \ \leqslant\ \alpha_1^{n+1}\mathrm{E}r_t^2 + \alpha_0 \frac{\alpha_1^{n+1}}{1-\alpha_1} \ \to\ 0,$$

kai $n \to \infty$. Gauname, kad $\mathrm{E}|\sigma_t^2 - \sigma_t^{*2}| = 0$, taigi $\sigma_t^2 = \sigma_t^{*2}$ b.v. arba, ekvivalenčiai, $\sigma_t = \sigma_t^*$ b.v. Todėl galioja ir lygybė $r_t = r_t^*$ b.v.

b) Tegul $\{r_t\}$ yra kuris nors NA sprendinys su savybe $\mathrm{E}r_t^2 = \mathrm{const} < \infty$. Tuomet

$$\begin{aligned}\mathrm{E}r_t^2 &= \mathrm{E}(\sigma_t^2\mathrm{E}(\varepsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1})) = \mathrm{E}\sigma_t^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1\mathrm{E}r_{t-1}^2,\end{aligned}$$

taigi $(1-\alpha_1)\mathrm{E}r_t^2 = \alpha_0$. Kadangi $\alpha_0 > 0$, tai su $\alpha_1 \geqslant 1$ pastaroji lygybė negalioja. □

*ARCH(1) modelio savybės.* Toliau, kalbėdami apie ARCH(1) modelį, jį sutapatinsime su sprendiniu $\{r_t^*\}$, nusakytu (12.9) lygybe, kur $0 \leqslant \alpha_1 < 1$. Tuomet $\varepsilon_t$ nepriklauso nuo $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(r_{t-1}, r_{t-2}, \dots)$ ir iš (12.5), (12.6), turime

$$\mathrm{E}r_t \ = \ \mathrm{E}(\mathrm{E}(r_t|\mathcal{F}_{t-1})) = 0,\ \mathrm{D}r_t \ = \ \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}.$$

Be to su $h \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(r_t r_{t+h}) &= \mathrm{E}\mathrm{E}(r_t r_{t+h}|\mathcal{F}_{t+h-1}) \\ &= \mathrm{E}(r_t\mathrm{E}(r_{t+h}|\mathcal{F}_{t+h-1})) \ = \ 0.\end{aligned}$$

Pastarosios trys savybės sako, kad ARCH(1) seka yra balto triukšmo seka: $r_t \sim \mathrm{BT}(0, \alpha_0/(1-\alpha_1))$; be to ji yra stacionari siaurąja prasme. Svarbu, tačiau, pastebėti, kad $\{r_t\}$ nėra *nepriklausomų* dydžių seka. Tam, pavyzdžiui, pakanka pastebėti, kad

$$\mathrm{E}(r_t^2|r_{t-1}) \ = \ \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2,$$

t. y. sąlyginis $r_t$ skirstinys priklauso nuo $r_{t-1}$ reikšmės, vadinasi $r_t$ ir $r_{t-1}$ negali būti nepriklausomi. Tai sąlygoja, kad $r_t$ skirstinys negali būti normalusis (tas intuityviai matosi jau vien iš sudėtingos (12.9) struktūros – šaknis iš $\chi^2_{(1)}$ dydžių sandaugų sumos).

Tolimesnes modelio savybes nesunku išvesti, naudojantis tapatybe

$$\begin{aligned} r_t^2 &= \sigma_t^2 + r_t^2 - \sigma_t^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \sigma_t^2(\varepsilon_t^2 - 1) \\ &=: \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \nu_t. \end{aligned}$$

Čia

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\nu_t|\mathcal{F}_{t-1}) &= \mathrm{E}(\sigma_t^2(\varepsilon_t^2 - 1)|\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \sigma_t^2 \mathrm{E}(\varepsilon_t^2 - 1|\mathcal{F}_{t-1}) = 0. \end{aligned}$$

Vadinasi $\{\nu_t\}$ yra *martingalinių skirtumų* seka. AR(1) reprezentacijos

$$r_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \nu_t \tag{12.11}$$

pagalba galima išvesti kitas svarbias grąžų kvadratų $r_t^2$ savybes.

**12.2 teiginys.** *Tegul ARCH(1) modelyje* $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0,1)$.

*a) Jeigu* $\alpha_1 < 1/\sqrt{3}$*, tai* $\{r_t^*\}$ *yra stacionari siaurąja prasme seka,* $\mathrm{E}r_t^{*4} < \infty$ *ir*

$$\begin{aligned} \mathrm{D}r_t^{*2} &= \frac{2\alpha_0^2}{(1-\alpha_1)^2(1-3\alpha_1^2)}, \\ \mathrm{Corr}(r_t^{*2}, r_{t-k}^{*2}) &= \alpha_1^k, \quad k \geqslant 0. \end{aligned}$$

*Be to,* $\{r_t^*\}$ *yra vienintelis ARCH(1) sprendinys, kuriam galioja* $\mathrm{E}r_t^4 = \mathrm{const} < \infty$.

*b) Jeigu* $\alpha_1 \geqslant 1/\sqrt{3}$*, tai NA sprendinio su savybe* $\mathrm{E}r_t^4 = \mathrm{const} < \infty$ *neegzistuoja.*

*Įrodymas.* a) Žinome, kad jeigu $\alpha_1 < 1$, tai $\mathrm{E}r_t^{*2} < \infty$ ir (12.9) eilutė b.v. konverguoja.

Tarkime $\alpha_1 < 1/\sqrt{3}$. Tuomet

$$\begin{aligned} \mathrm{E}r_t^{*4} &= \alpha_0^2 \mathrm{E}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j \varepsilon_t^2 \dots \varepsilon_{t-j}^2\Big)^2 \\ &= \alpha_0^2 \mathrm{E} \sum_{j,j'=0}^{\infty} \alpha_1^{j+j'} \varepsilon_t^2 \dots \varepsilon_{t-j}^2 \varepsilon_t^2 \dots \varepsilon_{t-j'}^2 \\ &= \alpha_0^2 \mathrm{E}\Big(\sum_{j=j'} + 2\sum_{j>j'}\Big) \alpha_1^{j+j'} \varepsilon_t^2 \dots \varepsilon_{t-j}^2 \varepsilon_t^2 \dots \varepsilon_{t-j'}^2 \;=:\; S_1 + 2S_2. \end{aligned}$$

Kadangi $\mathrm{E}\varepsilon_t^4 = 3$, tai

$$\begin{aligned} S_1 &= \alpha_0^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^{2j} \mathrm{E}\big(\varepsilon_t^4 \ldots \varepsilon_{t-j}^4\big) \\ &= \alpha_0^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^{2j} 3^{j+1} \; = \; \frac{3\alpha_0^2}{1-3\alpha_1^2}. \end{aligned}$$

Dėmuo $S_2$ taip nesunkiai gali būti suskaičiuotas:

$$\begin{aligned} S_2 &= \alpha_0^2 \mathrm{E} \sum_{j>j'} \alpha_1^{j+j'} \varepsilon_t^4 \ldots \varepsilon_{t-j'}^4 \varepsilon_{t-j'-1}^2 \ldots \varepsilon_{t-j}^2 \\ &= \alpha_0^2 \sum_{j>j'} \alpha_1^{j+j'} 3^{j'+1} \\ &= 3\alpha_0^2 \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_1^j \sum_{j'=0}^{j-1} (3\alpha_1)^{j'} \\ &= 3\alpha_0^2 \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_1^j \, \frac{1-(3\alpha_1)^j}{1-3\alpha_1} \\ &= \frac{3\alpha_0^2 \alpha_1}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}. \end{aligned}$$

Taigi

$$\mathrm{E}r_t^{*4} \; = \; S_1 + 2S_2 \; = \; \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}$$

ir

$$\mathrm{D}r_t^{*2} \; = \; \mathrm{E}r_t^{*4} - (\mathrm{E}r_t^{*2})^2 \; = \; \frac{2\alpha_0^2}{(1-\alpha_1)^2(1-3\alpha_1^2)}.$$

Koreliacijos išraiška išplaukia iš AR(1) reprezentacijos (12.11). Iš tikrųjų, kadangi $\nu_t \; \sim \; \mathrm{BT}(0, \sigma_\nu^2)$ su

$$\sigma_\nu^2 \; := \; \mathrm{E}\nu_t^2 \; = \; 2\mathrm{E}\sigma_t^{*4} \; = \; \frac{2\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)},$$

tai

$$\mathrm{Cov}(r_t^{*2}, r_{t-k}^{*2}) \; = \; \alpha_1^k \frac{\sigma_\nu^2}{1-\alpha_1^2}, \quad k \geqslant 0.$$

Vienatis. Iš (12.10) lygybės, remiantis Cauchy nelygybe turime

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}|\sigma_t^2 - \sigma_t^{*2}| &\leqslant \alpha_1^{n+1}\mathrm{E}\big(\varepsilon_{t-1}^2 \dots \varepsilon_{t-n}^2 r_{t-n-1}^2\big) + \alpha_0 \sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_1^j \mathrm{E}\big(\varepsilon_{t-1}^2 \dots \varepsilon_{t-j}^2\big) \\
&\leqslant \alpha_1^{n+1}\sqrt{\mathrm{E}\big(\varepsilon_{t-1}^4 \dots \varepsilon_{t-n}^4\big)}\sqrt{\mathrm{E}r_{t-n-1}^4} + \alpha_0 \sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_1^j \\
&= \alpha_1(\sqrt{3}\alpha_1)^n\sqrt{\mathrm{E}r_t^4} + \frac{\alpha_0\alpha_1^{n+1}}{1-\alpha_1} \ \to\ 0, \quad \text{kai} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Taigi, $\sigma_t^2 = \sigma_t^{*2}$ b.v. (Čia NA savybė nereikalinga!)

b) Tegul $\{r_t\}$ yra NA sprendinys su savybe $\mathrm{E}r_t^4 = \mathrm{const} < \infty$. Tuomet

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}r_t^4 &= \mathrm{E}(\sigma_t^4 \mathrm{E}(\varepsilon_t^4|\mathcal{F}_{t-1})) = 3\mathrm{E}\sigma_t^4 \\
&= 3(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1\mathrm{E}r_{t-1}^2 + \mathrm{E}r_{t-1}^4),
\end{aligned}$$

taigi $(1-3\alpha_1^2)\mathrm{E}r_t^4 = 3\alpha_0^2 + 6\alpha_0\alpha_1\mathrm{E}r_{t-1}^2$. Kadangi dešinė šios lygybės pusė yra teigiama, tai su $\alpha_1 \geqslant 1/\sqrt{3}$ pastaroji lygybė negalioja. □

*12.1* PASTABA. Aišku, turint galvoje 12.2 teiginį (t. y., laikant $r_t = r_t^*$), dydžius $\mathrm{E}r_t^4$ ir $\mathrm{D}r_t^2$ galima rasti ir paprasčiau. Pavyzdžiui,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}r_t^4 &= 3\mathrm{E}\sigma_t^4 \ =\ 3\mathrm{E}(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2)^2 \\
&= 3(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1\mathrm{E}r_{t-1}^2 + \alpha_1^2\mathrm{E}r_{t-1}^4).
\end{aligned}$$

Telieka įsistatyti $\mathrm{E}r_t^2 = \alpha_0/(1-\alpha_1)$ ir išspręsti $\mathrm{E}r_t^4$.

*12.2* PASTABA. Kadangi $\alpha_1 \geqslant 0$, tai ARCH(1) modeliu aprašomų grąžų kvadratų kovariacija $\mathrm{Cov}(r_0^2, r_t^2)$ yra neneigiama su visais $t$. Ši savybė yra būdinga ir bendresniems ARCH tipo modeliams.

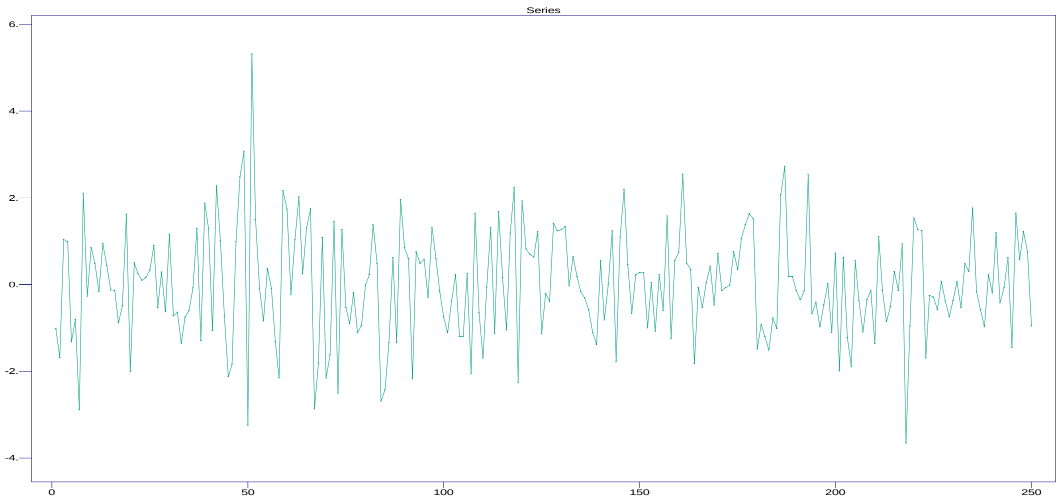
Grįžkime prie finansinių grąžų stilizuotų faktų ARCH(1) atveju. Tam, kad palygintume $r_t$ skirstinio savybes su N(0,1) skirstinio savybėmis, tarkime $\mathrm{E}r_t^2 = \alpha_0/(1-\alpha_1) = 1$ ir $3\alpha_1^2 \leqslant 1$. Tada

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}r_t^4 &= 3\mathrm{E}\sigma_t^4 \\
&= 3\ \frac{\alpha_0^2}{(1-\alpha_1)^2}\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} \\
&= 3\ \frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}.
\end{aligned}$$

Iš čia matome, kad $\mathrm{E}r_t^4 \geqslant 3$, t. y. $r_t$ pasiskirstymo uodegos yra sunkesnės nei normaliojo dėsnio. Apie sunkias uodegas liudija ir tas faktas, kad bet kuriam $\alpha_1 \in (0,1)$, $\mathrm{E}r_t^{2k} = \infty$ kuriam nors $k \geqslant 1$. Tai išplaukia iš Engle (1982) įrodyto fakto, kad $2k$-asis ARCH(1) proceso momentas egzistuoja tada ir tada, kai $\alpha_1^k \prod_{j=1}^{k}(2j-1) < 1$.

ARCH(1) modelio specifika taip pat leidžia (bent jau dalinai) aprašyti dydžių $r_t^2$ nekoreliuotumumą ir kintamumo klasterizacijos efektą, t. y. faktą, kad dideles grąžų reikšmes seka didelės kintamumo reikšmės. Tačiau nėra „pagaunami“ ilgos atminties bei asimetrijos reiškiniai.

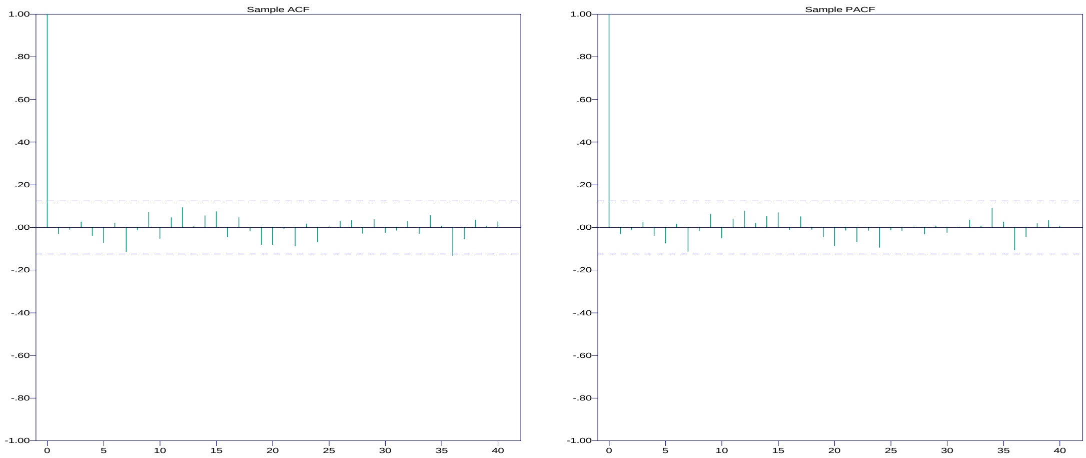
22 ir 23 paveiksluose pavaizduota ARCH(1) modelio realizacija ir jo ACF bei PACF.



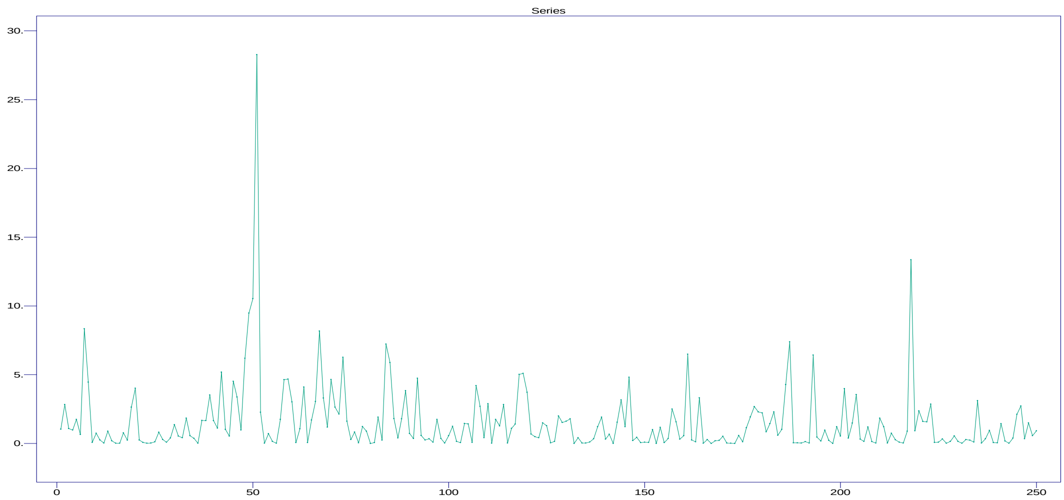

22 pav. ARCH(1) proceso realizacija

24 ir 25 paveiksluose pavaizduota ARCH(1) modelio kvadratų $r_t^2$ realizacija ir jos ACF bei PACF. Iš jų matome, kad ARCH modeliu aprašomi grąžų kvadratai $r_t^2$ nebesielgia kaip nekoreliuoti dydžiai (plg. su 23 paveikslu).

Labai panašios išvados galioja ir bendresniam ARCH($p$) modeliui. Pavyzdžiui (su atitinkamomis prielaidomis) $\mathrm{E}r_t = 0$, $\mathrm{D}r_t = \alpha_0/(1-\alpha_1 - \cdots - \alpha_p)$, $\mathrm{Cov}(r_t, r_{t-k}) = 0$ kai $k \geqslant 1$, ir pan.



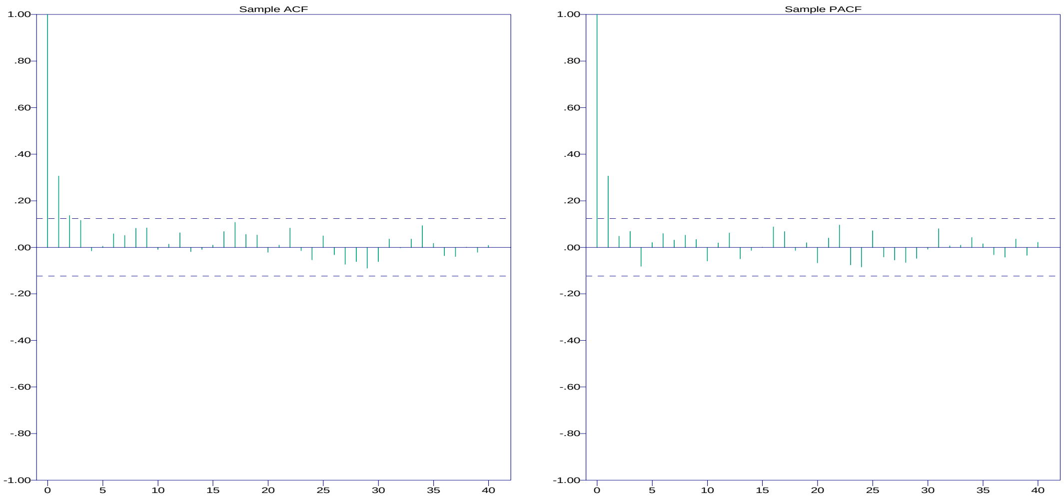

23 pav. ARCH(1) proceso ACF ir PACF




24 pav. ARCH(1) proceso kvadratų realizacija.

## 12.2 GARCH modeliai

Jeigu ARCH modeliai yra AR laiko eilučių modelių analogas, tai GARCH (angl. Generalized AutoRegresive Conditional Heteroskedasticity) panašus į ARMA sekos modelį. Šis natūralus apibendrinimas buvo pasiūlytas Boller-




25 pav. ARCH(1) proceso kvadratų ACF bei PACF

slev'o (1986). Pagal jį grąžos $r_t$ turi (12.3) pavidalą, o kintamumas aprašomas lygtimi

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2; \tag{12.12}$$

čia $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_j \geqslant 0$ su $i = 1, \ldots, q$, $j = 1, \ldots, p$.

Toliau detaliau panagrinėsime GARCH(1,1) atvejį.

*GARCH(1,1) modelis.* Tegul $\{r_t\}$ seka nusakoma lygtimis

$$\begin{cases} r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad t \in \mathbb{Z}; \end{cases} \tag{12.13}$$

čia $\{\varepsilon_t\}$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių dydžių seka su parametrais $(0, 1)$. Tegul $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(r_s, \sigma_s, s \leqslant t-1)$ yra $\sigma$-algebra, generuota grąžų $r_{t-1}, r_{t-2}, \ldots$ ir kintamumo reikšmių $\sigma_{t-1}, \sigma_{t-2}, \ldots$.

**12.2 apibrėžimas.** (12.13) seka $\{r_t, t \in \mathbb{Z}\}$ tenkina NA sąlygą, jeigu su visais $t$ dydžiai $\varepsilon_t$ nepriklauso nuo $\mathcal{F}_{t-1}$.

**12.3 teiginys.** *Tegul* $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. *Tuomet* (12.13) *lygtys turi stacionarų siaurąja prasme sprendinį* $\{r_t\}$, *tenkinantį* $\mathrm{E} r_t^2 = \mathrm{const} < \infty$. *Be to, sprendinys* *yra vienintelis NA sprendinys, kuriam galioja* $\mathrm{E}r_t^2 = \mathrm{const} < \infty$. *Jeigu* $\alpha_1 + \beta_1 \geqslant 1$, *tai NA sprendinio su savybe* $\mathrm{E}r_t^2 = \mathrm{const} < \infty$ *neegzistuoja.*

*Įrodymas.* Panašiai kaip aukščiau, naudojant rekurentinius sąryšius, galima rašyti

$$\sigma_t^{*2} = \alpha_0\Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}(\alpha_1\varepsilon_{t-i}^2 + \beta_1)\Big).$$

Matome, kad $r_t^* = \sqrt{\sigma_t^{*2}}\varepsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$ yra stacionari siaurąja prasme seka, $\mathrm{E}r_t^{*2} < \infty$, be to ši seka yra vienintelis (12.13) lygčių NA sprendinys su $\mathrm{E}r_t^2 = \mathrm{const} < \infty$. $\square$

Analogiškai 12.2 teiginiui, galima nesunkiai įrodyti tvirtinimą apie GARCH(1,1) sprendinį, tenkinantį ketvirto momento baigtinumo sąlygą.

**12.4 teiginys.** *Tegul GARCH(1,1) modelyje seka* $\{\varepsilon_t\}$ *ir parametrai* $\alpha_1, \beta_1$ *tenkina sąlygas* $\mathrm{E}\varepsilon_t^4 < \infty$, $\mathrm{E}(\alpha_1\varepsilon_t^2 + \beta_1)^2 < 1$. *Tada* $\{r_t^*\}$ *yra vienintelis stacionarus siaurąja prasme* (12.13) *sprendinys su* $\mathrm{E}r_t^{*4} < \infty$. *Jeigu* $\mathrm{E}(\alpha_1\varepsilon_t^2 + \beta_1)^2 \geqslant 1$, *tai NA sprendinio su savybe* $\mathrm{E}r_t^4 = \mathrm{const} < \infty$ *neegzistuoja.*

Kitas GARCH(1,1) modelio savybes galima išvesti naudojant ARMA(1,1) reprezentaciją:

$$\begin{aligned} r_t^2 &= \sigma_t^2 + (r_t^2 - \sigma_t^2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + r_t^2 - \sigma_t^2 \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)r_{t-1}^2 - \beta_1(r_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) + r_t^2 - \sigma_t^2 \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)r_{t-1}^2 + \nu_t - \beta_1\nu_{t-1}; \end{aligned} \tag{12.14}$$

čia $\nu_t := r_t^2 - \sigma_t^2$. Taigi, panašiai kaip (12.11), kintamumas GARCH(1,1) modelyje gali būti interpretuojamas kaip ARMA(1,1) su triukšmu $\nu_t \sim \mathrm{BT}(0, \sigma_\nu^2)$. Iš čia, jei galioja 12.4 teiginio sąlygos, gauname:

$$\begin{aligned} \mathrm{Corr}(r_t^2, r_{t-k}^2) &= \mathrm{Corr}(r_t^2, r_{t-1}^2)(\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} \\ &= \frac{\alpha_1(1 - \beta_1^2 - \alpha_1\beta_1)}{1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1}(\alpha_1 + \beta_1)^{k-1}, \ k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{12.15}$$

Svarbu pastebėti, kad GARCH(1,1) procesas gali būti stacionarus siaurąja prasme net jeigu $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, t. y. jei $\mathrm{E}r_t^2 = \infty$. Nelson (1990) parodė, kad GARCH(1,1) lygtys (12.13) turi stacionarų siaurąja prasme sprendinį tada ir tik tada, jei

$$\mathrm{E}\ln(\beta_1 + \alpha_1\varepsilon_t^2) < 0.$$

**12.5 teiginys.** *Jeigu*

$$-\infty \leqslant \gamma := \mathrm{E}\ln(\alpha_1\varepsilon_t^2 + \beta_1) < 0, \tag{12.16}$$

*tai begalinė suma*

$$\sigma_t^{2*} = \alpha_0 + \alpha_0 \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1) \dots (\alpha_1\varepsilon_{t-j}^2 + \beta_1)$$

*b.v. konverguoja ir procesas* $r_t = \sqrt{\sigma_t^{*2}}\varepsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$ *yra vienintelis stacionarus siaurąja prasme GARCH(1,1) lygčių sprendinys. Jeigu* $\gamma \geqslant 0$, *tai GARCH(1,1) lygtys stacionaraus siaurąja prasme sprendinio neturi.*

Šio teiginio įrodymą galima rasti Francq ir Zakoïan (2010) knygoje. Pastebėsime, kad pagal Jensen'o nelygybę

$$\mathrm{E}\ln(\alpha_1\varepsilon_t^2 + \beta_1) \ \leqslant\ \ln \mathrm{E}(\alpha_1\varepsilon_t^2 + \beta_1) \ =\ \ln(\alpha_1 + \beta_1) \ <\ 0,$$

jei $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Taigi, galioja (12.16). Taip pat pastebėsime, kad šis teiginys galioja ir ARCH(1) atveju, t. y., jei $\beta_1 = 0$. Tuomet (12.16) yra ekvivalenti sąlygai

$$0 \leqslant \alpha_1 < \mathrm{e}^{-\mathrm{E}\ln\varepsilon_t^2}. \tag{12.17}$$

Jei, pavyzdžiui, $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0,1)$, tai pastaroji sąlyga tampa $\alpha_1 < 3,56$. Kita vertus, (12.17) sąlyga visada galioja tuo atveju, kai $\mathrm{E}\ln\varepsilon_t^2 = -\infty$ (jei, pavyzdžiui, $\varepsilon_t$ turi masę nulyje).

*GARCH(p, q) modelis.* Tegul

$$r_t = \sigma_t\varepsilon_t,\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \tag{12.18}$$

kur $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_j \geqslant 0$ su visais $i, j$, o $\{\varepsilon_t\}$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su parametrais (0,1). Pirmiausia, perrašykime antrąją (12.18) lygtį kompaktiškai

$$\sigma_t^2 \ =\ \alpha_0 + \alpha(B)r_t^2 + \beta(B)\sigma_t^2, \tag{12.19}$$

kur $\alpha(B) = \alpha_1 B + \dots + \alpha_q B^q$, $\beta(B) = \beta_1 B + \dots + \beta_p B^p$. Tuomet, jei $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$ ir daugianariai $\alpha(z)$, $1 - \beta(z)$ neturi bendrų nulių, tai (12.19) lygtis ekvivalenti lygčiai

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \left(1 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j B^j\right)^{-1} \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i r_{t-i}^2\right) \\ &= a + \sum_{k=0}^{\infty} b_k r_{t-k-1}^2;\end{aligned}$$

čia $a = \alpha_0/(1 - \beta_1 - \cdots - \beta_p)$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \alpha(z)/(1 - \beta(z))$. (Pastebėsime, kad jeigu $\beta_1 + \cdots + \beta_p < 1$, tai visi daugianario $1 - \beta(z)$ nuliai tenkina $|z| > 1$.) Kadangi visi $\beta_j$ yra neneigiami, tai ir visi $b_k \geqslant 0$.

Visiškai analogiškai kaip GARCH(1,1) atveju galima įvesti NA sekos sąvoką ir nagrinėti sprendinį

$$r_t^* = \sqrt{\sigma_t^{*2}}\varepsilon_t, \ \sigma_t^{*2} = a \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k_1,\dots,k_l=1}^{\infty} b_{k_1} \dots b_{k_l} \varepsilon_{t-k_1}^2 \varepsilon_{t-k_1-k_1}^2 \dots \varepsilon_{t-k_1-\dots-k_l}^2. \tag{12.20}$$

Turime tokį teiginį:

**12.6 teiginys.** *Tegul* $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1$. *Tuomet* (12.13) *lygtys turi stacionarų siaurąja prasme sprendinį* $\{r_t\}$, *tenkinantį* $\mathrm{E} r_t^2 = \mathrm{const} < \infty$. *Be to, sprendinys yra vienintelis NA sprendinys, kuriam galioja* $\mathrm{E} r_t^2 = \mathrm{const} < \infty$. *Jeigu* $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \geqslant 1$, *tai NA sprendinio su savybe* $\mathrm{E} r_t^2 = \mathrm{const} < \infty$ *neegzistuoja.*

Taip pat galima suformuluoti ir pakankamą sprendinio su baigtiniu ketvirtuoju momentu egzistavimo sąlygą:

**12.7 teiginys.** *Tegul* $\mathrm{E}\varepsilon_t^4 < \infty$ *ir* $\sqrt{\mathrm{E}\varepsilon_t^4} \sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1$. *Tuomet* (12.20) *yra stacionarus siaurąja prasme sprendinys, kuriam* $\mathrm{E} r_t^{*4} < \infty$. *Be to, šis sprendinys yra vienintelis GARCH(p, q) sprendinys, kuriam galioja* $\mathrm{E} r_t^4 = \mathrm{const} < \infty$.

Abiejų pastarųjų teiginių įrodymai išplaukia iš bendresnių teiginių apie vadinamojo ARCH($\infty$), kuris turi pavidalą $r_t = \sigma_t \varepsilon_t$, $\sigma_t^2 = a + \sum_{k=0}^{\infty} b_k r_{t-k-1}^2$ su bendrais koeficientais $b_k \geqslant 0$, sprendinio egzistavimą (žr., pvz., Giraičio, Leipaus ir Kokoszka (2000) straipsnį).

Taigi, jei

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1,$$

tai GARCH$(p, q)$ lygtys turi stacionarų sprendinį ir besąlyginė dispersija lygi

$$\mathrm{D}r_t = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i - \sum_{j=1}^{p} \beta_j} < \infty. \qquad (12.21)$$

Kita vertus, $r_t^2$ galima užrašyti kaip ARMA$(m, p)$ procesą su triukšmu $\nu_t = r_t^2 - \sigma_t^2$:

$$r_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \beta_i) r_{t-i}^2 + \nu_t - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \nu_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z};$$

čia $m = \max\{p, q\}$, o $\alpha_i = 0$ su $i > q$, bei $\beta_j = 0$ su $j > p$.

*12.3* PASTABA. Pastebėsime, kad koeficientų $\alpha_i$ ir $\beta_j$ neneigiamumas nėra būtinas tam, kad užtikrinti jog visi koeficientai $b_k$ būtų neneigiami (tai užtikrintų, kad $\sigma_t^2 > 0$). Pavyzdžiui GARCH(1,2) atveju, būtinos ir pakankamos sąlygos gali būti susilpnintos į (žr. Nelson ir Cao (1992))

$$0 \leqslant \beta_1 < 1, \ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \geqslant 0, \ \alpha_1 \geqslant 0.$$

GARCH(2,1) atveju:

$$\alpha_1 \geqslant 0, \ \beta_1 \geqslant 0, \ \beta_1 + \beta_2 < 1, \ \beta_1^2 + 4\beta_2 \geqslant 0.$$

(abiem atvejais laikome $\alpha_0 > 0$).

Kitas GARCH modelių savybes galima rasti, pavyzdžiui, Teräsvirta (1996), He ir Teräsvirta (1999) darbuose bei Francq ir Zakoïan (2010) knygoje.

## 12.3 ARCH ir GARCH parametrų vertinimas

*ARCH(1) modelio parametrų vertinimas.* Vienas iš didžiausių ARCH modelių pranašumų yra lengvai užrašomas daugiamatis grąžų tankis, todėl, norint vertinti parametrus, nesunku taikyti didžiausio tikėtinumo metodą. Primename, kad bet kokiam atsitiktinių dydžių vektoriui $(X_1, \ldots, X_n)$ jo tankis (jei jis egzistuoja ir yra teigiamas) gali būti užrašytas tokia sąlyginių tankių sandauga:

$$f_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \prod_{i=2}^{n} f_{X_i | X_{i-1}, \ldots, X_1}(x_i | x_{i-1}, \ldots, x_1).$$

ARCH(1) modelio ($X_t = r_t$) su $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0,1)$ atveju turime

$$
\begin{aligned}
f_{X_i|X_{i-1},\ldots,X_1}(x_i|x_{i-1},\ldots,x_1) &= f_{X_i|X_{i-1}}(x_i|x_{i-1}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\alpha_0+\alpha_1 x_{i-1}^2)}}\ \exp\Big\{-\frac{x_i^2}{2(\alpha_0+\alpha_1 x_{i-1}^2)}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Taigi, duotam $r_1$ sąlyginė tikėtinumo funkcija yra

$$
\begin{aligned}
L \equiv L(r_2,\ldots,r_n;\alpha_0,\alpha_1) &= \prod_{i=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}\ \exp\Big\{-\frac{r_i^2}{2\sigma_i^2})\Big\} \\
&= \prod_{i=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi(\alpha_0+\alpha_1 r_{i-1}^2)}}\ \exp\Big\{-\frac{r_i^2}{2(\alpha_0+\alpha_1 r_{i-1}^2)}\Big\},
\end{aligned}
$$

taigi

$$
\ln L = -\frac{n-1}{2}\ \ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\ln(\alpha_0+\alpha_1 r_{i-1}^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\frac{r_i^2}{\alpha_0+\alpha_1 r_{i-1}^2}.
$$

Pastaroji išraiška gali būti maksimizuota naudojant skaitinius netiesinio optimizavimo metodus.

*GARCH(1,1) modelio parametrų vertinimas.* Visų pirma pastebėsime, kad panašiai, kaip ARMA modelio atveju, galima gauti tokį $\sigma_t^2$ skleidinį begaline eilute:

$$
\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= (1-\beta_1 B)^{-1}(\alpha_0+\alpha_1 r_{t-1}^2) \\
&= \frac{\alpha_0}{1-\beta_1} + \alpha_1\sum_{j=1}^{\infty}\beta_1^{j-1} r_{t-j}^2.
\end{aligned}
$$

Kadangi teoriškai kintamumas $\sigma_t^2$ priklauso nuo be galo daug praėjusių reikšmių $r_{t-1}^2, r_{t-2}^2, \ldots$, tai praktikoje vietoj $r_t^2$ įvedami „nupjauti“ dydžiai $\tilde{r}_t^2 = 0$ su $t \leqslant 0$, $\tilde{r}_t^2 = r_t^2$ su $t > 0$, o vietoj $\sigma_t^2$ – rekurentiškai skaičiuojami dydžiai $\tilde{\sigma}_t^2$, $t = 1, 2, \ldots$

$$
\tilde{\sigma}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\tilde{r}_{t-1}^2 + \beta_1\tilde{\sigma}_{t-1}^2, \quad \tilde{\sigma}_t^2 = 0,\ t \leqslant 0.
$$

Gauname tokią rekurentinę procedūrą:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_1^2 &= \alpha_0, \\
\tilde{\sigma}_2^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \tilde{r}_1^2 + \beta_1 \tilde{\sigma}_1^2 \\
&= \alpha_0 + \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 r_1^2, \\
\tilde{\sigma}_3^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \tilde{r}_2^2 + \beta_1 \tilde{\sigma}_2^2 \\
&= \alpha_0 + \alpha_0 \beta_1 + \alpha_0 \beta_1^2 + \alpha_1 \beta_1 r_2^2 + \alpha_1 \beta_1 r_1^2, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Įsistatę šias išraiškas į tikėtinumo funkciją

$$L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = \prod_{i=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi \tilde{\sigma}_i^2}} \ \exp\Big\{ -\frac{r_i^2}{2\tilde{\sigma}_i^2} \Big\}$$

ir maksimizuodami ją skaitiniais metodais, randame didžiausio tikėtinumo įverčius $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$. Panašiai parametrai vertinami ir GARCH$(p, q)$ modelyje.

Apie įverčių „kokybę" ARCH/GARCH modelių atveju galima spręsti, pavyzdžiui, remiantis ARMA reprezentacija. Taip pat, turint modelio $r_t^2$ liekanas $e_t$, galima naudoti klasikinę "portmanteau" statistiką

$$Q(h) = n(n+2) \sum_{j=1}^{h} \hat{\rho}_e(j)/(n-j),$$

kur $\hat{\rho}_e(j)$ yra liekanų empirinė koreliacija. Esant korektiškai nusakytam modeliui, $Q(h)$ turės asimptotinį $\chi^2_{h-m}$ skirstinį, kur $m$ yra nepriklausomų (vertinamų) modelio parametrų skaičius. Taigi, didelėms $Q(h)$ reikšmėms nulinė hipotezė apie liekanų nepriklausomumą bus atmetama. Plačiai paplitęs ir Lagrange'o daugiklių testas.

*12.1* PRATIMAS. Patikrinkite (12.15) lygybę.

*12.2* PRATIMAS. Įrodykite 12.4 teiginį.

# 13 Kiti sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai

Nors klasikiniai ARCH/GARCH tipo modeliai pakankamai adekvačiai aprašo kai kuriuos stilizuotus faktus, tačiau nemažai finansinėse rinkose stebimų reiškinių yra nepilnai atpindimi. Todėl buvo pasiūlyta nemažai sąlyginio heteroskedastiškumo modelių modifikacijų. Kai kurias iš jų paminėsime (jų ir kai kurių kitų neklasikinių ARCH/GARCH modelių aprašymus galima rasti Tsay (2010) knygoje).

## 13.1 Integruotas GARCH modelis

Taikant GARCH(1,1) modelį praktikoje, labai dažnai pasirodo, kad parametrų $\alpha_1$ ir $\beta_1$ suma yra arti 1: $\alpha_1 + \beta_1 \approx 1$. Tuo atveju kai $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, (12.13) lygtys nusako vadinamąjį *integruotą* GARCH (IGARCH(1,1)) procesą. Kitaip sakant, (12.14) nusakytoje ARMA(1,1) reprezentacijoje AR dalis turi vienetinę šaknį. IGARCH(1,1) modelis nusakomas lygtimis

$$\begin{cases} r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + (1 - \beta_1) r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \end{cases}$$

čia $0 \leqslant \beta_1 < 1$.

Priminsime, kad, remiantis 12.5 teiginiu, toks procesas neturi stacionaraus silpnąja prasme sprendinio, tačiau gali turėti siaurąja prasme stacionarų sprendinį.

Vienas iš esminių IGARCH modelio bruožų yra tas, kad šio modelio sąlyginė dispersija (kintamumas) turi tiesiškai augančią komponentę. Lengva patikrinti, kad

$$\mathrm{E}(\sigma_{t+h}^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = h\alpha_0 + \sigma_t^2, \quad h \geqslant 0.$$

Matome, kad IGARCH modelio atveju „šios dienos“ kintamumo reikšmė veikia „rytdienos“ kintamumo prognozę ir šis poveikis išlieka be galo ilgai (palyginkite su atveju $\alpha_1 + \beta_1 < 1$). Šiuo požiūriu, galima įžvelgti analogiją su atsitiktinio klaidžiojimo modeliu.

## 13.2 GARCH-M modelis

Tuo atveju, kai finansinės grąžos lygį norima susieti su kintamumu, galima naudoti GARCH-M modelį (angl. *GARCH in the mean*). Vienas paprasčiausių tokio modelio pavyzdžių yra GARCH(1,1)-M modelis, nusakomas lygtimis

$$r_t = \mu + c\sigma_t^2 + a_t, \quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \tag{13.1}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \tag{13.2}$$

čia $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geqslant 0$, $\beta_1 \geqslant 0$, $\mu, c \in \mathbb{R}$. Paklaidos $\varepsilon_t$ yra n.v.p. (0,1) dydžiai. Vadinamoji premijos už riziką konstanta $c$ rodo kaip grąžos lygis susiję̨s su kintamumu. Pavyzdžiui, jei $c > 0$, tai grąža auga didėjant kintamumui. Kita vertus, šiuo modeliu aprašomos grąžos nėra nekoreliuotos.

Pastebėsime, kad jeigu $\mathrm{E}(\alpha_1\varepsilon_t^2 + \beta_1) < 1$, tai

$$\sigma_t^{*2} = \alpha_0\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}(\alpha_1\varepsilon_{t-i}^2 + \beta_1)\right).$$

yra stacionarus siaurąja prasme GARCH(1,1) (13.2) lygties sprendinys, taigi (13.1)–(13.2) lygčių (stacionarus siaurąja prasme) sprendinys turi pavidalą

$$r_t^* = \mu + c\sigma_t^{*2} + \sqrt{\sigma_t^{*2}}\varepsilon_t.$$

Be to, $\mathrm{E}|r_t^*| < \infty$ ir

$$\mathrm{E}r_t^* = \mu + \frac{c}{1 - \mathrm{E}(\alpha_1\varepsilon_t^2 + \beta_1)} = \mu + \frac{c}{1 - \alpha_1 - \beta_1}.$$

## 13.3 Eksponentinis GARCH modelis

Kaip jau minėta, ARCH/GARCH tipo modeliai „nepagauna" finansinių grąžų asimetrijos. Vienas pirmųjų modelių, skirtų asimetrijos aprašymui, buvo pasiūlytas Nelson'o (1991) ir vadinamas eksponentiniu GARCH (*Exponential GARCH*) arba trumpai EGARCH. Jame logaritminis kintamumas tenkina ARMA$(p, q)$ lygtį. Taigi, grąžų modelis EGARCH$(p, q)$ turi pavidalą

$$r_t = \sigma_t\varepsilon_t,$$

$$\ln\sigma_t^2 - \alpha_1\ln\sigma_{t-1}^2 - \cdots - \alpha_p\ln\sigma_{t-p}^2 = \alpha_0 + g(\varepsilon_{t-1}) + \beta_1 g(\varepsilon_{t-2}) + \cdots + \beta_q g(\varepsilon_{t-1-q}),$$

čia $\varepsilon_t$ yra n.v.p. (0,1) dydžiai, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, daugianariai $\alpha(z) = 1 - \alpha_1 z - \cdots - \alpha_p z^p$ ir $\beta(z) = 1 + \beta_1 z + \cdots + \beta_q z^q$ neturi bendrų nulių, o $\alpha(z)$ nuliai tenkina $|z| > 1$. Funkcija $g(x)$ turi pavidalą

$$g(x) = \theta x + \gamma(|x| - \mathrm{E}|\varepsilon_t|), \quad \theta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Antrąją EGARCH$(p,q)$ modelio lygtį galima užrašyti kompaktiškai

$$\alpha(B)\ln\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta(B)g(\varepsilon_{t-1})$$

arba

$$\sigma_t^2 = \exp\left\{\alpha_0^* + \frac{\beta(B)}{\alpha(B)}\,g(\varepsilon_{t-1})\right\}, \quad \alpha_0^* := \frac{\alpha_0}{\alpha(1)}.$$

*13.1* PAVYZDYS. Nagrinėkime EGARCH(1,0) modelį su $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0,1)$:

$$r_t \;=\; \sigma_t\varepsilon_t,\; \ln\sigma_t^2 - \alpha_1\ln\sigma_{t-1}^2 = \alpha_0 + g(\varepsilon_{t-1}).$$

Kadangi $\mathrm{E}|\varepsilon_t| = \sqrt{2/\pi}$, tai gauname

$$\ln\sigma_t^2 - \alpha_1\ln\sigma_{t-1}^2 = \begin{cases}\alpha_0 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\gamma + (\theta+\gamma)\varepsilon_{t-1}, & \varepsilon_{t-1} \geqslant 0,\\ \alpha_0 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\gamma + (\theta-\gamma)\varepsilon_{t-1}, & \varepsilon_{t-1} < 0.\end{cases}$$

Pastarąją lygtį galima užrašyti ir taip:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 \;&=\; \sigma_{t-1}^{2\alpha_1}\mathrm{e}^{\alpha_0-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\gamma}\begin{cases}(\theta+\gamma)\varepsilon_{t-1}, & \varepsilon_{t-1}\geqslant 0,\\ (\theta-\gamma)\varepsilon_{t-1}, & \varepsilon_{t-1} < 0\end{cases}\\ &=\; \sigma_{t-1}^{2\alpha_1}\mathrm{e}^{\alpha_0-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\gamma}\begin{cases}(\theta+\gamma)\frac{r_{t-1}}{\sigma_{t-1}}, & r_{t-1}\geqslant 0,\\ (\theta-\gamma)\frac{r_{t-1}}{\sigma_{t-1}}, & r_{t-1} < 0.\end{cases}\end{aligned}$$

Iš čia matome asimetrinį neigiamų ir teigiamų grąžų poveikį kintamumui. Daugiau EGARCH modelio savybių (stacionarumas, kovariacijų išraiškos) galima rasti Nelson'o (1991) darbe.

## 13.4 Stochastinio kintamumo modelis

Didelė grupė modelių nusako kintamumą $\sigma_t^2$, į jį įtraukiant triukšmą nepriklausantį nuo triukšmo „valdančio" grąžą $r_t$. Panašiai kaip ir EGARCH atveju, vietoj kintamumo $\sigma_t^2$ aprašysime jo logaritmą $\ln\sigma_t^2$. Vienas paprasčiausių stochastinio kintamumo (angl. *stochastic volatility*) modelių aprašomas lygtimis

$$\begin{aligned}r_t \;&=\; \sigma_t\varepsilon_t,\\ \ln\sigma_t^2 - \alpha_1\ln\sigma_{t-1}^2 - \cdots - \alpha_p\ln\sigma_{t-p}^2 &= \alpha_0 + \eta_t,\end{aligned} \tag{13.3}$$

kur $\varepsilon_t$ yra n.v.p. N(0,1), $\eta_t$ yra n.v.p. $\mathrm{N}(0,\sigma_\eta^2)$ dydžiai; sekos $\{\varepsilon_t\}$ ir $\{\eta_t\}$ yra tarpusavyje nepriklausomos. Kaip įprasta, laikysime, kad daugianario $\alpha(z) = 1 - \alpha_1 z - \cdots - \alpha_p z^p$ nuliai tenkina $|z| > 1$. (13.3) lygtį galima perrašyti

$$\ln \sigma_t^2 \;=\; \alpha^* + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \eta_{t-j}, \tag{13.4}$$

kur $\alpha^* = \alpha_0/\alpha(1)$, $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \alpha^{-1}(z)$.

Stochastinio kintamumo modelio savybes nesunku gauti turint galvoje, kad $\ln \sigma_t^2$ yra normalusis dydis. Imkime, pavyzdžiui, atvejį $p = 1$:

$$\ln \sigma_t^2 - \alpha_1 \ln \sigma_{t-1}^2 = \alpha_0 + \eta_t \quad \text{su} \quad |\alpha_1| < 1.$$

Tuomet

$$\ln \sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j \eta_{t-j},$$

taigi $\{\ln \sigma_t^2, t \in \mathbb{Z}\}$ yra stacionari siaurąja prasme Gauso seka,

$$\ln \sigma_t^2 \;\sim\; \mathrm{N}(\mu, \sigma^2), \quad \mathrm{Cov}(\ln \sigma_t^2, \ln \sigma_{t-k}^2) = \sigma^2 \alpha_1^{|k|},$$

su $\mu := \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$, $\sigma^2 := \frac{\sigma_\eta^2}{1-\alpha_1^2}$.

Remiantis normaliojo atsitiktinio dydžio $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ generuojančiąja funkcija $\mathrm{E}e^{uX} = \exp\{\mu u + \sigma^2 u^2/2\}$, bei sekų $\{\varepsilon_t\}$ ir $\{\eta_t\}$ tarpusavio nepriklausomumu, nesunku išvesti ir kitas savybes:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}r_t^{2m} &= \mathrm{E}\varepsilon_t^{2m} \mathrm{E}e^{m \ln \sigma_t^2} \\
&= \frac{(2m)!}{2^m m!} e^{m\mu + m^2\sigma^2/2}, \quad m = 1, 2, \ldots, \\
\mathrm{Cov}(r_t^2, r_{t-k}^2) &= \mathrm{E}e^{\ln \sigma_t^2 + \ln \sigma_{t-k}^2} - (\mathrm{E}e^{\ln \sigma_t^2})^2 \\
&= e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2 \alpha_1^{|k|}} - 1), \quad k \neq 0, \qquad (13.5) \\
\mathrm{Corr}(r_t^2, r_{t-k}^2) &= \frac{e^{\sigma^2 \alpha_1^{|k|}} - 1}{3e^{\sigma^2} - 1}, \quad k \neq 0. \qquad (13.6)
\end{aligned}$$

Ilgos atminties stochastinio kintamumo modelis. Tarkime, kad (13.4) lygtyje $\psi_j$ koeficientai yra generuoti funkcijos $(1-z)^{-d}$ su $0 < |d| < 1/2$, t. y.

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \ln \sigma_t^2 \;=\; \alpha^* + X_t,$$

kur $X_t = (1-B)^{-d}\eta_t$, $t \in \mathbb{Z}$ yra FARIMA(0,$d$,0) seka, o $\{\varepsilon_t\}$ ir $\{\eta_t\}$ yra tarpusavyje nepriklausomos sekos, $\varepsilon_t$ yra n.v.p. N(0,1), $\eta_t$ yra n.v.p. $\mathrm{N}(0, \sigma_\eta^2)$. Iš 6.1 teoremos gauname

$$\mathrm{Cov}(\ln \sigma_t^2, \ln \sigma_{t-k}^2) \ \sim \ Ck^{2d-1}, \quad k \to \infty.$$

Vadinasi, $\{\ln \sigma_t^2\}$ yra Gauss'o *ilgos atminties procesas.* Tuo tarpu logaritmuotas kvadratines grąžas $\ln r_t^2$ galima užrašyti kaip Gauss'o ilgos atminties proceso ir balto (nebe Gauss'o) triukšmo sumą:

$$\ln r_t^2 \ = \ \alpha^{**} + X_t + e_t;$$

čia $\alpha^{**} := \alpha^* + \mathrm{E} \ln \varepsilon_t^2$, $e_t := \ln \varepsilon_t^2 - \mathrm{E} \ln \varepsilon_t^2$, sekos $\{X_t\}$ ir $\{e_t\}$ yra tarpusavyje nepriklausomos.

*13.1* PRATIMAS. Išveskite (13.5) ir (13.6) formules.

# 14 Determinuoto ir stochastinio trendo modeliai

## 14.1 Determinuoto ir stochastinio trendo modelių palyginimas

Šiame skyriuje detaliau išnagrinėsime du svarbiausius laiko eilučių su trendu modelius: determinuoto (tiesinio) trendo modelį

$$X_t = \alpha + \delta t + Y_t \tag{14.1}$$

ir stochastinio trendo modelį

$$X_t = X_{t-1} + \delta + Y_t, \tag{14.2}$$

kur $\{Y_t\}$ yra stacionari seka su nuliniu vidurkiu ir kovariacine funkcija $r_Y(\cdot)$, $\alpha$ ir $\delta$ – realieji skaičiai.

Pirmiausia pastebėsime, kad stochastinio trendo modelis gali būti perrašytas

$$X_t = X_0 + \delta t + Y_1 + \cdots + Y_t. \tag{14.3}$$

Vadinasi, jei $X_0 = 0$, tai $\mathrm{E}X_t = \delta t$ ir abiejų modelių vidurkiai tiesiškai auga. Pagrindinis šių modelių skirtumas slypi dispersijų elgesyje: determinuoto trendo atveju $\mathrm{D}X_t = r_Y(0)$, stochastinio trendo atveju $\mathrm{D}X_t = \sum_{i,j=1}^{t} r_Y(i-j)$.

Lyginant transformacijas, suvedančias į stacionarų modelį, matome, kad pirmu atveju, norint gauti stacionarią seką, natūraliausia būtų iš stebėjimų atimti tiesinę dalį; antru atveju stacionarumas pasiekiamas nagrinėjant skirtumus $\Delta X_t \equiv X_t - X_{t-1}$. Pastebėsime, kad (14.1) atveju $\Delta X_t = \delta + \Delta Y_t$ yra stacionari seka, tačiau turi nepageidaujamą savybę – ji nėra apgręžiama (žr. 4.4 apibrėžimą).

Taip pat determinuoto ir stochastinio trendo modelius galima lyginti pagal prognozes ir atsakus į vienetinius impulsus (dinaminius daugiklius).

*Prognozių palyginimas.* Tarkime

$$Y_t = Z_t + \psi_1 Z_{t-1} + \psi_2 Z_{t-2} + \dots, \text{ kur } \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty, \quad Z_t \sim \mathrm{BT}(0, \sigma^2).$$

Tuomet determinuoto trendo atveju $h$ žingsnių prognozė lygi

$$\begin{aligned} P_{\overline{\text{sp}}\{1,X_n,X_{n-1},\dots\}}X_{n+h} &= \alpha+\delta(n+h)+P_{\overline{\text{sp}}\{Y_n,Y_{n-1},\dots\}}Y_{n+h} \\ &= \alpha+\delta(n+h)+P_{\overline{\text{sp}}\{Z_n,Z_{n-1},\dots\}}\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j Z_{n+h-j} \\ &= \alpha+\delta(n+h)+\sum_{j=h}^{\infty}\psi_j Z_{n+h-j}. \end{aligned}$$

Todėl

$$X_{n+h}-P_{\overline{\text{sp}}\{1,X_n,X_{n-1},\dots\}}X_{n+h} = \sum_{j=0}^{h-1}\psi_j Z_{n+h-j}$$

ir vidutinė kvadratinė prognozės paklaida lygi

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_{n+h}-P_{\overline{\text{sp}}\{1,X_n,X_{n-1},\dots\}}X_{n+h})^2 &= \mathrm{E}\Big(\sum_{j=0}^{h-1}\psi_j Z_{n+h-j}\Big)^2 \\ &= \sigma^2\sum_{j=0}^{h-1}\psi_j^2 \to \sigma^2\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2, \quad h\to\infty. \end{aligned}$$

Kita galima interpretacija yra pastebėjimas, kad horizontui $h$ augant į begalybę, $h$ žingsnių prognozė vidutinių kvadratų prasme „suartėja" su trendu $\alpha+\delta(n+h)$:

$$\mathrm{E}(P_{\overline{\text{sp}}\{1,X_n,X_{n-1},\dots\}}X_{n+h}-\alpha-\delta(n+h))^2 = \sigma^2\sum_{j=h}^{\infty}\psi_j^2\to 0, \quad h\to\infty.$$

Tuo tarpu (14.2) atveju, iš lygybės $X_{n+h}=\delta h+Y_{n+h}+\cdots+Y_{n+1}+X_n$ turime

$$\begin{aligned} P_{\overline{\text{sp}}\{1,X_n,X_{n-1},\dots\}}X_{n+h} &= \delta h+P_{\overline{\text{sp}}\{Y_n,Y_{n-1},\dots\}}Y_{n+h}+\cdots+P_{\overline{\text{sp}}\{Y_n,Y_{n-1},\dots\}}Y_{n+1}+X_n \\ &= \delta h+\sum_{j=h}^{\infty}\psi_j Z_{n+h-j}+\cdots+\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j Z_{n+1-j}+X_n \\ &= \delta h+X_n+(\psi_h+\cdots+\psi_1)Z_n+(\psi_{h+1}+\cdots+\psi_2)Z_{n-1}+\dots. \end{aligned}$$

Todėl

$$\begin{aligned}
X_{n+h} - P_{\overline{\mathrm{sp}}\{1,X_n,X_{n-1},\dots\}} X_{n+h} &= (Y_{n+h} - P_{\overline{\mathrm{sp}}\{Y_n,Y_{n-1},\dots\}} Y_{n+h}) \\
&\quad + \cdots + (Y_{n+1} - P_{\overline{\mathrm{sp}}\{Y_n,Y_{n-1},\dots\}} Y_{n+1}) \\
&= \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j Z_{n+h-j} + \sum_{j=0}^{h-2} \psi_j Z_{n+h-1-j} + \cdots + Z_{n+1} \\
&= Z_{n+h} + (1+\psi_1) Z_{n+h-1} \\
&\quad + \cdots + (1+\psi_1+\cdots+\psi_{h-1}) Z_{n+1}.
\end{aligned}$$

Iš čia

$$\mathrm{E}(X_{n+h} - P_{\overline{\mathrm{sp}}\{1,X_n,X_{n-1},\dots\}} X_{n+h})^2 = \sigma^2(1+(1+\psi_1)^2+\cdots+(1+\psi_1+\cdots+\psi_{h-1})^2).$$

Šiuo atveju matome, kad vidutinė kvadratinė prognozės paklaida auga, tačiau neartėja į kokią nors fiksuotą reikšmę kai $h \to \infty$. Pastebėsime, kad jei $s_k := (1+\psi_1+\cdots+\psi_k)^2$, tai (remiantis Abel'io teorema) iš konvergavimo $s_k \to s_\infty = (1+\psi_1+\psi_2+\dots)^2$ $(k \to \infty)$ išplaukia

$$\frac{s_0+\cdots+s_{h-1}}{h} \to s_\infty.$$

Vadinasi

$$\mathrm{E}(X_{n+h} - P_{\overline{\mathrm{sp}}\{1,X_n,X_{n-1},\dots\}} X_{n+h})^2 \sim \sigma^2(1+\psi_1+\psi_2+\dots)^2 h,$$

t. y. vidutinė kvadratinė prognozės paklaida asimptotiškai ekvivalenti *tiesinei* $h$ funkcijai su krypties koeficientu $\sigma^2(1+\psi_1+\psi_2+\dots)^2$ (tariame, kad $1+\psi_1+\psi_2+\cdots \neq 0$).

*Atsakų į impulsus palyginimas.* Determinuoto ir stochastinio trendo modeliai skiriasi pagal ilgalaikę reakciją į impulsus („šokus“). Tarkime, kad $Y_t$ yra tiesinis procesas pavidalo

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} \quad \text{su} \quad \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty, \quad Z_t \sim \mathrm{BT}(0,\sigma^2).$$

Šoko poveikį galime apskaičiuoti turėdami galvoje apytikslę lygybę $\Delta X_{t+h} \approx \frac{\partial X_{t+h}}{\partial Z_t} \Delta Z_t$.

Determinuoto trendo atveju *dinaminiai daugikliai* $\frac{\partial X_{t+h}}{\partial Z_t}$ randami iš lygybės

$$\frac{\partial X_{t+h}}{\partial Z_t} = \psi_h,$$

t. y., $h$ artėjant į begalybę, šoko poveikis išnyksta:

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\partial X_{t+h}}{\partial Z_t} = 0.$$

Stochastinio trendo atveju, kadangi $\partial Y_{t+j}/\partial Z_t = \psi_j$, tai turime

$$\frac{\partial X_{t+h}}{\partial Z_t} = \psi_h + \cdots + \psi_1 + \frac{\partial X_t}{\partial Z_t}.$$

Vadinasi, jei $\frac{\partial X_t}{\partial Z_t} = 1$, tai

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\partial X_{t+h}}{\partial Z_t} = 1 + \psi_1 + \psi_2 + \ldots.$$

Matome, kad, jeigu $1 + \psi_1 + \psi_2 + \cdots \neq 0$, tai $Z_t$ sužadinimas turi ilgalaikį poveikį $X_{t+h}$ pokyčiui, kuris neišnyksta kai $h \to \infty$.

*14.1* PASTABA. Tarkime, kad

$$Y_t = \delta^* + \sum_{j=0}^{\infty} a_j Z_{t-j}, \tag{14.4}$$

kur $a_j = -\psi_{j+1} - \psi_{j+2} - \ldots,\ j \geqslant 0$, ir $\sum_{j=1}^{\infty} j|\psi_j| < \infty$. Kadangi tuomet $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty$, tai (14.4) seka yra korektiškai nusakyta ir, be to, jei $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = 0$, tai

$$Y_t - Y_{t-1} = Z_t + \psi_1 Z_{t-1} + \psi_2 Z_{t-2} + \ldots, \tag{14.5}$$

t. y. (14.4) yra *stacionarus* (14.5) lygties, aprašančios stochastinį trendą, sprendinys. Tam, kad stochastinio trendo modelis aprašytų tik nestacionarius modelius, reikalausime $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \neq 0$.

## 14.2 Tiesinio trendo modelio parametrų vertinimas

Nagrinėkime tiesinio trendo modelį

$$X_t \;=\; \alpha + \delta t + Z_t. \tag{14.6}$$

Jį galima užrašyti įprastiniu tiesinės regresijos modeliu

$$X_t = x_t'\beta + Z_t \quad \text{su} \quad x_t := \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix},\; \beta := \begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix}.$$

Minimizuodami kvadratų sumą $\sum_{t=1}^n (X_t - \alpha - \delta t)^2$, randame $\beta$ mažiausių kvadratų įvertį

$$\hat\beta_n \;=\; \Big(\sum_{t=1}^n x_t x_t'\Big)^{-1} \sum_{t=1}^n x_t X_t. \tag{14.7}$$

Čia

$$\Big(\sum_{t=1}^n x_t x_t'\Big)^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} \Sigma\, 1 & \Sigma\, t \\ \Sigma\, t & \Sigma\, t^2 \end{pmatrix}^{-1}, \quad \sum_{t=1}^n x_t X_t = \begin{pmatrix} \Sigma\, X_t \\ \Sigma\, t X_t \end{pmatrix}.$$

Akivaizdu, kad

$$\hat\beta_n - \beta \;=\; \Big(\sum_{t=1}^n x_t x_t'\Big)^{-1} \sum_{t=1}^n x_t Z_t. \tag{14.8}$$

Pažymėkime $A_n := \begin{pmatrix} n^{1/2} & 0 \\ 0 & n^{3/2} \end{pmatrix}$. Tuomet, jei $n \to \infty$, turėsime

$$A_n^{-1}\Big(\sum_{t=1}^n x_t x_t'\Big)A_n^{-1} \;\to\; \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \;=:\; Q, \tag{14.9}$$

$$A_n^{-1}\sum_{t=1}^n x_t Z_t \;\xrightarrow{d}\; \mathrm{N}(0, \sigma^2 Q)$$

(jei galioja atitinkama centrinė ribinė teorema).

Iš (14.8) lygybės gauname

$$\begin{aligned} A_n(\hat\beta_n - \beta) &= A_n\Big(\sum_{t=1}^n x_t x_t'\Big)^{-1} A_n A_n^{-1} \sum_{t=1}^n x_t Z_t \\ &= \Big(A_n^{-1}\sum_{t=1}^n x_t x_t'\, A_n^{-1}\Big)^{-1} A_n^{-1}\sum_{t=1}^n x_t Z_t \\ &\xrightarrow{d} Q^{-1}\mathrm{N}(0, \sigma^2 Q) \;=\; \mathrm{N}(0, \sigma^2 Q^{-1}). \end{aligned}$$

**14.1 teorema.** *Tegul seka $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ nusakyta (14.6), kur $\{Z_t\}$ yra n.v.p. atsitiktinių dydžių seka su parametrais $(0, \sigma^2)$, $\mathrm{E}Z_t^4 < \infty$. Tarkime, kad įverčiai $\hat{\alpha}_n, \hat{\delta}_n$ nusakyti (14.7). Tuomet, jei $n \to \infty$, tai*

$$\begin{pmatrix} n^{1/2}(\hat{\alpha}_n - \alpha) \\ n^{3/2}(\hat{\delta}_n - \delta) \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, \sigma^2 Q^{-1}), \tag{14.10}$$

*čia* $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$.

Iš šios teoremos išplaukia, kad abu įverčiai $\hat{\alpha}_n$ ir $\hat{\delta}_n$ yra suderinti įverčiai, tačiau jų konvergavimo greičiai skiriasi: $\hat{\alpha}_n - \alpha = O_P(n^{-1/2})$, bet $\hat{\delta}_n - \delta = O_P(n^{-3/2})$.

Hipotezės apie $\alpha$ reikšmę tikrinimas. Tarkime, kad reikia patikrinti nulinę hipotezę $H_0 : \alpha = \alpha_0$, kai parametrai $\delta$ ir $\sigma^2$ yra nežinomi. Tegul

$$t_n = \frac{\hat{\alpha}_n - \alpha_0}{\Big(s_n^2 \big(\sum_{t=1}^n x_t x_t'\big)^{-1}_{(1,1)}\Big)^{1/2}},$$

kur $s_n^2$ yra $\sigma^2$ įvertis

$$s_n^2 := \frac{1}{n-2} \sum_{t=1}^n (X_t - \hat{\alpha}_n - \hat{\delta}_n t)^2,$$

o $\big(\sum_{t=1}^n x_t x_t'\big)^{-1}_{(1,1)}$ yra matricos $\big(\sum_{t=1}^n x_t x_t'\big)^{-1}$ (1,1) elementas. Nesunku įrodyti, kad

$$s_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2. \tag{14.11}$$

Kita vertus, remiantis (14.9),

$$\begin{aligned} n\Big(\sum_{t=1}^n x_t x_t'\Big)^{-1}_{(1,1)} &= (1,0) A_n \Big(\sum_{t=1}^n x_t x_t'\Big)^{-1} A_n (1,0)' \\ &\to (1,0) Q^{-1} (1,0)' = 4. \end{aligned} \tag{14.12}$$

Taigi, iš (14.11), (14.12) ir (14.10) išplaukia, kad

$$t_n = \frac{n^{1/2}(\hat{\alpha}_n - \alpha_0)}{\Big(s_n^2 n \big(\sum_{t=1}^n x_t x_t'\big)^{-1}_{(1,1)}\Big)^{1/2}} \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1).$$

Toliau, kritinė sritis akivaizdžiai sukonstruojama.

Hipotezės apie $\delta$ reikšmę tikrinimas. Tarkime, kad reikia patikrinti nulinę hipotezę $H_0 : \delta = \delta_0$, kai parametrai $\alpha$ ir $\sigma^2$ yra nežinomi. Apibrėžkime

$$t'_n = \frac{\hat{\delta}_n - \delta_0}{\left(s_n^2 \left(\sum_{t=1}^n x_t x'_t\right)^{-1}_{(2,2)}\right)^{1/2}},$$

Visiškai panašiai kaip aukščiau, turime

$$t'_n = \frac{n^{3/2}(\hat{\delta}_n - \delta_0)}{\left(s_n^2 n^3 \left(\sum_{t=1}^n x_t x'_t\right)^{-1}_{(2,2)}\right)^{1/2}} \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1). \tag{14.13}$$

Panašiai galima konstruoti kriterijus ir hipotezės $H_0 : r_1\alpha + r_2\delta = r_0$ ar $H_0 : (\alpha, \delta) = (\alpha_0, \delta_0)$ tikrinimui. Pastaruoju atveju, testas remiasi $\chi^2(2)$ skirstiniu. Daugiau detalių galima rasti Hamilton'o (1994) knygoje.

*14.1* PRATIMAS. Raskite vidutinę kvadratinę prognozės paklaidą $\mathrm{E}(X_{n+h} - P_{\overline{\mathrm{sp}}\{1, X_n, X_{n-1}, \ldots\}} X_{n+h})^2$ ARIMA(0,1,1) proceso atveju.

*14.2* PRATIMAS. Įrodykite (14.11) konvergavimą.

*14.3* PRATIMAS. Patikrinkite (14.13).

# 15 Vienetinės šaknies tikrinimas

Vienas svarbiausių klausimų makroekonometrinėje analizėje yra galimos nestacionarumo priežasties duomenyse nustatymas. Dažniausiai reikia patikrinti ar duomenys aprašomi determinuoto ar stochastinio trendo (vienetinės šaknies) modeliu. Tai leistų nustatyti, pavyzdžiui, ar ekonominis nuosmukis turi ilgalaikį poveikį ateities makroekonominiams rodikliams, ar jis yra laikinas. Nelson'o ir Plosser'io (1982) darbe buvo išnagrinėtos JAV makrokonominės laiko eilutės ir nustatyta, kad dauguma jų geriau aprašomos vienetinės šaknies modeliais. Tiesa, nemažai autorių vėliau pastebėjo kad naudojami vienetinės šaknies testai yra labai konservatyvūs, t. y. nulinė hipotezė apie vienetinę šaknį neatmetama „per dažnai". Kitos problemos, susijusios su vienetinės šaknies testais, minimos Hamilton'o (1994) knygoje (444–447 psl.). Vienetinės šaknies tikrinimą korektiška būtų daryti tada, kai laikoma, jog imties duomenys yra generuoti baigtinės eilės autoregresijos proceso. Įprastai žemiau pateiktas testas siejamas su Dickey ir Fuller'io (1979) darbu.

Nagrinėkime pirmos eilės autoregresijos procesą

$$X_t = \rho X_{t-1} + Z_t, \quad Z_t \sim \mathrm{BT}(0, \sigma^2) \tag{15.1}$$

ir, tarkime, norime patikrinti nulinę hipotezę $H_0\colon \rho = 1$. Remsimės parametro $\rho$ mažiausių kvadratų įverčiu

$$\hat{\rho}_n = \frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} X_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}.$$

Gerai žinoma, kad tuo atveju, kai $|\rho| < 1$ ir triukšmo seka $\{Z_t\}$ tenkina atitinkamas sąlygas, šis įvertis yra asimptotiškai normalus (žr. 8.1 teoremą):

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, 1 - \rho^2).$$

Taigi, atveju $\rho = 1$ atsitiktinis dydis $\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - 1)$ asimptotiškai išsigimsta, t. y.

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - 1) \xrightarrow{d} 0,$$

ir hipotezės $H_0 : \rho = 1$ tikrinimui šis rezultatas netinka. Kaip matysime vėliau, tam, kad riboje gautume neišsigimusį atsitiktinį dydį, vietoj $\sqrt{n}$ reikia imti normavimą $n$, t. y. konvergavimas vienetinės šaknies atveju yra greitesnis nei stacionariu atveju.

Perrašykime

$$n(\hat{\rho}_n - 1) \;=\; \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}Z_t}{\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2} \tag{15.2}$$

ir pradžioje nagrinėkime atskirai skaitiklio bei vardiklio konvergavimą, kai galioja nulinė hipotezė $H_0 : \rho = 1$.

Toliau laikysime, kad $X_0 = 0$ ir $\{Z_t\}$ yra n.v.p. atsitiktiniai dydžiai su parametrais $(0, \sigma^2)$.

Skaitiklis. Pakėlę lygybę $X_t = X_{t-1} + Z_t$ kvadratu ir perkėlę į kairę pusę $X_{t-1}Z_t$, turime

$$X_{t-1}Z_t = \frac{1}{2}(X_t^2 - X_{t-1}^2 - Z_t^2).$$

Taigi,

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}Z_t = \frac{1}{2n}\,X_n^2 - \frac{1}{2n}\sum_{t=1}^{n} Z_t^2.$$

Čia, remiantis CRT,

$$\frac{1}{n}\,X_n^2 \;=\; \Big(\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}\Big)^2 \;\xrightarrow{d}\; \sigma^2\chi^2(1), \tag{15.3}$$

o remiantis silpnuoju didžiųjų skaičių dėsniu,

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t^2 \;\xrightarrow{P}\; \mathrm{E}Z_t^2 = \sigma^2. \tag{15.4}$$

Iš (15.3) ir (15.4) gauname

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}Z_t \;\xrightarrow{d}\; \frac{\sigma^2}{2}(\chi^2(1) - 1). \tag{15.5}$$

Vardiklis. Apibrėžkime

$$X_n(\tau) := \frac{1}{n}\,(Z_1 + \cdots + Z_{[n\tau]}), \quad \tau \in [0, 1].$$

Akivaizdu, kad $X_n(0) = 0$, $\{X_n(\tau), \tau \in [0,1]\}$ yra nepriklausomų pokyčių procesas ir su visais fiksuotais $\tau_1, \tau_2 \in [0,1]$, $\tau_1 < \tau_2$, remiantis CRT,

$$\sqrt{n}(X_n(\tau_2) - X_n(\tau_1)) \xrightarrow{d} \sigma \mathrm{N}(0, \tau_2 - \tau_1)$$

Todėl galima tikėtis, kad ir *atsitiktinė funkcija* $\sqrt{n}X_n(\cdot)$ konverguoja pasiskirstymų prasme į $\sigma W(\cdot)$, t. y. į Wienerio procesą su dispersija $\sigma^2$ (žr. 2.2 pavyzdį).

Suformuluosime (įrodymą ir reikalingas sąvokas galima rasti, pvz., Billingsley (1999) knygoje) tą tvirtinančią *funkcinę centrinę ribinę teoremą* (FCRT). Priminsime, kad $\mathcal{D}[0,1]$ žymima funkcijų $x\colon [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, kurios turi ribą iš kairės kiekviename taške $\tau \in (0,1]$ ir tolydžios iš dešinės kiekviename $\tau \in [0,1)$, erdvė.

**15.1 teorema.** *Tegul* $Z_1, Z_2, \ldots$ *yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių su parametrais* $(0, \sigma^2)$ *seka. Tada*

$$\sqrt{n}X_n(\cdot) \xrightarrow{d} \sigma W(\cdot). \tag{15.6}$$

*Čia konvergavimas* $\xrightarrow{d}$ *suprantamas kaip silpnas atitinkamų matų konvergavimas erdvėje* $\mathcal{D}[0,1]$ *su Skorokhod'o* $J_1$*-topologija arba, turint galvoje, kad* $\mathrm{P}(W(\cdot) \in \mathcal{C}[0,1]) = 1$, *erdvėje* $\mathcal{D}[0,1]$ *su tolygia topologija.*

Kitas svarbus rezultatas, kuris mums reikalingas, yra *tolydaus atvaizdžio teorema*. Ji sako, kad jeigu $Y_n(\cdot) \xrightarrow{d} Y(\cdot)$ (ta pačia prasme kaip (15.6)), o $g\colon f \to \mathbb{R}$ yra tolydus funkcionalas atitinkamoje erdvėje, tai $g(Y_n(\cdot)) \xrightarrow{d} g(Y(\cdot))$. Tokių funkcionalų pavyzdžiai yra

$$\int_0^1 f(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad \int_0^1 f^2(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} |f(\tau)| \text{ ir pan.}$$

Detaliau apie tolydaus atvaizdžio teoremą galima pasiskaityti Billingsley (1999) ar Hamilton'o (1994) knygose.

Grįžkime prie vienetinės šaknies problemos. Priminsime, kad laiptuotas procesas $\{X_n(\tau), \tau \in [0,1]\}$ yra apibrėžtas lygybe

$$X_n(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \tau < \frac{1}{n}, \\ \frac{X_1}{n}, & \frac{1}{n} \leqslant \tau < \frac{2}{n}, \\ \ldots & \\ \frac{X_{n-1}}{n}, & \frac{n-1}{n} \leqslant \tau < 1, \\ \frac{X_n}{n}, & \tau = 1. \end{cases}$$

Iš čia matome, kad

$$\int_0^1 X_n(\tau)\mathrm{d}\tau \;=\; \frac{1}{n^2}(X_1+\cdots+X_{n-1}).$$

Kita vertus, iš FCRT žinome, kad $\sqrt{n}X_n(\tau) \xrightarrow{d} \sigma W(\cdot)$. Todėl, remiantis tolydaus atvaizdžio teorema,

$$n^{-3/2}\sum_{t=1}^{n} X_{t-1} \;\xrightarrow{d}\; \sigma\int_0^1 W(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Čia (patikrinkite) $\sigma\int_0^1 W(\tau)\mathrm{d}\tau \sim \mathrm{N}(0,\sigma^2/3)$.

Visiškai analogiškai įrodoma, kad

$$n^{-2}\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 \;\xrightarrow{d}\; \sigma^2\int_0^1 W^2(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{15.7}$$

Svarbu pastebėti, kad (15.5) ir (15.7) ribos galioja ir vektoriui $\left(n^{-1}\sum_{t=1}^n X_{t-1}Z_t, n^{-2}\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2\right)$, t. y. su $n\to\infty$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}Z_t,\ \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right) \xrightarrow{d} \left(\frac{\sigma^2}{2}(W^2(1)-1), \sigma^2\int_0^1 W^2(\tau)\mathrm{d}\tau\right). \tag{15.8}$$

Iš čia, remdamiesi (15.2), gauname

$$n(\hat\rho_n-1) \;\xrightarrow{d}\; \frac{\frac{1}{2}(W^2(1)-1)}{\int_0^1 W^2(\tau)\mathrm{d}\tau}. \tag{15.9}$$

Pažymėkime dešinėje (15.9) pusėje esantį atsitiktinį dydį $Y$. Tuomet $\mathrm{P}(Y<0)=\mathrm{P}(W^2(1)<1)\approx 0,68$. Vadinasi, tikimybė, kad $\hat\rho_n-1$ yra neigiamas, artėja į 0,68, kai $n\to\infty$ ir todėl $n(\hat\rho_n-1)$ skirstinys yra pasislinkęs į kairę (palyginkite su atveju $|\rho|<1$).

Praktiškai, dydį $n(\hat\rho_n-1)$ ir, tuo pačiu, jo skirstinį galima modeliuoti Monte-Carlo metodu, generuojant n.v.p. Gauss'o atsitiktinius dydžius $Z_t$. Dideliems $n$ ir ne Gauss'o atvejui reikėtų naudoti ribinio dydžio $Y$ pasiskirstymo funkciją.

Populiari alternatyva minėtai statistikai yra standartinė $t$-statistika

$$t_n=\frac{\hat\rho_n-1}{\hat\sigma_{\hat\rho_n}},$$

čia

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\rho}_n} := \frac{s_n^2}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \quad \text{su} \quad s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^n (X_t - \hat{\rho}_n X_{t-1})^2.$$

Perrašę

$$t_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n X_{t-1}Z_t}{(\frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2)^{1/2}(s_n^2)^{1/2}},$$

ir pasinaudoję konvergavimais $s_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$ bei (15.8), gauname

$$t_n \ \xrightarrow{d}\ \frac{\frac{1}{2}(W^2(1)-1)}{(\int_0^1 W^2(\tau)\mathrm{d}\tau)^{1/2}}.$$

Daugiau detalių galima rasti Hamilton'o (1994) knygoje.

Tuo atveju, kai yra nagrinėjamas AR(1) modelis su nenuliniu vidurkiu, t. y.

$$X_t = \alpha + \rho X_{t-1} + Z_t,$$

ir $\alpha$ yra nežinomas, nagrinėjama hipotezė $H_0 : (\alpha, \rho) = (0, 1)$. Šiuo atveju, ribinis $n(\hat{\rho} - 1)$ yra sudėtingesnis.

Išplėstasis Dickey–Fuller'io testas. Tuo atveju, kai (15.1) modelyje triukšmai $Z_t$ yra *koreliuoti*, aukščiau aprašytas metodas netinka ir turi būti modifikuotas. Phillips'as ir Perron'as (1988) nagrinėjo paklaidas $Z_t$ pavidalo $Z_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j}$, kur $\varepsilon_t \sim \mathrm{BT}(0, \sigma^2)$ ir pasiūlė būdą kaip modifikuoti minėtą $t$-statistiką.

Kitas kelias, pasiūlytas Dickey ir Fuller'io (1979), yra vadinamasis išplėstasis Dickey–Fuller'io testas (angl. Augmented Dickey–Fuller, ADF) testas. Jo esmė – įtraukti į modelį $\Delta X_t = (\rho - 1)X_{t-1} + Z_t$ ankstinius $\Delta X_{t-1}, \dots, \Delta X_{t-p}$:

$$\Delta X_t = (\rho - 1)X_{t-1} + \sum_{j=1}^{p}\rho_i \Delta X_{t-j} + Z_t, \quad Z_t \sim \mathrm{BT}(0, \sigma^2).$$

Vėl, panašiai, galima sudaryti atitinkamą $t$-statistiką ir gauti jos asimptotiką (žr. Hamilton (1994)). $p$ parinkimui dažniausiai naudojami informaciniai kriterijai.

*15.1* PRATIMAS. Įrodykite (15.7) sąryšį.

# 16 Daugiamačiai laiko eilučių modeliai

## 16.1 Daugiamatės stacionarios sekos

Dažnai stebimų laiko eilučių duomenys yra daugiamačiai, t. y. vienu metu stebimas ne vienas dydis, o vektorius. Tuomet tokius stebėjimus tenka aprašyti daugiamačiais laiko eilučių modeliais. Laikykime, kad $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra $k$-matė atsitiktinė seka, $X_t = (X_{t1}, \dots, X_{tk})'$. Tokioje sekoje $X_t$ yra priklausomi ne tik pagal $t$, bet dažniausiai turi tam tikrą priklausomybės struktūrą ir tarp komponenčių $X_{ti}$ ir $X_{tj}$, $i \neq j$. Kitaip nei vienamačių laiko eilučių atveju, čia iškyla stebėjimų dimensijos problema (didelis skaičius vertinamų parametrų), modelio identifikuojamumo problema, vienetinės šaknies nusakymo problema ir kitos.

Pirmiausia nusakysime pagrindines sąvokas. Atsitiktinės sekos $\{X_t = (X_{t1}, \dots, X_{tk})'\}$ (tariame, kad egzistuoja baigtiniai antrieji momentai) vidurkių vektoriumi laiko momentu $t \in \mathbb{Z}$ vadinsime

$$\mu_t = \mathrm{E}X_t = (\mathrm{E}X_{t1}, \dots, \mathrm{E}X_{tk})'.$$

Be to, bet kuriems $t, h \in \mathbb{Z}$ apibrėžkime kovariacinę matricą

$$\Gamma(t+h,t) = \mathrm{E}(X_{t+h}-\mu_{t+h})(X_t-\mu_t)' = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(t+h,t) & \dots & \gamma_{1k}(t+h,t) \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{k1}(t+h,t) & \dots & \gamma_{kk}(t+h,t) \end{pmatrix};$$

čia $\gamma_{ij}(t+h,t) = \mathrm{Cov}(X_{t+h,i}, X_{t,j})$.

**16.1 apibrėžimas.** Sakysime, kad atsitiktinė $k$-matė seka $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra stacionari, jei vidurkių vektoriai $\mu_t$ ir kovariacinės matricos $\Gamma(t+h,t)$ nepriklauso nuo $t$. Tokiu atveju žymėsime

$$\mu := \mathrm{E}X_t, \quad \Gamma(h) := \mathrm{E}(X_{t+h}-\mu_{t+h})(X_t-\mu_t)'.$$

Stacionarios sekos koreliacinės matricos apibrėžiamos lygybe

$$R(h) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(h) & \dots & \rho_{1k}(h) \\ \vdots & & \vdots \\ \rho_{k1}(h) & \dots & \rho_{kk}(h) \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{Z};$$

čia

$$\rho_{ij}(h) = \mathrm{Corr}(X_{t+h,i}, X_{t,j}) = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sqrt{\gamma_{ii}(0)\gamma_{jj}(0)}}.$$

Nesunku įsitikinti šiomis kovariacinės matricos savybėmis:

- $\Gamma(h) = (\Gamma(-h))'$;
- $|\gamma_{ij}(h)| \leqslant \sqrt{\gamma_{ii}(0)\gamma_{jj}(0)}$;
- $\Gamma(\cdot)$ yra neneigiamai apibrėžta:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i' \Gamma(i-j) a_j \geqslant 0$$

visiems $n \geqslant 1$ ir $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^k$.

## 16.2 Vektorinis ARMA procesas

**16.2 apibrėžimas.** $k$-matė stacionari seka $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ vadinama balto triukšmo seka su parametrais 0 ir $\Sigma$, jeigu $\mathrm{E}Z_t = 0$ ir

$$\Gamma(h) = \begin{cases} \Sigma, & h = 0, \\ 0, & h \neq 0. \end{cases}$$

Žymėsime $Z_t \sim \mathrm{BT}(0, \Sigma)$.

**16.3 apibrėžimas.** $k$-matis procesas $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ vadinamas (vektoriniu) autoregresijos–slenkamojo vidurkio procesu, jeigu $\{X_t\}$ yra stacionarus ir su visais $t$

$$X_t - \Phi_1 X_{t-1} - \ldots - \Phi_p X_{t-p} = Z_t + \Theta_1 Z_{t-1} + \ldots + \Theta_q Z_{t-q}; \qquad (16.1)$$

čia $Z_t \sim \mathrm{BT}(0, \Sigma)$. Tokią seką žymėsime VARMA$(p, q)$.

(16.1) lygybę galima užrašyti trumpiau:

$$\Phi(B) X_t = \Theta(B) Z_t, \quad t \in \mathbb{Z};$$

čia

$$\Phi(z) = I - \Phi_1 z - \ldots - \Phi_p z^p, \quad \Theta(z) = I + \Theta_1 z + \ldots + \Theta_q z^q$$

yra matriciniai daugianariai, $B$ yra postūmio operatorius, t. y. $B^j X_t = X_{t-j}$.

Panašiai, kaip vienamačiu atveju galima apibrėžti kauzalumo ir apgręžiamumo sąvokas.

**16.4 apibrėžimas.** VARMA$(p,q)$ procesas, apibrėžtas (16.1) lygtimis, vadinamas *kauzaliu*, jeigu egzistuoja tokia absoliučiai sumuojama seka $\{\Psi_j, j \geqslant 0\}$ (t. y. atitinkami matricų $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \dots$ elementai sudaro absoliučiai sumuojamą seką), kad

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j Z_{t-j},\ t \in \mathbb{Z}.$$

Matricas $\Psi_j, j \geqslant 0$ galima apskaičiuoti iš rekurentinių sąryšių

$$\Psi_0 = I,\ \Psi_j = \Theta_j + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i \Psi_{j-i},\ j \geqslant 1,$$

čia $\Theta_j = 0$ su $j > q$, $\Phi_j = 0$ su $j > p$ ir $\Psi_j = 0$ su $j < 0$.

Yra žinoma, kad VARMA proceso kauzalumas yra ekvivalentus reikalavimui

$$\det(\Phi(z)) \neq 0 \quad \text{su visais} \quad |z| \leqslant 1.$$

**16.5 apibrėžimas.** VARMA$(p,q)$ procesas, apibrėžtas (16.1) lygtimis, vadinamas *apgręžiamu*, jeigu egzistuoja tokia absoliučiai sumuojama seka $\{\Pi_j, j \geqslant 0\}$, kad

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j X_{t-j},\ t \in \mathbb{Z}.$$

Matricas $\Pi_j, j \geqslant 0$ galima apskaičiuoti iš rekurentinių sąryšių

$$\Pi_0 = I,\ \Pi_j = -\Phi_j - \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i \Pi_{j-i},\ j \geqslant 1,$$

čia $\Phi_j = 0$ su $j > p$, $\Theta_j = 0$ su $j > q$ ir $\Pi_j = 0$ su $j < 0$.

VARMA proceso apgręžiamumas yra ekvivalentus reikalavimui

$$\det(\Theta(z)) \neq 0 \quad \text{su visais} \quad |z| \leqslant 1.$$

*16.1* PAVYZDYS. Nagrinėkime VAR(1) seką

$$X_t = \Phi_1 X_{t-1} + Z_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{16.2}$$

Jei $\det(I - \Phi_1 z) \neq 0$, $|z| \leqslant 1$ (arba, ekvivalenčiai, matricos $\Phi_1$ tikrinės reikšmės moduliu mažesnės už 1), tai, panašiai kaip AR(1) atveju, gauname

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_1^j Z_{t-j}.$$

Taigi, toks procesas yra kauzalus ir $\Psi_j = \Phi_1^j$. Kovariacinė matrica lygi

$$\Gamma(h) = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_1^{j+h} \Sigma (\Phi_1^j)'.$$

Identifikuojamumas. Tarkime, (16.1) modelyje $k = 2$, $p = 1$, $q = 1$, t. y.

$$X_t - \Phi_1 X_{t-1} = Z_t + \Theta_1 Z_{t-1}$$

su $\Phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha + \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Theta_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Toks modelis yra kauzalus (nes $\det(I - \Phi_1 z) = 1 \neq 0$) ir

$$\begin{aligned} X_t &= (I - \Phi_1 B)^{-1}(I + \Theta_1 B) Z_t \\ &= (I + \Phi_1 B)(I + \Theta_1 B) Z_t \\ &= (I + (\Phi_1 + \Theta_1) B + \Phi_1 \Theta_1 B^2) Z_t \\ &= Z_t + \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Z_{t-1}, \end{aligned}$$

nes $\Phi_1^j = 0$, $j \geqslant 2$ ir $\Phi_1 \Theta_1 = 0$. Taigi, VMA(1) modeliui

$$X_t = Z_t + \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Z_{t-1}$$

gauname be galo daug VARMA(1,1) reprezentacijų. Matome, kad daugiamačiu atveju ne visada iš VMA($\infty$) reprezentacijos galima vienareikšmiškai atstatyti VARMA modelį.

## 16.3 Vektorinis AR procesas

Toliau nagrinėkime $k$-matį VAR($p$) modelį:

$$X_t = \nu + \Phi_1 X_{t-1} + \cdots + \Phi_p X_{t-p} + Z_t, \quad Z_t \sim \mathrm{BT}(0, \Sigma),$$

čia $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k)'$. Šio modelio savybes patogu nagrinėti, pirmiausia jį suvedant į VAR(1) pavidalą.

Pažymėkime

$$\widetilde{X}_t := \begin{pmatrix} X_t \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-p+1} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\nu} := \begin{pmatrix} \nu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{Z}_t := \begin{pmatrix} Z_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ir

$$\widetilde{\Phi} := \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \ldots & \Phi_{p-1} & \Phi_p \\ I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & I & 0 \end{pmatrix}$$

Čia $\widetilde{X}_t$, $\widetilde{\nu}$, $\widetilde{Z}_t$ turi dimensiją $kp \times 1$, o $\widetilde{\Phi}$ – $kp \times kp$. Įvedę pastaruosius žymenis, pradinį VAR($p$) modelį galime perrašyti VAR(1) pavidalu

$$\widetilde{X}_t \ = \ \widetilde{\nu} + \widetilde{\Phi}\widetilde{X}_{t-1} + \widetilde{Z}_t.$$

Šis VAR(1) modelis yra kauzalus tada ir tik tada (žr. 16.1 pavyzdį), kai

$$\det(I_{kp} - \widetilde{\Phi} z) \neq 0, \quad |z| \leqslant 1$$

ir tokiu atveju $\widetilde{X}_t$ gali būti užrašytas begalinės eilės vektoriniu slenkamojo vidurkio pavidalu:

$$\widetilde{X}_t = \widetilde{\mu} + \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{\Phi}^j \widetilde{Z}_{t-j}$$

su vidurkių vektoriumi $\widetilde{\mu} := (I_{kp} - \widetilde{\Phi})^{-1}\widetilde{\nu}$ ir kovariacine matrica

$$\widetilde{\Gamma}(h) = \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{\Phi}^{j+h}\widetilde{\Sigma}(\widetilde{\Phi}^j)', \quad \text{kur} \quad \widetilde{\Sigma} := \mathrm{E}\widetilde{Z}_t\widetilde{Z}_t'.$$

Naudojant paprastą algebrą, nesunku įrodyti, kad

$$\det(I_{kp} - \widetilde{\Phi} z) = \det(I_k - \Phi_1 z - \cdots - \Phi_p z^p). \tag{16.3}$$

Vadinasi, VAR($p$) yra kauzalus tada ir tik tada, kai

$$\det(I_k - \Phi_1 z - \cdots - \Phi_p z^p) \neq 0 \text{ su visais } |z| \leqslant 1.$$

Norint iš VAR(1) reprezentacijos atstatyti $X_t$ charakteristikas, tereikia pasinaudoti sąryšiu $X_t = J\widetilde{X}_t$, kur $J := (I_k, 0, \ldots, 0)$ yra $k \times kp$ matrica. Tada

$$\mu = J\mathrm{E}\widetilde{X}_t = J\widetilde{\mu}, \quad \Gamma(h) = J\widetilde{\Gamma}(h)J'$$

ir, kadangi $J'J\widetilde{Z}_t = \widetilde{Z}_t$, $J\widetilde{Z}_t = Z_t$, tai

$$\begin{aligned} X_t &= J\widetilde{X}_t = J\widetilde{\mu} + \sum_{j=0}^{\infty} J\widetilde{\Phi}^j \widetilde{Z}_{t-j} \\ &= \mu + \sum_{j=0}^{\infty} J\widetilde{\Phi}^j J'J\widetilde{Z}_{t-j} \\ &= \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j Z_{t-j}. \end{aligned}$$

Taigi, VAR($p$) skleidinio $X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j Z_{t-j}$ koeficientai $\Psi_j$, $j \geqslant 0$, gali būti randami iš formulių $\Psi_j = J\widetilde{\Phi}^j J'$. (Čia, kadangi $\widetilde{\Phi}^j$ yra absoliučiai sumuojamos, tai ir $\Psi_j$ yra absoliučiai sumuojamos.)

*16.1* PRATIMAS. Patikrinkite (16.3) lygybę.

# Literatūra


Anderson, T. W. (1971). *The Statistical Analysis of Time Series.* Wiley, New York.

Billingsley, P. (1999). *Convergence of Probability Measures*, 2nd edn. Willey, New York.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, **31,** 307–327.

Box, G. E. P. and Pierce, D. A. (1970). Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models. *Journal of the American Statistical Association*, **65,** 1509–1526.

Brockwell, P. J. and Davis, R. A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*, Second edn. Springer-Verlag, New York.

Brockwell, P. J. and Davis, R. A. (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting*, Second edn. Springer-Verlag, New York.

Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, **74,** 427–431.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, **50,** 987–1008.

Francq, C. and Zakoïan, J.-M. (2010). *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications.* Wiley, New York.

Giraitis, L., Kokoszka, P. and Leipus, R. (2000). Stationary ARCH models: dependence structure and Central Limit Theorem. *Econometric Theory*, **16,** 3–22.

Giraitis, L., Koul, H. L. and Surgailis, D. (2012). *Large Sample Inference for Long Memory Processes.* Imperial College Press, London.

Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

He, C. and Teräsvirta, T. (1999). Fourth moment structure of the GARCH($p, q$) process. *Econometric Theory*, **15,** 824–846.

Ljung, G. M. and Box, G. E. P. (1978). On a measure of a lack of fit in time series models. *Biometrika*, **65,** 297–303.

Lobato, I. N. and Savin, N. E. (1998). Real and spurious long-memory properties of stock-market data (with comments). *Journal of Business & Economic Statistics*, **16,** 261–283.

Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, **36,** 394–419.

Nelson, C. R. and Plosser, C. (1982). Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications. *Journal of Monetary Economics*, **10,** 139–162.

Nelson, D. B. (1990). Stationarity and persistence in the GARCH$(1, 1)$ model. *Econometric Theory*, **6,** 318–334.

Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Econometrica*, **59,** 347–370.

Nelson, D. B. and Cao, C. Q. (1992). Inequality constraints in the univariate GARCH model. *Journal of Business & Economic Statistics*, **10,** 229–235.

Phillips, P. C. B. and Perron, P. (1988). Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika*, **75,** 335–346.

Taylor, S. (1986). *Modelling Financial Time Series*. Wiley, New York.

Teräsvirta, T. (1996). Two stylized facts and the GARCH(1,1) model. Stockholm School of Economics. SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance, No. 96.

Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd edn. Wiley, New York.

Woodward, W. A., Gray, H. L. and Elliott, A. C. (2012). *Applied Time Series Analysis*. CRC Press, Boca Raton, London, New York.