VILNIAUS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Vilijandas Bagdonavičius

Julius Jonas Kruopis

MATEMATINĖ STATISTIKA

4 dalių vadovėlis

I dalis. PARAMETRINĖ STATISTIKA
II dalis. TIESINIAI MODELIAI
III dalis. NEPARAMETRINĖ STATISTIKA
IV dalis. DAUGIAMATĖ STATISTIKA

Vilniaus universiteto leidykla
2015

UDK 519.2(075.8)

Apsvarstė ir rekomendavo spausdinti Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto taryba (2015 m. vasario 17 d.; protokolas Nr 3); vadovėlio statusą suteikė Vilniaus universiteto Senatas (2015 m. balandžio 21 d. nutarimas Nr. S – 2015 – 4 –12).

Recenzavo:
prof. habil. dr. Algimantas Bikelis (Vytauto Didžiojo universitetas),
prof. habil. dr. Kęstutis Dučinskas (Klaipėdos universitetas)

ISBN 978–609–459–519–6

Pratarmė

Matematinė statistika – mokslas apie informacijos rinkimą, sisteminimą, analizavimą ir analizės rezultatų interpretavimą. Sunku nurodyti tokią mokslo ar praktinės veiklos sritį, kurioje nebūtų taikomi tikimybių teorijos ir matematinės statistikos metodai.

Iki šiol pasigendama lietuviško pakankamos apimties matematinės statistikos vadovėlio, kuriame būtų ne tik pateikta daug matematinės statistikos faktų, bet ir duodami jų įrodymai. Populiariame V. Čekanavičiaus ir G. Murausko vadovėlyje [7] akcentuojami taikomieji matematinės statistikos aspektai. Be to, jis skirtas nematematinių specialybių studentams. Prof J. Kubiliaus vadovėlyje [11] dėstoma tikimybių teorija, o matematinės statistikos medžiagos mažoka. J. Kruopio vadovėlis [10] sudarytas kaip žinynas – jame pateikiama gana daug matematinės statistikos faktų, tačiau be jų įrodymo. Iš pastaruoju metu išleistų vadovėlių užsienio kalbomis rekomenduojame [3], [6], [8], [9], [16], [17], [18]. Kad galėtų naudotis vadovėliu, studentas turėtų būti išklausęs universitetinių programų apimties bendruosius matematikos kursus ir vadovėlio [11] apimties tikimybių teorijos kursą. Kai kurie dažniau naudojami tikimybių teorijos ir tiesinės algebros faktai pateikiami prieduose.

Vadovėlis skiriamas Lietuvos aukštųjų mokyklų bakalauro ir magistro studijų studentams, kurie specializuojasi matematinės statistikos ir jos taikymų srityje. Pateikiama medžiaga apima daug nusistovėjusių matematinės statistikos faktų ir naudojamų metodų. Manome, kad jaunasis specialistas, perpratęs vadovėlyje pateikiamas bazines matematinės statistikos žinias, sugebės savarankiškai gilintis į šią sritį ir sėkmingai vykdyti mokslinius tyrimus arba pritaikyti įgytas žinias ir gebėjimus spręsdamas įvairiose mokslo ar praktinės veiklos srityse kylančias problemas. Iš dalies vadovėliu galės naudotis ir kitų matematinės pakraipos specialybių studentai.

Visa apimtimi vadovėlio medžiaga galėtų būti dėstoma keturių semestrų kurse ir yra suskaidyta į 4 dalis. Pirmojoje dalyje nagrinėjami parametriniai statistiniai modeliai, antrojoje — svarbūs taikomuoju aspektu tiesiniai modeliai (dispersinė ir regresinė analizė). Trečioji dalis skiriama neparametriniams, o ketvirtoji — daugiamačiams statistiniams modeliams nagrinėti.

Dėstydami medžiagą stengėmės, kad pagrindiniai pateikiami faktai būtų įrodomi, tačiau vengiant nereikalingo formalizavimo. Pateikiama daug iliustracinių pavyzdžių ir pratimų savarankiškam darbui.

Vadovėlis parengtas remiantis paskaitomis, skaitytomis Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto statistikos studijų programos studentams. Jau daug metų šios studijų programos studentai galėjo naudotis vadovėlio rankraščiu, ir jų pastabos ir siūlymai prisidėjo, kad pateikiama medžiaga būtų lengviau suvokiama ir perprantama.

Autoriai dėkoja vadovėlio recenzentams prof. Algimantui Bikeliui ir prof. Kęstučiui Dučinskui už vertingus patarimus ir pastabas. Taip pat nuoširdi padėka kolegoms – Vilniaus universiteto Matematinės statistikos katedros darbuotojams prof. V. Kazakevičiui, doc. P. Vaitkui, doc. R. Eidukevičiui, su kuriais buvo reguliariai aptariama vadovėlio medžiaga, o ypač kolegei doc. R. Levulienei, kuri įdėjo daug darbo sprędama pateikiamus pavyzdžius ir pratimus bei sukurdama reikalingas programas.

Skaitytojams būsime dėkingi už pastabas ir komentarus, kuriuos prašome siųsti elektroniniu paštu <*vilijandas.bagdonavicius@mif.vu.lt*> arba <*julius.kruopis@mif.vu.lt*>.

Autoriai

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Vilijandas Bagdonavičius

Julius Jonas Kruopis

MATEMATINĖ STATISTIKA

Vadovėlis

I DALIS

PARAMETRINĖ STATISTIKA

Vilniaus universiteto leidykla
2015

UDK 519.2(075.8)

Apsvarstė ir rekomendavo spausdinti Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto taryba (2015 m. vasario 17 d.; protokolas Nr 3); vadovėlio statusą suteikė Vilniaus universiteto Senatas (2015 m. balandžio 21 d. nutarimas Nr. S – 2015 – 4 –12).

Recenzavo:
prof. habil. dr. Algimantas Bikelis (Vytauto Didžiojo universitetas),
prof. habil. dr. Kęstutis Dučinskas (Klaipėdos universitetas)

ISBN 978–609–459–515–8

Turinys

Pirmosios dalies pratarmė

Pirmojoje vadovėlio dalyje matematinės statistikos uždaviniai sprendžiami remiantis parametriniais statistiniais modeliais. Tariama, kad imties skirstinys yra žinomo pavidalo, tačiau priklauso nuo baigtinio matavimo nežinomo parametro. Todėl matematinės statistikos uždaviniai gali būti suformuluoti šių nežinomų parametrų terminais. Tradiciškai matematinė statistika pradedama dėstyti nuo parametrinių modelių. Tokių modelių analizė yra paprastesnė ir studentų lengviau perprantama. Didesnė dalis šios vadovėlio dalies medžiagos atspausdinta knygoje [2].

Pirmajame skyriuje pateikiamos pagrindinės sąvokos, apibrėžiamas statistinis modelis, suformuluojami pagrindiniai matematinės statistikos uždaviniai.

Antrajame skyriuje apibrėžiami statistinio modelio teorinių charakteristikų (pasiskirstymo funkcijos, tankio, momentų, kvantilių) empiriniai analogai ir nagrinėjamos jų savybės.

Trečiajame skyriuje randami nežinomų parametrų taškiniai ir intervaliniai įvertiniai. Pateikiama įvertinių klasifikacija. Remiantis pakankamųjų ir pilnųjų statistikų sąvokomis iliustruojamas optimalių (NMD) įvertinių radimas. Tačiau tokie įvertiniai egzistuoja palyginti retai. Skyrelyje 3.5 pateikiami bendresni momentų ir didžiausiojo tikėtinumo (DT) metodai įvertiniams rasti. Daugiausia šiame skyriuje aptariamas DT metodas ir juo remiantis gautų įvertinių savybės. Skyrelyje 3.7 pateikiami dažniausiai naudojamų skirstinių taškiniai ir intervaliniai parametrų įvertiniai.

Ketvirtasis skyrius skirtas parametrinių hipotezių dėl nežinomų parametrų reikšmių tikrinimo kriterijams kurti. Apibrėžiami tolygiai galingiausieji (TG) ir tolygiai galingiausieji nepaslinktieji (TGN) kriterijai. Sukurti TG arba TGN kriterijai kai kurioms hipotezėms eksponentinio tipo skirstinių šeimų atveju. Bendresniu atveju taikytinas 4.6 skyrelyje pateiktas tikėtinumų santykio kriterijus. Skyrelyje 4.7 pateikta parametrinių hipotezių tikrinimo kriterijų pavyzdžių dažniausiai naudojamų skirstinių atveju.

Dėstoma medžiaga iliustruojama konkrečiais pavyzdžiais. Kiekvieno skyrelio pabaigoje pateikiama pratimų savarankiškam darbui.

Knygos skyriai skirstomi į skyrelius. Kiekviename skyrelyje teoremos, apibrėžimai, pavyzdžiai, formulės numeruojamos trimis indeksais: skyriaus, skyrelio ir eilės numeriu skyrelyje.

Autoriai

Trumpiniai ir žymenys

A. d. — atsitiktinis dydis;
n. a. d. — nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai;
a. v. — atsitiktinis vektorius;
n. a. v. — nepriklausomi atsitiktiniai vektoriai;
TG — tolygiai galingiausias (kriterijus);
TGN — tolygiai galingiausias nepaslinktasis (kriterijus);
DT — didžiausiojo tikėtinumo (funkcija, metodas, įvertinys);
ASE — asimptotinis santykinis efektyvumas (įvertinių, kriterijų);
$X,\ Y,\ Z, \ldots$ — atsitiktiniai dydžiai;
$\mathbf{X},\ \boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{Z}, \ldots$ — atsitiktiniai vektoriai;
$\mathbf{X}^T$ — transponuotas vektorius, t. y. vektorius – eilutė;
α_k — pradinis k-osios eilės momentas;
μ_k — centrinis k-osios eilės momentas;
γ_1 — asimetrijos koeficientas;
γ_2 — eksceso koeficientas;
$x(P)$ — P-asis kvantilis;
x_P — P-oji kritinė reikšmė;
$\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]_{k\times k}$ — kovariacijų matrica;
$\boldsymbol{\rho} = [\rho_{ij}]_{k\times k}$ — koreliacijos koeficientų matrica;
$\mathbf{P}\{A\}$ — įvykio A tikimybė;
$\mathbf{P}\{A|B\}$ — įvykio A sąlyginė tikimybė;
$\mathbf{P}_\theta\{A\}$, $\mathbf{P}\{A|\theta\}$ — tikimybė, priklausanti nuo parametro θ;
$F_\theta(x),\ F(x;\ \theta),\ F(x|\theta)$ — pasiskirstymo funkcija, priklausanti nuo parametro θ (analogiškai tankio funkcijai);
$\mathbf{E}X$ — a. d. X vidurkis;
$\boldsymbol{V}X$ — a. d. X dispersija;
$\mathbf{E}_\theta(X),\ \mathbf{E}(X|\theta),\ \boldsymbol{V}_\theta(X),\ \boldsymbol{V}(X|\theta)$ — a. d. X vidurkis ar dispersija, priklausantys nuo parametro θ;
$\mathbf{E}(\mathbf{X})$ — a. v. $\mathbf{X}$ vidurkių vektorius;
$\boldsymbol{V}(\mathbf{X})$ — a. v. $\mathbf{X}$ kovariacijų matrica;
$\mathbf{Cov}\,(X,\ Y)$ — a. d. X ir Y kovariacija;
$\mathbf{Cov}\,(\mathbf{X},\ \boldsymbol{Y})$ — a. v. $\mathbf{X}$ ir $\boldsymbol{Y}$ kovariacijų matrica;
$B(n,\ p)$ — binominis skirstinys su parametrais n ir p;
$B^-(n,\ p)$ — neigiamasis binominis skirstinys su parametrais n ir p;
$\mathcal{P}(\lambda)$ — Puasono skirstinys su parametru λ;
$H(N,\ M,\ n)$ — hipergeometrinis skirstinys su parametrais N, M ir n;
$N(0,\ 1)$ — standartinis normalusis skirstinys;
$N(\mu,\ \sigma^2)$ — normalusis skirstinys su parametrais μ ir σ^2;
$LN(\mu,\ \sigma)$ — lognormalusis skirstinys su parametrais μ ir σ;
$K(\mu,\ \sigma)$ — Koši skirstinys su parametrais μ ir σ;

$\mathcal{E}(\lambda)$ — eksponentinis skirstinys su parametru λ;
$\mathcal{E}(\alpha,\ \lambda)$ — paslinktasis eksponentinis skirstinys su parametrais α ir λ;
$G(\lambda,\ \eta)$ — gama skirstinys su parametrais λ ir η;
$W(\theta,\ \nu)$ — Veibulo skirstinys su parametrais θ ir ν;
$Pa(\alpha,\ \theta)$ — Pareto skirstinys su parametrais α ir θ;
$Be(\gamma,\ \eta)$ — beta skirstinys su parametrais γ ir η;
$U(\alpha,\ \beta)$ — tolygusis skirstinys intervale $(\alpha,\ \beta)$;
$\chi^2(n)$ — chi kvadrato skirstinys su n laisvės laipsnių;
$\chi^2(n;\ \delta)$ — necentrinis chi kvadrato skirstinys su n laisvės laipsnių ir necentriškumo parametru δ;
$S(n)$ — Stjudento skirstinys su n laisvės laipsnių;
$S(n;\ \delta)$ — necentrinis Stjudento skirstinys su n laisvės laipsnių ir necentriškumo parametru δ;
$F(m,\ n)$ — Fišerio skirstinys su m ir n laisvės laipsnių;
$F(m,\ n;\ \delta)$ — necentrinis Fišerio skirstinys su m ir n laisvės laipsnių ir necentriškumo parametru δ;
z_α — standartinio normaliojo skirstinio α kritinė reikšmė;
$t_\alpha(n)$ — Stjudento skirstinio su n laisvės laipsnių α kritinė reikšmė;
$\chi^2_\alpha(n)$ — chi kvadrato skirstinio su n laisvės laipsnių α kritinė reikšmė;
$F_\alpha(\mathrm{m, n})$ — Fišerio skirstinio su m ir n laisvės laipsnių α kritinė reikšmė;
$\mathcal{P}_k(n,\ \boldsymbol{\pi})$ — k-matis polinominis skirstinys su parametrais n ir $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, ..., \pi_k)^T$, $\pi_1 + ... + \pi_k = 1$;
$H_k(N,\ \boldsymbol{M},\ n)$ — k-matis hipergeometrinis skirstinys su parametrais N, $\boldsymbol{M} = (M_1, ..., M_k)^T$ ir n;
$N_k(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma})$ — k-matis normalusis skirstinys su vidurkių vektoriumi $\boldsymbol{\mu}$ ir kovariacijų matrica $\boldsymbol{\Sigma}$;
$X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$ — a. d. X, pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį su parametrais μ ir σ^2 (analogiškai kitų skirstinių atveju);
$X_n \xrightarrow{P} X$ — konvergavimas pagal tikimybę $(n \to \infty)$;
$X_n \xrightarrow{b.t.} X$ — konvergavimas su tikimybe 1 arba beveik tikrai $(n \to \infty)$;
$X_n \xrightarrow{kv.v.} X$ — konvergavimas pagal kvadratinį vidurkį $(n \to \infty)$;
$X_n \xrightarrow{d} X$, $F_n(x) \xrightarrow{d} F(x)$ — konvergavimas pagal pasiskirstymą (silpnasis; $n \to \infty$);
$X_n \xrightarrow{d} X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$ — a. d. X_n asimptotiškai $(n \to \infty)$ turi normalųjį skirstinį su parametrais μ ir σ^2;
$X_n \sim Y_n$ — a. d. X_n ir Y_n asimptotiškai $(n \to \infty)$ ekvivalentūs $(X_n - Y_n \xrightarrow{P} 0)$;
$||\boldsymbol{x}||$ — kai $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_k)^T$ yra vektorius, reiškia atstumą $(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x})^{1/2} = (\sum_i x_i^2)^{1/2}$;
$||\boldsymbol{A}||$ — kai $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ yra matrica, reiškia $(\sum_i \sum_j a_{ij}^2)^{1/2}$;
$\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$ $(\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{B})$ — kai $\boldsymbol{A}$ ir $\boldsymbol{B}$ yra vienodos dimensijos kvadratinės matricos, reiškia, kad matrica $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ yra teigiamai (neneigiamai) apibrėžta.

1 skyrius

Matematinės statistikos objektas

Matematinė statistika nagrinėja eksperimentų planavimo, duomenų rinkimo, sisteminimo, analizės ir interpretavimo metodus. Jos tikslas – rasti optimalias sprendimų priėmimo taisykles esant neapibrėžtumo situacijai, t. y. kai stebėjimų duomenys yra atsitiktinių dydžių, vektorių ar procesų realizacijos.

1.1. Statistiniai duomenys. Imtis

Statistiniai duomenys gaunami iš aplinkos, matuojant kokios nors objektų aibės (populiacijos) elementų įvairių požymių skaitines reikšmes.

Daug matuojamų charakteristikų, susijusių su įvairiomis populiacijomis, aprašomos atsitiktiniais dydžiais. Pavyzdžiui, žmonių, kuriems atliekama tam tikra operacija, gyvenimo trukmė, tam tikro tipo dirvožemių derlingumas, defektinių gaminių gamyklos produkcijoje kiekis ir kita.

Praktiškai tikimybiniai šių dydžių skirstiniai (t. y. jų reikšmių pasiskirstymas visoje populiacijoje) nežinomi, bet dažnai, remiantis pirmiau sukauptų eksperimentų duomenimis ar fizine tų dydžių prasme, tariama, kad šie skirstiniai iš dalies žinomi, pavyzdžiui, priklauso konkrečių skirstinių (eksponentinių, normaliųjų, Puasono) šeimai, kurios parametrai nežinomi.

Norint daugiau sužinoti apie skirstinius, matuojamos populiacijos objektų požymių, turinčių šį skirstinį, reikšmės. Dažniausiai visos populiacijos neįmanoma ištirti, todėl iš jos imama tik dalis objektų. Atkreipsime dėmesį, kad, parinkus populiacijos objektą, prieš matavimą tiriamos charakteristikos reikšmė nežinoma, todėl ją galima interpretuoti kaip atsitiktinio dydžio realizaciją.

Paprasčiausiais atvejais atliekama n eksperimentų ir matuojamos (nebūtinai tiesiogiai) nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių (n. v. p.) atsitiktinių dydžių $X_1, \dots, X_n$ įgytos reikšmės $x_1, \dots, x_n$. Pavyzdžiui, jei tiriamos didelės televizorių populiacijos funkcionavimo trukmės charakteristikos, stebima n gaminių ir matuojamos jų funkcionavimo trukmių reikšmės $x_1, \ldots, x_n$, kurios gali būti interpretuojamos kaip n nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių $X_1, \ldots, X_n$ realizacijos.

Kitas pavyzdys: atliekama n gaminių techninė kontrolė. Jei gaminys netenkina tam tikrų sąlygų, sakoma, kad jis defektinis. Tarkime, kad a. d. X_i lygus 1, jei i-asis gaminys defektinis, ir lygus 0, jei ne. Galima sakyti, kad kontrolės metu nustatytos atsitiktinių dydžių $X_1, \ldots, X_n$ reikšmės $x_1, \ldots, x_n$. Šio eksperimento metu neatliekami tiesioginiai a. d. X_i reikšmių matavimai.

1.1.1 apibrėžimas. Vienodai pasiskirsčiusių nepriklausomų atsitiktinių dydžių vektorius
$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$$
vadinamas *paprastąja imtimi*, o jo per eksperimentą įgytoji reikšmė
$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$$
vadinama *paprastosios imties realizacija*. Realizacijos elementas x_i vadinamas a. d. X_i *stebiniu*. Taigi imties realizaciją sudaro stebinių vektorius.

Kai atliekami sudėtingesni eksperimentai, gali būti stebimi nevienodai pasiskirstę ir galbūt priklausomi atsitiktiniai dydžiai.

1.1.1 pavyzdys. Stebima n padangų skirtingomis sąlygomis, kurias apibūdina tam tikrų kintamųjų (kovariančių) vektorius. Tie kintamieji gali būti: pagaminimo data, eksploatavimo sąlygos, sunkvežimio svoris, kelio kokybė, meteorologinės sąlygos ir pan., aptarnavimo ir remonto taisyklės.

Padangų darbo trukmės $X_1, \ldots, X_n$ yra nevienodai pasiskirsčiusios (sudėtingesnėmis sąlygomis naudojamų padangų darbo trukmė turi tendenciją įgyti mažesnes reikšmes). Taigi stebimos atsitiktinio vektoriaus su nevienodai pasiskirsčiusiomis koordinatėmis realizacijos.

1.1.2 pavyzdys. Turime baigtinę N objektų, iš kurių M turi savybę A, aibę. Atsitiktinai negrąžindami imame n objektų. Tarkime, kad $X_i = 1$, jei i-asis objektas turi savybę A, $X_i = 0$, jei ne. Tada atsitiktinio vektoriaus $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ koordinatės yra priklausomi atsitiktiniai dydžiai, nes įvykio $\{X_i = 1\}$ tikimybė priklauso nuo a. d. $X_1, \ldots, X_{i-1}$ įgytų reikšmių.

1.1.2 apibrėžimas. Atsitiktinis vektorius $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ vadinamas *imtimi*, o jo per eksperimentą įgyta reikšmė $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – *imties realizacija* (stebinių vektorius).

Dažnai populiacijos objektai apibūdinami požymių vektoriumi $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_k)^T$. Jeigu atliekame n eksperimentų, kurių metu matuojamos a. v. $\mathbf{X}$ reikšmės, tai gauname atsitiktinių vektorių $\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n$ realizacijas $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n$.

1.1.3 apibrėžimas. Jungtinis vektorius $(\mathbf{X}_1^T, ..., \mathbf{X}_n^T)^T$ vadinamas *atsitiktinio vektoriaus* $\mathbf{X}$ *imtimi*, kurios didumas lygus n. Kai atsitiktiniai vektoriai $\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę kaip ir stebimasis a. v. $\mathbf{X}$, imtis vadinama *paprastąja atsitiktinio vektoriaus* $\mathbf{X}$ *imtimi*.

Galima nagrinėti ir dar bendresnes imtis, kai stebimos atsitiktinių procesų realizacijos.

1.2. Statistinių duomenų sisteminimas

Didelius nesusistemintus pradinių duomenų masyvus paprastai sunku interpretuoti, todėl pradiniame etape jie dažnai redukuojami, pateikiant vaizdžias charakteristikas, jų lenteles, grafikus. Gali būti pateikiamos įvairių nagrinėjamo požymio reikšmių dažnių lentelės, stebinių padėties, sklaidos charakteristikos, stulpelių, skritulinės, stačiakampės diagramos ir kt. Visa tai nagrinėja *aprašomoji statistika*. Aprašomojoje statistikoje daromos išvados tiktai apie turimos imties realizacijos reikšmių pasiskirstymą, bet nedaromos išvados apie visą populiaciją.

Skirtingai nuo aprašomosios statistikos, matematinė statistika nagrinėja duomenų statistinės analizės metodus, kai daromos išvados apie visos populiacijos tiriamų charakteristikų reikšmių pasiskirstymą.

Šiame vadovėlyje nagrinėjami matematinės statistikos metodai. Aprašomosios statistikos elementų galima rasti V. Čekanavičiaus ir G. Murausko [7] vadovėlyje.

1.3. Statistinis modelis

Statistinės išvados apie populiacijos charakteristikų pasiskirstymą daromos naudojantis imties $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ realizacija $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Tarkime, kad a. v. $\mathbf{X}$ apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Tada a. v. $\mathbf{X}$ mačiojoje erdvėje $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}^n)$ indukuoja tikimybinį matą $\mathbf{P}_{\boldsymbol{X}}$ (žr. [11], p. 83–84). Tai, kad a. v. $\mathbf{X}$ skirstinys nėra visiškai žinomas, apibūdinsime taip: tikimybinis matas $\mathbf{P}_{\boldsymbol{X}}$ priklauso nuo parametro $\boldsymbol{\theta}$, apie kurį žinoma tik tiek, kad jis priklauso aibei $\boldsymbol{\Theta}$. Gauname tikimybinių erdvių šeimą $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathbf{P}_{\boldsymbol{X}}(.|\boldsymbol{\theta})), \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, kurioje tikimybinis matas apibrėžtas visoms aibėms $B \in \mathcal{B}^n$:

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{X}}(B|\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\{\omega : \mathbf{X}(\omega) \in B|\boldsymbol{\theta}\}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}; \tag{1.3.1}$$

čia tikimybė yra įvykio $\{\mathbf{X} \in B\}$, kai žinoma fiksuota parametro $\boldsymbol{\theta}$ reikšmė iš aibės $\boldsymbol{\Theta}$. Dėl trumpumo tikimybinių skirstinių šeimą (1.3.1) dažnai žymėsime $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}},\ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$ arba $\mathbf{X} \sim \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}},\ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$.

Atsitiktinio vektoriaus $\mathbf{X}$ tikimybinį skirstinį nusako jo pasiskirstymo funkcija (žr. [11], p. 83–84), kuri taip pat priklauso nuo nežinomo parametro $\boldsymbol{\theta}$; žymėsime $F_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x})$ arba $F(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta},\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$.

1.3.1 apibrėžimas. Imties skirstinių šeima $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$ vadinama *statistiniu modeliu.* Žymėsime

$$\mathbf{X} \sim \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \quad \text{arba} \quad \mathbf{X} \sim F_{\boldsymbol{\theta}}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}. \tag{1.3.2}$$

Statistinis modelis nusako, kokios skirstinių klasės imties duomenis numatoma analizuoti. Pavyzdžiui, tiriant gaminių patikimumą, darbo laiko skirstinį galima modeliuoti tik nuo vieno parametro priklausančiu eksponentiniu skirstiniu, bet galima modeliuoti ir platesne klase Veibulo skirstinių, priklausančių nuo dviejų parametrų. Uždavinį galima spręsti ir imant visus tolydžiuosius skirstinius, sukoncentruotus intervale $(0, \infty)$.

Ar pasirinktas statistinis modelis tinka realiems duomenims, dažnai tenka tikrinti naudojantis imties realizacija. Jei mažai tikėtina, kad imtis gali įgyti reikšmę iš artimos gautai realizacijai aplinkos, tai tą modelį tenka koreguoti. Ir, atvirkščiai, jei duomenys neprieštarauja modeliui, tai išvados apie tiriamų požymių reikšmių pasiskirstymą populiacijoje daromos naudojantis tuo modeliu.

Jei tikimybinių matų šeima $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$ absoliučiai tolydi σ-baigtinio mato $\boldsymbol{\mu}$ atžvilgiu, t. y. egzistuoja jos tankis $f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$, tenkinantis sąlygą

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}(B) = \mathbf{P}_{\boldsymbol{X}}(B|\boldsymbol{\theta}) = \int\limits_B f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})$$

su visais $B \in \mathcal{B}^n$, tai šiuo atveju tikimybinį modelį žymėsime

$$\mathbf{X} \sim f_{\boldsymbol{\theta}}, \ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}. \tag{1.3.3}$$

Priminsime, jeigu a. v. $\mathbf{X}$ skirstinys yra absoliučiai tolydus, tai jį visai nusako tikimybinio tankio funkcija (Lebego mato atžvilgiu). Kai a. v. $\mathbf{X}$ diskretusis, tai jį visai nusako galimų reikšmių įgijimo tikimybės. Šias tikimybes galime interpretuoti kaip a. v. $\mathbf{X}$ skirstinio tankį skaičiuojančiojo mato atžvilgiu ([11], p. 89–93).

Jeigu imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji, tai atsitiktinio vektoriaus $\mathbf{X}$ koordinatės yra vienodai pasiskirstę nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Tada a. v. $\mathbf{X}$ tikimybinis modelis yra n nepriklausomų eksperimentų modelis. Tiksliau, tikimybinė erdvė $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathbf{P}_{\boldsymbol{X}}(.|\boldsymbol{\theta}))$ yra atsitiktinių dydžių $X_1, ..., X_n$ indukuotų tikimybinių erdvių $(\mathbf{R}, \mathcal{B}, \mathbf{P}_{X_1}(.|\boldsymbol{\theta})), ..., (\mathbf{R}, \mathcal{B}, \mathbf{P}_{X_n}(.|\boldsymbol{\theta}))$ tiesioginė sandauga. Taigi statistinį modelį visiškai nusako atskiros a. v. $\mathbf{X}$ koordinatės skirstinys. Atsitiktinio vektoriaus $\mathbf{X}$ pasiskirstymo funkcija ar tankis visai nusakomi atskiros koordinatės pasiskirstymo funkcija ar tankiu (žr. [11], p. 100–104). Šiuo atveju statistinį modelį žymėsime

$$X_i \sim \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \quad \text{arba} \quad X_i \sim F_{\boldsymbol{\theta}}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}, \quad \text{arba} \quad X_i \sim f_{\boldsymbol{\theta}}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}, \tag{1.3.4}$$

čia $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}$, $F_{\boldsymbol{\theta}}$ ar $f_{\boldsymbol{\theta}}$ yra vieno imties nario indukuotas tikimybinis skirstinys, pasiskirstymo funkcija ar tankis.

1.3.1 pavyzdys. Tarkime, paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim N(\mu, \sigma^2), -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$. Kadangi a. v. $\mathbf{X}$ koordinatės yra nepriklausomi normalieji a. d., tai $\mathbf{X}$ skirstinys (statistinis modelis) yra n-matis normalusis skirstinys $N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kurio vidurkių vektorius $\boldsymbol{\mu} = (\mu, ..., \mu)^T$ ir kovariacijų matrica $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \boldsymbol{I}$. Aišku, kad a. v. $\mathbf{X}$ skirstinį visiškai nusako jo vienos koordinatės skirstinys. Todėl statistinį modelį galima nusakyti nurodant vienos koordinatės skirstinį: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \ -\infty < \mu < \infty, \ \sigma > 0$.

1.3.2 pavyzdys. Tegu n kartų realizuojami Bernulio eksperimentai, kuriuose įvykio A įvykimo tikimybė lygi p, $0 < p < 1$. Pažymėkime X_i a. d., kuris įgyja reikšmę 1, jeigu i-ajame eksperimente įvyko A, ir reikšmę 0 – priešingu atveju. Tada imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ skirstinys yra diskretusis ir jį visiškai nusako galimų reikšmių įgijimo tikimybės. Galimų reikšmių sritis $\mathcal{X} = \{(x_1, ..., x_n)^T : \ x_i = 0, \ 1, \ i = 1, ..., n\} \in \mathbf{R}^n$, susideda iš 2^n taškų, o jų įgijimo tikimybės yra

$$\mathbf{P}\{\mathbf{X} = \boldsymbol{x}|p\} = p^{x_1+...+x_n}(1-p)^{n-(x_1+...+x_n)}, \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \ 0 < p < 1.$$

Aišku, kad a. v. $\mathbf{X}$ skirstinį visiškai nusako vienos koordinatės $\boldsymbol{X}_i$ skirstinys. Todėl statistinį modelį galima apibrėžti nurodant vienos koordinatės skirstinį: $X_i \sim B(1, \ p), \ 0 < p < 1$.

1.3.3 pavyzdys. Tarkime, atrankinei kontrolei pateko N dydžio gaminių partija, kurios defektinių gaminių skaičius M yra nežinomas. Atsitiktinai negrąžinant paimama $n < N$ gaminių ir nustatoma, kurie iš jų yra defektiniai. Tegu a. d. X_i įgyja reikšmę 1, jeigu i-asis patikrintas gaminys yra defektinis, ir reikšmę 0 – priešingu atveju. Gautosios imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ skirstinys yra diskretusis, galimos jo reikšmės $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)^T$ taip pat priklauso aibei $\mathcal{X}$, apibrėžtai 1.3.2 pavyzdyje. Atskiros koordinatės skirstinys taip pat binominis $B(1, p), p = M/N$. Tačiau, skirtingai nuo 1.3.2 pavyzdžio, a. d. $X_1, ..., X_n$ yra priklausomi (imtis nėra paprastoji).Todėl, norint nusakyti statistinį modelį, nepakanka nurodyti atskiros koordinatės skirstinį.

Atsitiktinio vektoriaus $\mathbf{X}$ tikimybinis skirstinys (statistinis modelis) nusakomas tikimybėmis

$$\mathbf{P}\{\mathbf{X} = \boldsymbol{x}|M\} = \mathbf{P}\{X_1 = x_1, ..., X_n = x_n|M\} = \frac{M^{[m]}(N-M)^{[n-m]}}{N^{[n]}},$$

kiekviename taške $(x_1, ..., x_n)^T \in \mathcal{X}$, kuriame yra m vienetų ir $n - m$ nulių, $\max(0, N - M - n) \leq m \leq \min(M, n)$; $k^{[l]} = k(k-1)...(k-l+1)$; likusiuose aibės $\mathcal{X}$ taškuose tikimybė lygi nuliui. Nežinomo parametro M kitimo sritis yra aibė $\{0, 1, ..., N\}$.

1.3.1 pastaba. Jei galime rasti tokias skirtingas $\boldsymbol{\theta}$ reikšmes $\boldsymbol{\theta}_1 \neq \boldsymbol{\theta}_2$, kad $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_1} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_2}$, t. y. esant bet kuriai teigiamo mato aibei $B \in \mathcal{B}$ tikimybės $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_1}(B) = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_2}(B)$ sutampa, tai gali kilti keblumų vertinant parametrą $\boldsymbol{\theta}$. Todėl toliau nagrinėsime tiktai *identifikuojamus* modelius, t. y. kai skirtingas parametro $\boldsymbol{\theta}$ reikšmes atitinka skirtingi imties skirstiniai.

1.4. Parametriniai ir neparametriniai statistiniai modeliai

1.4.1 apibrėžimas. Statistinis modelis $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$ vadinamas *parametriniu*, jei parametras $\boldsymbol{\theta}$ yra baigtiniamatis:

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)^T \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m.$$

Pavyzdžiui, kai imtis paprastoji, $\mathcal{P}$ gali būti normaliųjų, eksponentinių, Puasono skirstinių šeima: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \ \mu \in \mathcal{R}, \ \sigma > 0; \ X_i \sim \mathcal{E}(\theta), \ \theta > 0;$ $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0$.

1.4.2 apibrėžimas. Statistinis modelis $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$ vadinamas *semiparametriniu*, jei parametras $\boldsymbol{\theta}$ turi baigtinio ir begalinio matavimo komponentes.

Pavyzdžiui, tiriant gyvenimo trukmės priklausomybę nuo vienamatės kovariantės z, galima taikyti Kokso modelį, tarus, kad imties $\mathbf{X}$ (kuri nėra paprastoji) skirstinys apibrėžiamas nepriklausomų gyvenimo trukmių X_i pasiskirstymo funkcijomis

$$F_i(x, \beta) = 1 - \{1 - F_0(x)\}^{\exp\{\beta z_i\}};$$

čia F_0 yra nežinoma bazinė pasiskirstymo funkcija (begalinio matavimo komponentė), β – nežinomas vienamatis parametras ir z_i – i-ojo stebimo objekto žinoma kovariantės reikšmė. Šiuo atveju parametras yra $\boldsymbol{\theta} = (\beta, F_0(x))$, $\beta \in \mathbf{R}, F_0 \in \mathcal{F}_0$; čia $\mathcal{F}_0$ yra tam tikra pasiskirstymo funkcijų (pvz., absoliučiai tolydžių) aibė. Aišku, kad parametro $\boldsymbol{\theta}$ antrosios komponentės negalime aprašyti baigtiniamačiu parametru, priklausančiu kokiam nors baigtinės dimensijos N erdvės $\mathbf{R}^N$ poaibiui.

1.4.3 apibrėžimas. Statistinis modelis $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$ vadinamas *neparametriniu*, jei parametras $\boldsymbol{\theta}$ yra begalinio matavimo ir neturi baigtinio matavimo komponenčių.

Pavyzdžiui, $\mathcal{P}$ gali būti visų galimų skirstinių šeima arba skirstinių su tolydžia arba simetrine pasiskirstymo funkcija šeima.

Parametriniai, neparametriniai ir semiparametriniai statistiniai modeliai nagrinėjami atitinkamuose matematinės statistikos skyriuose.

1.5. Pagrindiniai matematinės statistikos uždaviniai

Turint statistinį modelį $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$ ir žinant imties $\mathbf{X}$ realizaciją $\boldsymbol{x}$, daromi tam tikri sprendimai apie nevisiškai žinomą $\mathbf{X}$ skirstinį. Kiekviena sprendimų priėmimo taisyklė yra $\mathcal{B}^n$-mačioji funkcija, kurios kitimo sritis sutampa su galimų sprendimų aibe $\mathcal{D}$.

1.5.1 apibrėžimas. Bet kuri $(\mathbf{R}^n,\ \mathcal{B}^n)$-mačioji funkciją $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{T}(X_1, ..., X_n)$, priklausanti tik nuo imties $\mathbf{X}$, vadinama *statistika.* Konkretaus eksperimento statistikos $\boldsymbol{T}$ įgyta reikšmė $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{T}(x_1, ..., x_n)$ vadinama *statistikos realizacija* arba *stebiniu.*

Taigi kiekviena sprendimų priėmimo taisyklė $\delta(\mathbf{X})$ yra statistika, kurios kitimo sritis yra galimų sprendimų aibė $\mathcal{D}$.

Norėdami palyginti įvairias sprendimų priėmimo taisykles, įvedame nuostolių funkciją $L(\boldsymbol{\theta}, d) \geq 0, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}, d \in \mathcal{D}$. Funkcijos L reikšmė taške $(\boldsymbol{\theta}, d)$ interpretuojama kaip nuostoliai, kurių atsiranda tada, kai priimamas sprendimas $d \in \mathcal{D}$, o tikroji parametro reikšmė yra $\boldsymbol{\theta}$. Pavyzdžiui, vienamačio parametro θ taškinio vertinimo atveju dažnai naudojama nuostolių funkcija $L(\theta, d) = (d - \theta)^2$. Kuo labiau nutolusią nuo θ reikšmę d įgyja įvertinys $T = T(\mathbf{X})$, tuo daugiau apsirinkama, t. y. tuo didesni nuostoliai. Tačiau toks lyginimas paprastai nebūna vienareikšmis: vienoms imties realizacijoms gali būti geresnė viena taisyklė, o kitoms – kita. Todėl matematinėje statistikoje įprasta ieškoti tokios taisyklės, kuri daug kartų taikoma analogiškiems stebinių rinkiniams, minimizuotų vidutinius nuostolius. Kitaip tariant, ieškoma taisyklės, kuri su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ minimizuotų vidurkį – vadinamąją *rizikos funkciją*:

$$R(\boldsymbol{\theta}, \delta) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}} L(\boldsymbol{\theta}, \delta(\mathbf{X})) = \int_{\mathbf{R}^n} L(\boldsymbol{\theta}, \delta(\boldsymbol{x})) \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}(d\boldsymbol{x}). \tag{1.5.1}$$

Matome, kad matematinės statistikos uždavinį lemia trejetas

$$(\mathcal{P},\ \mathcal{D},\ L),$$

kurį sudaro skirstinių šeima $\mathcal{P}$, sprendimų d aibė $\mathcal{D}$ ir nuostolių funkcija L. Prielaidos apie šiuos tris elementus suskirsto matematinę statistiką į dalis, kurioms reikia savitų sprendimo metodų.

Atsižvelgiant į skirstinių šeimą $\mathcal{P}$, pirmiau buvo išskirti parametriniai, semiparametriniai ir neparametriniai statistiniai modeliai. Jeigu stebimas atsitiktinis vektorius ar procesas, tai atitinkamos matematinės statistikos dalys vadinamos daugiamate ar procesų statistika.

Kalbant apie sprendimų aibę $\mathcal{D}$, dažniausiai nagrinėjami tokie pagrindiniai matematinės statistikos uždavinių tipai:

1. Formuluojama prielaida (hipotezė), kad imties $\mathbf{X}$ skirstinys priklauso siauresnei skirstinių aibei $\mathcal{P}_0 = \{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0 \subset \boldsymbol{\Theta}\} \subset \mathcal{P}$. Taigi sprendimų aibė $\mathcal{D} = \{d_0,\ d_1\}$ susideda iš dviejų elementų: sprendimas d_0, kad prielaida teisinga, ir sprendimas d_1, kad prielaida klaidinga. Tai ***statistinių hipotezių tikrinimo uždavinys***. Suformuluotą prielaidą vadiname *hipoteze*, o teiginį, kad $\mathbf{X}$ skirstinys priklauso šeimai $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$, – alternatyviąja hipoteze, arba trumpiau – *alternatyva*.

Pavyzdžiui, jei nagrinėjamas statistinis modelis $X_i \sim \mathcal{P} = \{N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbf{R}, \sigma > 0\}$ ir tikrinama hipotezė $X_i \sim \mathcal{P}_0 = \{N(1, \sigma^2), \sigma > 0\} \subset \mathcal{P}$, tai viena iš galimų sprendimo priėmimo taisyklių yra tokia: hipotezė atmetama (sprendimas d_1), jei

$$\mid \sqrt{n}(\bar{X} - 1)/s \mid > c_n;$$

čia $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$, $s^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/(n-1)$, $s = \sqrt{s^2}$, o c_n yra konstanta, nepriklausanti nuo nežinomų parametrų. Priešingu atveju hipotezė priimama (sprendimas d_0). Tai natūralu, nes $\mathbf{E}_\mu \bar{X} = \mu$, taigi esant teisingai hipotezei $\bar{X}$ stebiniai išsisklaidę apie vienetą. Todėl hipotezę reikėtų atmesti, jei skirtumas $\mid \bar{X} - 1 \mid$ įgyja didelę reikšmę. Dalyba iš s reikalinga norint pašalinti matuojamų dydžių sklaidos įtaką.

Bendresniu atveju šeima $\mathcal{P}$ suskaidoma į k nesikertančių poaibių $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, ...,$ $\mathcal{P}_k$. Sprendimų aibė $\mathcal{D}$ susideda iš k elementų $d_1, ..., d_k$; čia d_i parodo, kad imties $\mathbf{X}$ skirstinys priklauso aibei $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{P}, i = 1, 2, ..., k$. Tai *daugelio sprendimų priėmimo*, arba *klasifikavimo*, uždavinys.

2. Reikia padaryti išvadą apie nežinomo parametro $\boldsymbol{\theta}$ arba nežinomo parametro funkcijos $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ tikrąją reikšmę (kuri yra nežinoma). Sprendimų aibė $\mathcal{D}$ sutampa su parametro $\boldsymbol{\theta}$ ar funkcijos $\boldsymbol{\gamma}$ reikšmių sritimi.

Šis uždavinys paprastai sprendžiamas parenkant tokią $\mathcal{B}^n$-mačiąją imties $\mathbf{X}$ funkciją (statistiką)

$$T = T(\mathbf{X}) = T(X_1, \cdots, X_n),$$

kurios stebiniai susikoncentravę apie $\boldsymbol{\theta}$ arba $\boldsymbol{\gamma}$, o tų stebinių sritis priklauso galimų sprendimų aibei $\mathcal{D}$.

Tai *taškinių įvertinių* radimo uždavinys.

Pavyzdžiui, jei nagrinėjamas statistinis modelis $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0$ (t. y. imama Puasono skirstinių šeima) ir turima paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$, tai taškiniu parametro λ įvertiniu galima imti statistiką $T = \bar{X}$, nes $\mathbf{E}_\lambda \bar{X} = \lambda$, taigi T stebiniai išsibarstę apie λ. Statistikos T stebiniai priklauso sprendimų aibei $\mathcal{D} = (0, \infty)$.

Jei nagrinėjamas neparametrinis modelis $X_i \sim \mathbf{P}_F, F \in \mathcal{F}$, čia $\mathcal{F}$ yra visų pasiskirstymo funkcijų šeima, tai taškiniu parametro F (pasiskirstymo funkcijos) įvertiniu natūralu imti statistiką $T = T(\mathbf{X}, y),\ y \in \mathbf{R}$, apibrėžiamą lygybe

$$T(\mathbf{X}, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty,\, y]}(X_i),$$

čia $\mathbf{1}_A(x)$ yra aibės A indikatorius, nes $\mathbf{E}_F(T(\mathbf{X}, y)) = F(y)$ su visais y. Statistikos T reikšmės priklauso sprendimų aibei $\mathcal{D} = \mathcal{F}$.

3. Ieškoma atsitiktinė sritis $\mathcal{E}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{\Theta}$, kuri esant visiems $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{\Theta}$ uždengia nežinomą parametro $\boldsymbol{\theta}$ reikšmę su tikimybe, ne mažesne už Q, čia Q yra artima 1 tikimybė:

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{E}(\mathbf{X})\} \geq Q, \quad \forall\, \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{\Theta}.$$

Sprendimų aibę sudaro parametro $\boldsymbol{\theta}$ reikšmių aibės $\mathbf{\Theta}$ poaibiai. Tai *pasikliovimo sričių* sudarymo uždavinys.

Pasikliovimo srities ribas nusako tinkamai parinktų statistikų reikšmės. Pavyzdžiui, jei nagrinėjamas statistinis modelis $X_i \sim \mathcal{P} = \{N(\mu, \sigma^2),\ \mu \in \mathbf{R},\ \sigma > 0\}$, tai vidurkio μ pasikliovimo sritis (šiuo atveju intervalas) gali būti apibrėžiama šitaip:

$$\mathcal{E}(\mathbf{X}) = (\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} c(Q),\ \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} c(Q));$$

čia $c(Q)$ yra konstanta, nepriklausanti nuo nežinomų parametrų, bet priklausanti nuo Q, o s – pirmiau apibrėžta statistika. Šio atsitiktinio intervalo reikšmės yra intervalai, kurie priklauso sprendimų aibei $\mathcal{D}$, susidedančiai iš ervės $\mathbf{R}$ poaibių.

Suformuluoti uždaviniai nagrinėjami atitinkamuose matematinės statistikos skyriuose – „Statistinių hipotezių tikrinimas“, „Taškiniai įvertiniai“, „Intervaliniai įvertiniai“ ir pan. Pabrėšime, kad šie uždaviniai gali būti sprendžiami, kai statistinis modelis yra parametrinis, semiparametrinis ar neparametrinis.

1.6. Pratimai

1.1. Yra dvi nepriklausomos paprastosios a.d. $X \sim B(1, p)$ imtys, kurių didumai yra n_1 ir n_2. Tegu vieneto pasirodymų skaičiai šiose imtyse yra X_1 ir X_2. Sudarykite jungtinės imties $\mathbf{X} = (X_1,\ X_2)^T$ statistinį modelį. Raskite statistikos

$$T = \frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}$$

vidurkį ir dispersiją.

1.2. Objektų, turinčių savybę A, dalys k populiacijose atitinkamai yra $\pi_1, ..., \pi_k$.

a) Atsitiktinai parenkama populiacija ir iš jos atsitiktinai imama grąžinant didumo n imtis.

b) Atsitiktinai parenkama populiacija ir iš jos atsitiktinai imamas grąžinant vienas elementas. Procedūra kartojama n kartų.

Sudarykite šių eksperimentų statistinius modelius. Raskite statistikos X/n vidurkį ir dispersiją, kai X yra skaičius imties objektų, turinčių savybę A.

1.3. (**1.2** tęsinys). Iš kiekvienos populiacijos atsitiktinai imama grąžinant didumo n imtis. Sudarykite šio eksperimento statistinį modelį. Raskite statistikos X/n vidurkį ir dispersiją, kai X yra jungtinės nk didumo imties objektų, turinčių savybę A, skaičius.

1.4. Iš populiacijos, kurioje požymį A turinčių objektų dalis lygi π, atsitiktinai imama grąžinant didumo n_1 imtis. Iš tos imties atsitiktinai imama grąžinant didumo n_2 imtis. Sudarykite šio eksperimento statistinį modelį.

1.5. (**1.4** tęsinys). Tarę, kad eksperimento metu užregistruojami tik skaičiai X_1 ir X_2 pirmosios ir antrosios imties objektų, turinčių savybę A, sudarykite imties $(X_1,\ X_2)^T$ statistinį modelį. Raskite statistikos $X_1/n_1 - X_2/n_2$ vidurkį ir dispersiją.

1.6. Išspręskite **1.4.** ir **1.5.** pratimus, kai imtys imamos atsitiktinai ir negrąžinant (populiaciją sudaro N elementų, $n_2 < n_1 < N$).

1.7. Atrankinei kontrolei pateko N dydžio gaminių partija ir kurioje yra nežinomas skaičius M defektinių gaminių. Atsitiktinai imama negrąžinant n gaminių ir nustatomas defektinių skaičius X iš jų. Sudarykite imties X statistinį modelį.

1.8. (**1.7** tęsinys). Tegu partija pripažįstama gera, kai $X \le c$. Kaip priklauso partijos priėmimo tikimybė nuo šios partijos defektinių gaminių skaičiaus M?

1.9. (**1.7** tęsinys). Tegu taikoma tokia atrankinės kontrolės taisyklė: partija pripažįstama gera, kai $X \le c$, partija išbrokuojama, kai $X \ge c + d$. Kai $c < X < c + d$, atsitiktinai imama negrąžinant papildoma didumo n' imtis ir nustatomas defektinių gaminių šioje imtyje skaičius X'. Šiuo atveju partija brokuojama, kai $X + X' > k$. Sudarykite imties $(X,\ X')^T$ statistinį modelį. Kaip priklauso partijos priėmimo tikimybė nuo šios partijos defektinių gaminių skaičiaus M?

1.10. Atrankinei kontrolei pateko N dydžio gaminių partija ir kurioje yra nežinomi skaičiai defektinių gaminių: M_1 – neremontuotinų ir M_2 – turinčių pataisomus defektus. Likusieji $N - M_1 - M_2$ gaminiai yra geri. Atsitiktinai imama negrąžinant n gaminių ir iš jų randami skaičiai X_1 ir X_2 neremontuotinų gaminių ir turinčių pataisomus defektus. Sudarykite imties $(X_1,\ X_2)^T$ statistinį modelį.

1.11. (**1.10** tęsinys). Tegu partija priimama, kai $X_1 \le c_1, X_2 \le c_2$. Kaip priklauso partijos priėmimo tikimybė nuo parametrų M_1 ir M_2? Raskite šią tikimybę, kai partija priimama, jei $X_1 + X_2 \le c$.

1.12. Aibę sudaro N objektų, kurie apibūdinami tam tikru požymiu y, t. y. aibė $O_N = \{y_1, ..., y_N\}$ sudaryta iš požymio y reikšmių. Atsitiktinai imame negrąžinant $n \le N$ objektų. Tegu a. v. $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ koordinatė X_i lygi i-ojo parinkto objekto požymio y reikšmei. a) Įrodykite, kad a. v. $\mathbf{X}$ koordinatės yra priklausomi a. d. ir imtis nėra paprastoji; sudarykite imties $\mathbf{X}$ statistinį modelį. b) Raskite a. d. $Y = X_1 + ... + X_n$ vidurkį ir dispersiją. c) Raskite a. d. Y tikimybinį skirstinį, kai y_i, $i = 1, ..., N$, įgyja tik dvi reikšmes: 0 arba 1.

1.13. (**1.12** tęsinys). Išspręskite 12 pratimą tuo atveju, kai objektai imami atsitiktinai grąžinant.

1.14. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_m)^T$ ir $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^T$ yra dvi paprastosios imtys, gautos stebint nepriklausomus a. d. $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ ir $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$. Sudarykite jungtinės didumo $m + n$ imties statistinį modelį. Kaip pasikeistų šis modelis, jeigu būtų žinoma, kad $\lambda_1 = \lambda_2$?

1.15. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_m)^T$ ir $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^T$ yra dvi paprastosios imtys, gautos stebint nepriklausomus a. d. $X \sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$ ir $Y \sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$. Sudarykite jungtinės didumo $m+n$ imties statistinį modelį, jeigu žinoma, kad: a) $\mu_1 = \mu_2$; b) $\sigma_1 = \sigma_2$; c) jokios informacijos apie parametrus nėra.

1.16. Tegu $(X_i,\ Y_i)^T, i = 1, ..., n$, yra paprastoji atsitiktinė a. v. $(X, Y)^T$, turinčio dvimatį normalųjį skirstinį, imtis. Sudarykite imties statistinį modelį. Kaip pasikeistų statistinis modelis, jeigu būtų žinoma, kad marginalieji atsitiktinių dydžių X ir Y skirstiniai vienodi?

1.17. Imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ elementai $X_i \sim N(\mu,\ \sigma^2)$, $i = 1, ..., n$. Koreliacijos koeficientas $\rho(X_i,\ X_j) = \rho$, kai $|i-j| = 1$, ir $\rho(X_i,\ X_j) = 0$, kai $|i-j| > 1$. Sudarykite imties $\mathbf{X}$ statistinį modelį.

1.18. Stebint didumo n gaminių partiją, nustatomi jų gedimo momentai $X_1, ..., X_n$. Sudarykite imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ statistinį modelį, jeigu žinoma, kad gaminiai sugenda nepriklausomai vienas nuo kito, o jų gedimų intensyvumo funkcija $\lambda(t) \equiv \lambda$.

1.19. (**1.18** tęsinys). Sudarykite imties statistinį modelį tuo atveju, kai gaminiai stebimi fiksuotą laiką t.

1.20. Tegu $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, ..., X_{in_i})^T$, $i = 1, ..., m$, yra paprastosios atsitiktinės imtys, gautos stebint absoliučiai tolydžius n. a. d. $X_1, ..., X_m$. Sudarykite jungtinės imties $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^T, ..., \mathbf{X}_m^T)^T$ statistinį modelį, kai žinoma, kad: a) a. d. $X_1, ..., X_m$ skirstiniai gali skirtis tik poslinkio parametru; b) gali skirtis tik mastelio parametru; c) gali skirtis poslinkio ir mastelio parametrais; d) jokios papildomos informacijos nėra.

1.21. Imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ nariai yra nepriklausomi absoliučiai tolydūs atsitiktiniai dydžiai. Sudarykite imties $\mathbf{X}$ statistinį modelį. Kaip pasikeistų statistinis modelis, jeigu imtis būtų paprastoji?

1.22. Paprastoji atsitiktinė imtis $(X_{1i}, ..., X_{ki})^T$, $i = 1, ..., n$, gauta stebint a. v. $(X_1, ..., X_k)^T$. Sudarykite imties statistinį modelį, jeigu žinoma, kad a. d. $X_1, ..., X_k$ marginalieji skirstiniai yra vienodi.

1.23. Atsitiktinės imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ elementai yra absoliučiai tolydūs n. a. d., kurių mediana lygi β (β – nežinomas parametras). Sudarykite imties $\mathbf{X}$ statistinį modelį.

1.24. Atsitiktinės imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ elementai yra absoliučiai tolydūs a. d. su baigtiniu vidurkiu μ (μ – nežinomas parametras). Sudarykite imties $\mathbf{X}$ statistinį modelį.

1.25. Taškas tolygiai juda tiese. Laiko momentais $t_1, ..., t_n$ užregistruojamas taško nueitas kelias $X_1, ..., X_n$. Tarkime, kad matavimo rezultatai tarpusavyje nepriklausomi, matavimo paklaidos neturi sisteminės dedamosios, o atsitiktinė dedamoji pasiskirsčiusi pagal normalųjį dėsnį $N(0,\ \sigma^2)$. Sudarykite imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ statistinį modelį.

1.26. (**1.25** tęsinys). Sudarykite statistinį modelį tuo atveju, kai žinoma, kad $X_0 = 0$.

1.27. Sveriant tą patį kūną n kartų, gauti svėrimo rezultatai $X_1, ..., X_n$. Tegu jie tarpusavyje nepriklausomi. Pirmųjų k svėrimų sisteminė paklaida 0, o likusiųjų – μ. Atsitiktinės visų svėrimų paklaidų dedamosios turi normaliuosius skirstinius $N(0, \sigma^2)$. Sudarykite imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ statistinį modelį.

ATSAKYMAI IR NURODYMAI

1.1. Imties $(X_1,\ X_2)^T$ skirstinys yra diskretusis, nusakomas tikimybėmis $\mathbf{P}\{X_1 = m_1,\ X_2 = m_2\} = C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} p^{m_1+m_2}(1-p)^{(n_1+n_2-m_1-m_2)}$, $m_1 = 0, 1, ..., n_1, m_2 = 0, 1, ..., n_2$, $0 < p < 1$; $\mathbf{E}T = 0$, $\boldsymbol{V}T = p(1-p)(n_1+n_2)/(n_1 n_2)$. **1.2.** a) Imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ tikimybinis modelis nusakomas tikimybėmis $\mathbf{P}\{X_i = j_i,\ i = 1, ..., n,\ j_i = 0,\ 1\} = \frac{1}{k}\sum_{r=1}^k (\pi_r)^{\sum_i j_i}$ $(1-\pi_r)^{n-\sum_i j_i}$, $0 < \pi_j < 1$, $j = 1, ..., k$; $\mathbf{E}(X/n) = \frac{1}{k}\sum_{r=1}^k \pi_r = \bar{\pi}$, $\boldsymbol{V}(X/n) = \frac{1}{kn}\sum_{r=1}^k \pi_r(1-\pi_r)/n$; b) $\mathbf{P}\{X_1 = j_1, ..., X_n = j_n\} = (\bar{\pi})^{\sum_i j_i}(1-\bar{\pi})^{n-\sum_i j_i}$, , $j_i = 0, 1$; $\mathbf{E}(X/n) = \bar{\pi}$, $\boldsymbol{V}(X/n) = \bar{\pi}(1-\bar{\pi})/n$. **1.3.** Jungtinės imties $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^T, ..., \mathbf{X}_n^T)^T$ tikimybinis modelis nusakomas tikimybėmis $\mathbf{P}\{\mathbf{X}_1 = \boldsymbol{x}_1, ..., \mathbf{X}_n = \boldsymbol{x}_n\} = \mathbf{P}\{\mathbf{X}_1 = \boldsymbol{x}_1\}...\mathbf{P}\{\mathbf{X}_n = \boldsymbol{x}_n\}$; $\mathbf{P}\{\mathbf{X}_i = \boldsymbol{x}_i\} = \mathbf{P}\{X_{i1} = j_1, ..., X_{in} = j_n,\ j_1, ..., j_n = 0,\ 1\} = \pi_i^{\sum_i j_i}(1-\pi_i)^{n-\sum_i j_i}$; $\mathbf{E}(X/n) = \sum_{r=1}^k \pi_r$, $\boldsymbol{V}(X/n) = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^k \pi_r(1-\pi_r)$. **1.4.** Jungtinės imties $\mathbf{X} = (X_{11}, ..., X_{1n_1}, X_{21}, ..., X_{2n_2})^T$ tikimybinis skirstinys nusakomas tikimybėmis $\mathbf{P}\{X_{1i} = j_i, X_{2l} = k_l;\ i = 1, ..., n_1,\ l = 1, ..., n_2;\ j_i, k_l = 0,\ 1\} = \pi^{\sum_i j_i}(1-\pi)^{n-\sum_i j_i}(\sum_i j_i/n)^{\sum_l k_l}\,(1-\sum_i j_i/n)^{n_1-\sum_l k_l}$, $0 < \pi < 1$. **1.5.** A. v. $(X_1,\ X_2)^T$ skirstinys nusakomas tikimybėmis $\mathbf{P}\{X_1 = m_1,\ X_2 =$

$m_2\} = C_{n_1}^{m_1}\pi^{m_1}(1-\pi)^{n_1-m_1}C_{n_2}^{m_2}(m_1/n_1)^{m_2}(1-m_1/n_1)^{n_2-m_2}$, $m_1 = 0,...,n_1$, $m_2 = 0,...,n_2$, $0<\pi<1$; $\mathbf{E}(X_1/n_1 - X_2/n_2) = 0$, $\boldsymbol{V}(X_1/n_1 - X_2/n_2) = (n_1-1)\pi(1-\pi)/(n_1n_2)$. **1.6.** Tarkime, populiacijos objektų, turinčių savybę A, skaičius yra M ir $\pi = M/N$. Tada a. d. X_1 skirstinys yra hipergeometrinis $X_1 \sim H(N, M, n_1)$, o a. d. X_2 sąlyginis skirstinys, esant sąlygai, kad a. d. X_1 įgijo reikšmę m, taip pat hipergeometrinis $(X_1|X = m) \sim H(n_1, m, n_2)$; $\mathbf{E}(X_1/n_1 - X_2/n_2) = 0$, $\boldsymbol{V}(X_1/n_1 - X_2/n_2) = \pi(1-\pi)N(n_1-n_2)/(n_1n_2(N-1))$. **1.7.** A. d. X skirstinys yra hipergeometrinis $X \sim H(N, M, n)$. **1.8.** Partijos priėmimo tikimybė $\mathbf{P}\{X \le c|M\} = \sum_{m=0}^{c} h(m|N,\ M,\ n) = H(c|N,\ M,\ n)$; čia $h(m|N,\ M,\ n) = C_M^m C_{N-M}^{n-m}/C_N^n$. **1.9.** Atsitiktinio dydžio X skirstinys yra hipergeometrinis $X \sim H(N, M, n)$, o a. d. X' sąlyginis skirstinys, kai $X = m$, taip pat hipergeometrinis $(X'|X = m) \sim H(N-n,\ M-m,\ n')$. Partijos priėmimo tikimybė $\mathbf{P}\{X \le c|M\} + \mathbf{P}\{c < X < c+d,\ X + X' \le k|M\} = H(c|N, M, n) + \sum_{m=c+1}^{c+d-1}\sum_{j=0}^{k-m} h(m|N, M, n)h(j|N-n, M-m, n')$. **1.10.** Atsitiktinio vektoriaus $(X_1, X_2)^T$ tikimybinis skirstinys yra dvimatis hipergeometrinis $(X_1, X_2)^T \sim H(N, M_1, M_2, n)$. **1.11.** Partijos priėmimo tikimybė $\mathbf{P}\{X_1 \le c_1,\ X_2 \le c_2\} = \sum_{m_1=0}^{c_1}\sum_{m_2=0}^{c_2} C_{M_1}^{m_1}C_{M_2}^{m_2}C_{N-M_1-M_2}^{n-m_1-m_2}/C_N^n = \sum_{m_1=0}^{c_1}\sum_{m_2=0}^{c_2} h(m_1,\ m_2|N,\ M_1,\ M_2,\ n)$. Antruoju atveju partijos priėmimo tikimybė yra $\sum_{m_1=0}^{c}\sum_{m_2=0}^{c-m_1} h(m_1,\ m_2|N,\ M_1,\ M_2,\ n)$. **1.12.** a) Atsitiktinio vektoriaus $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ koordinatės priklausomos: koordinatė X_i negali įgyti reikšmės y_j, jei kuri nors kita koordinatė jau įgijo šią reikšmę. A. v. $\mathbf{X}$ galimos reikšmės yra visi galimi skirtingi rinkiniai $(y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_n})^T, i_1 \ne i_2 \ne \cdots \ne i_n$, iš aibės $\{y_1, ..., y_N\}$; jų įgijimo tikimybės visos vienodos ir lygios $1/C_N^n$; b) $\mathbf{E}Y = \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i = n\bar{y}$, $\boldsymbol{V}Y = n(N-n)s_y^2/(N-1)$, $s_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2$. c) Tarkime, vienetų skaičius aibėje O_N lygus M. Tada $Y \sim H(N,\ M,\ n)$. **1.13.** a) Atsitiktinio vektoriaus $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ koordinatės yra nepriklausomos; a. v. $\mathbf{X}$ reikšmės yra visi galimi rinkiniai $(y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_n})^T$, kurių kiekviena koordinatė nepriklausomai nuo kitų gali įgyti reikšmes $y_1, ..., y_N$ su tikimybėmis $1/N$, t. y. kiekvieno rinkinio tikimybė yra $1/N^n$; b) $\mathbf{E}Y = n\bar{y}$, $\boldsymbol{V}Y = ns_y^2$: c) Jeigu vienetų skaičius aibėje yra M, tai $Y \sim B(n,\ p)$, $p = M/N$. **1.14.** Jungtinės imties $(X^T,\ Y^T)^T$ tikimybinis skirstinys nusakomas tikimybėmis $\mathbf{P}\{X_1 = k_1, ..., X_m = k_m,\ Y_1 = l_1, ..., Y_n = l_n\} = \lambda_1^{k_1+...+k_m}\ e^{-m\lambda_1}\lambda_2^{l_1+...+l_n}e^{-n\lambda_2}/(k_1!...k_m!l_1!...l_n!)$, $0 < \lambda_1,\ \lambda_2 < \infty$, $k_j,\ l_i = 0, 1, \cdots$. Jeigu $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, tai ši tikimybė yra $\lambda^{k_1+...+k_m+l_1+...+l_n}$ $e^{-(m+n)\lambda}/(k_1!...k_m!l_1!...l_n!)$. **1.15.** c) Jungtinės imties $(X_1, ..., X_m,\ Y_1, ..., Y_n)^T$ tikimybinio tankio funkcija yra $\prod_{i=1}^{m}\varphi(x_i|\mu_1,\ \sigma_1)\prod_{j=1}^{n}\varphi(y_j|\mu_2,\ \sigma_2)$, $-\infty < \mu_1,\ \mu_2 < \infty$, $0 < \sigma_1,\ \sigma_2 < \infty$; čia $\varphi(z|\mu,\ \sigma)$ – normaliojo skirstinio $N(\mu,\ \sigma)$ tankio funkcija. Atveju a) reikia įrašyti $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, o atveju b) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. **1.16.** Imties tankio funkcija yra $\prod_{i=1}^{n}\varphi(x_i,\ y_i|\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\ \mu_2)^T, -\infty < \mu_1,\ \mu_2 < \infty$, $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]_{2\times 2}$, $0 < \sigma_{11},\ \sigma_{22} < \infty$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}, -1 < \rho < 1$; o $\varphi(x,\ y|\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma})$ – dvimačio normaliojo skirstinio $N_2(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma})$ tankio funkcija. **1.17.** Atsitiktinio vektoriaus $\mathbf{X}$ skirstinys yra n-matis normalusis $N_n(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma})$, kurio vidurkių vektorius $\boldsymbol{\mu} = (\mu, ..., \mu)^T$, $-\infty < \mu < \infty$; kovariacinės matricos $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]_{n\times n}$ elementai ant pagrindinės įstrižainės yra σ^2, $0 < \sigma < \infty$; elementai ant įstrižainių, gretimų pagrindinei, yra $\rho\sigma^2$, $-1 < \rho < 1$, o visi kiti elementai lygūs 0. **1.18.** Atsitiktinio vektoriaus $\mathbf{X}$ tikimybinio tankio funkcija yra $\lambda^n\exp\{-\lambda(x_1 + ... + x_n)\}$, $0 < \lambda < \infty$, $0 < x_1, ..., x_n < \infty$. **1.19.** Stebime nepriklausomas poras $(Y_i = X_i \wedge t,\ \delta_i = \mathbf{1}_{(0,t]}(X_i))$; $\mathbf{P}\{Y_i \le x, \delta_i = 1\} = \mathbf{P}\{X_i \le x, X_i \le t\} = 1 - \exp\{-\lambda(x \wedge t)\}$, $\mathbf{P}\{Y_i \le x, \delta_i = 0\} = \mathbf{P}\{t \le x, X_i > t\} = \exp\{-\lambda t\}\mathbf{1}_{(t,\infty)}(x)$. **1.20.** Jungtinės imties $\mathbf{X}$ pasiskirstymo funkcija F priklauso absoliučiai tolydžių $(n_1 + ... + n_m)$-mačių pasiskirstymo funkcijų aibei $\mathcal{F}$: a) $\mathcal{F}$ yra aibė pasiskirstymo funkcijų $\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n_j} F(x_{ij} - \mu_j)$, $-\infty < \mu_1, ..., \mu_m < \infty$; b) $\mathcal{F}$ yra aibė pasiskirstymo funkcijų $\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n_j} F(x_{ij}/\sigma_j)$, $0 < \sigma_1, ..., \sigma_m < \infty$; c) $\mathcal{F}$ yra aibė pasiskirstymo funkcijų $\prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} F((x_{ij}-\mu_j)/\sigma_j), \ -\infty < \mu_1, ..., \mu_m < \infty, \ 0 < \sigma_1, ..., \sigma_m < \infty;$ d) $\mathcal{F}$ yra aibė pasiskirstymo funkcijų $\prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} F_j(x_{ij})$; čia $F, \ F_j$ – vienmatės absoliučiai tolydžios pasiskirstymo funkcijos. **1.21.** Imties $\mathbf{X}$ pasiskirstymo funkcija F priklauso absoliučiai tolydžių n-mačių pasiskirstymo funkcijų aibei $\mathcal{F}$ pavidalo $\prod_{i=1}^n F_i(x_i)$; čia $F_1, ..., F_n$ – vienmatės absoliučiai tolydžios pasiskirstymo funkcijos. Jeigu imtis paprastoji, tai pasiskirstymo funkcijos $F_1, ..., F_n$ vienodos. **1.22.** Imties $\mathbf{X}$ pasiskirstymo funkcija F priklauso absoliučiai tolydžių n-mačių pasiskirstymo funkcijų aibei $\mathcal{F} = \{F(x_1, ..., x_n) : F(x, \infty, ..., \infty) = F(\infty, x, ..., \infty) = ... = F(\infty, \infty, ..., x), -\infty < x < \infty\}$. **1.23.** Imties $\mathbf{X}$ pasiskirstymo funkcija F priklauso absoliučiai tolydžių n-mačių pasiskirstymo funkcijų aibei $\mathcal{F} = \{\prod_{i=1}^n F_i(x_i) : F_i^{-1}(1/2) = \beta, \ i = 1, ..., n\}$; čia $F_1, ..., F_n$ – vienmatės absoliučiai tolydžios pasiskirstymo funkcijos. **1.24.** Imties $\mathbf{X}$ pasiskirstymo funkcija F priklauso absoliučiai tolydžių n-mačių pasiskirstymo funkcijų aibei $\mathcal{F} = \{F(\boldsymbol{x}) = F(x_1, ..., x_n) : \int_{\mathbf{R}^n} x_j dF(\boldsymbol{x}) = \mu, \ j = 1, ..., n, \ -\infty < \mu < \infty\}$. **1.25.** Atsitiktinio vektoriaus $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ tikimybinio tankio funkcija yra $(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i-1}^n (x_{t_i} - x_0 - vt_i)^2\}, \ -\infty < x_0, x_{t_1}, ..., x_{t_n} < \infty, v > 0$. **1.26.** Į **1.25** pratimo tankio formulę reikia įrašyti $x_0 = 0$. **1.27.** A. v. $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ tikimybinio tankio funkcija yra $(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i-1}^k (x_i)^2\} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=k+1}^n (x_i - \mu)^2\}, \ -\infty < x_1, ..., x_n < \infty, \ -\infty < \mu < \infty, \ \sigma > 0$.

2 skyrius

Empirinės charakteristikos

Minėjome, kad matematinės statistikos tikslas yra daryti sprendimus apie tiriamų požymių pasiskirstymą populiacijoje, tinkamai parinkus statistinį modelį ir statistinius duomenis – imties realizaciją. Priminsime, kad požymio pasiskirstymą vienareikšmiškai nusako jo pasiskirstymo funkcija F, tankis f (kai stebimas dydis absoliučiai tolydus), galimų reikšmių x_i įgijimo tikimybės p_i (kai stebimas dydis diskretusis). Be to, dažnai naudojamos skirstinio skaitinės charakteristikos: vidurkis, dispersija, aukštesniųjų eilių pradiniai ir centriniai momentai, asimetrijos ir eksceso koeficientai, kvantiliai. Kiekvienoje konkrečioje situacijoje pasiskirstymo charakteristikos turi savo interpretaciją. Pavyzdžiui, tam tikros markės televizorių veikimo trukmės pasiskirstymo funkcijos reikšmės parodo tikimybę sugesti per tam tikrą laiką, vidurkis parodo vidutinę veikimo trukmę ir pan.

Natūralu sudaryti ir nagrinėti minėtųjų charakteristikų empirinius, t. y. gautus naudojantis imtimi, analogus. Aišku, jie yra imties $\mathbf{X}$ funkcijos (statistikos).

Pažymėsime, kad išvardytosios skirstinio charakteristikos gaunamos pagal tam tikras taisykles iš pasiskirstymo funkcijos F. Todėl pradiniame etape ieškoma funkcijos F empirinio analogo $\hat{F}$. Tada kitos empirinės charakteristikos gali būti sudarytos iš funkcijos $\hat{F}$ pagal tas pačias taisykles, pagal kurias buvo gautos išvardytosios teorinės charakteristikos, naudojant funkciją F. Jeigu funkcijos $\hat{F}$ ir F artimos, tai ir kitos empirinės charakteristikos turėtų būti artimos jų teoriniams analogams.

2.1. Empirinė pasiskirstymo funkcija

Tarkime, turime paprastąją imtį $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^{\mathrm{T}}$, kurios nario X_i pasiskirstymo funkcija yra $F(x) = \mathbf{P}\{X_i \leq x\}$. Turint $\mathbf{X}$ realizaciją $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$ ir žinant, kad stebiniai x_i yra nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių realizacijos, kiekvienam stebiniui x_i galima priskirti tą pačią tikimybinę masę $1/n$ ir nagrinėti gauto diskrečiojo skirstinio

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

pasiskirstymo funkciją

$$F_n(x) = \frac{d_n(x)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty,\, x]}(x_i), \quad x \in \mathbf{R};$$

čia $d_n(x)$ yra skaičius x_i, tenkinančių sąlygą $x_i \leq x$, o

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad x \in A, \\ 0 & \text{kitais atvejais,} \end{cases}$$

yra aibės A indikatorius.

Pažymėkime $D_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty,\, x]}(X_i)$ skaičių a. d. X_i, tenkinančių sąlygą $X_i \leq x$. Su bet kuriuo x a. d. $D_n(x)$ turi binominį skirstinį $B(n,p)$, kurio parametrai n ir $p = F(x)$, o $d_n(x)$ yra šio atsitiktinio dydžio realizacija.

Atsitiktinės funkcijos

$$\hat{F}_n(x) = \frac{D_n(x)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty,\, x]}(X_i), \quad x \in \mathbf{R} \tag{2.1.1}$$

realizacijos yra pasiskirstymo funkcijos $F_n(x)$.

2.1.1 apibrėžimas. Atsitiktinė funkcija $\hat{F}_n(x)$ vadinama *empirine pasiskirstymo funkcija*, o pasiskirstymo funkcija $F_n(x)$ – *empirinės pasiskirstymo funkcijos realizacija.*

Parodysime, kad su visais fiksuotais x empirinės pasiskirstymo funkcijos $\hat{F}_n(x)$ realizacijų vidurkis yra $F(x)$. Maža to, atstumas tarp beveik visų realizacijų ir $F(x)$ konverguoja į nulį, jei $n \to \infty$.

Pažymėkime $a \wedge b = \min(a, b)$.

2.1.1 teorema. *Su visais fiksuotais x ir y*

$$\mathbf{E}\left(\hat{F}_n(x)\right) = F(x), \quad \boldsymbol{V}\left(\hat{F}_n(x)\right) = \frac{1}{n}F(x)(1 - F(x)),$$

$$\mathbf{Cov}\left(\hat{F}_n(x), \hat{F}_n(y)\right) = \frac{1}{n}\left(F(x \wedge y) - F(x)F(y)\right). \tag{2.1.2}$$

$$\mathbf{P}\left\{\hat{F}_n(x) \to F(x),\ \textit{kai}\ \ n \to \infty\right\} = 1. \tag{2.1.3}$$

Įrodymas. Su bet kuriuo x a. d. $D_n(x)$ turi binominį skirstinį $B(n, F(x))$, taigi

$$\mathbf{E}\left(\hat{F}_n(x)\right) = \frac{1}{n}\mathbf{E}\left(D_n(x)\right) = F(x),$$

$$\boldsymbol{V}\left(\hat{F}_n(x)\right) = \frac{1}{n^2}\boldsymbol{V}\left(D_n(x)\right) = \frac{1}{n}F(x)(1 - F(x)).$$

Su visais $i \neq j$ a. d. X_i ir X_j nepriklausomi, todėl

$$\mathbf{Cov}\left(\mathbf{1}_{(-\infty,\, x]}(X_i),\ \mathbf{1}_{(-\infty,\, x]}(X_j)\right) = 0.$$

Jei $i = j$, tai

$$\mathbf{Cov}\left(\mathbf{1}_{(-\infty,\, x]}(X_i),\ \mathbf{1}_{(-\infty,\, y]}(X_i)\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{(-\infty,\, x\wedge y]}(X_i)\right) -$$

$$-\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{(-\infty,\, x]}(X_i)\right)\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{(-\infty,\, y]}(X_i)\right) = F(x\wedge y) - F(x)F(y),$$

todėl

$$\mathbf{Cov}\left(\hat{F}_n(x), \hat{F}_n(y)\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{Cov}\left(\mathbf{1}_{(-\infty,\, x]}(X_i),\ \mathbf{1}_{(-\infty,\, y]}(X_j)\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(F(x\wedge y) - F(x)F(y)\right).$$

Baigdami pažymėsime, kad (2.1.3) konvergavimas išplaukia iš stipriojo didžiųjų skaičių dėsnio ([11], p. 159), nes su bet kuriuo x a. d. $\mathbf{1}_{(-\infty,\, x]}(X_i)$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę ir jų vidurkiai yra $F(x)$. ▲

2.1.2 teorema. *(*Glivenkos ir Kantelio*). Jei F yra bet kuri pasiskirstymo funkcija, tai*

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \mid \hat{F}_n(x) - F(x) \mid \stackrel{b.v.}{\to} 0, \ \textit{kai} \ \ n\to\infty. \tag{2.1.4}$$

Įrodymas. Kadangi

$$\hat{F}_n(x-0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{(-\infty,\, x)}(X_i), \quad \mathbf{E}\hat{F}_n(x-0) = \mathbf{P}\{X_i < x\} = F(x-0), \tag{2.1.5}$$

tai iš stipriojo didžiųjų skaičių dėsnio išplaukia, kad su bet kuriuo fiksuotu x

$$\mathbf{P}\left\{\hat{F}_n(x-0) \to F(x-0), \ \text{kai} \ \ n\to\infty\right\} = 1. \tag{2.1.6}$$

Fiksuokime $\varepsilon > 0$. Galima rasti tokius taškus $-\infty = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = +\infty$, kad $F(x_{k+1}-0) - F(x_k) < \varepsilon$. Fiksuokime elementarųjį įvykį ω ir nagrinėkime realizaciją $F_n(\cdot) = \hat{F}_n(\cdot, \omega)$. Funkcijos F_n ir F nemažėja, taigi su bet kuriuo $x \in [x_k, x_{k+1})$

$$F_n(x) - F(x) \le F_n(x_{k+1}-0) - F(x_k) \le F_n(x_{k+1}-0) - F(x_{k+1}-0) + \varepsilon,$$

$$F_n(x) - F(x) \ge F_n(x_k) - F(x_{k+1}-0) \ge F_n(x_k) - F(x_k) - \varepsilon. \tag{2.1.7}$$

Iš šių nelygybių gaunama, kad su bet kuriuo ω

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \mid \hat{F}_n(x,\omega) - F(x) \mid \le$$

$$\leq \max_{0\leq k\leq N} \max\Big(|\,\hat{F}_n(x_k,\omega)-F(x_k)\,|, |\,\hat{F}_n(x_k-0,\omega)-F(x_k-0)\,|\Big)+\varepsilon. \tag{2.1.8}$$

Nagrinėkime įvykį $A=\bigcap_{k=0}^{N}\left(A_k\bigcap A_k^-\right)$; čia

$$A_k=\{\omega:\hat{F}_n(x_k,\omega)\to F(x_k),\ \text{kai}\ \ n\to\infty\},$$

$$A_k^-=\{\omega:\hat{F}_n(x_k-0,\omega)\to F(x_k-0),\ \text{kai}\ \ n\to\infty\}.$$

Pažymėkime $\bar{A}$ įvykį, priešingą įvykiui A. Iš (2.1.3) ir (2.1.6) formulių išplaukia $\mathbf{P}\{A_k\}=1$, $\mathbf{P}\{A_k^-\}=1$. Taigi $\mathbf{P}\{A\}=1$, nes

$$\mathbf{P}(\bar{A})=\mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=0}^{N}\left(\bar{A}_k\bigcup\bar{A}_k^-\right)\right\}\leq\sum_{k=0}^{N}(\mathbf{P}\{\bar{A}_k\}+\mathbf{P}\{\bar{A}_k^-\})=0.$$

Iš ribos apibrėžimo ir (2.1.8) nelygybės gauname:

$$1=\mathbf{P}\{A\}$$

$$=\mathbf{P}\{\hat{F}_n(x_k)\to F(x_k),\ \hat{F}_n(x_k-0)\to F(x_k-0),\ \text{kai}\ \ n\to\infty,\forall k=0,\dots,N\}$$

$$\leq\mathbf{P}\{\exists m:\ \forall n\geq m,\ \forall k\ \ |\,\hat{F}_n(x_k)-F(x_k)\,|<\varepsilon,\ |\,\hat{F}_n(x_k-0)-F(x_k-0)\,|<\varepsilon\}$$

$$\leq\mathbf{P}\{\exists m:\forall n\geq m\ \ \sup\nolimits_{x\in\mathbf{R}}|\,\hat{F}_n(x)-F(x)\,|<2\varepsilon\}$$

$$=\mathbf{P}\{\sup\nolimits_{x\in\mathbf{R}}|\,\hat{F}_n(x)-F(x)\,|\to 0,\ \text{kai}\ \ n\to\infty\}.$$

Iš čia gaunamas teoremos teiginys. ▲

2.1.1 pastaba. Analogiškai įrodoma, kad esant bet kuriai pasiskirstymo funkcijai F,

$$\sup\nolimits_{x\in\mathbf{R}}|\,\hat{F}_n(x-0)-F(x-0)\,|\overset{b.v.}{\to}0,\ \text{kai}\ \ n\to\infty. \tag{2.1.9}$$

Iš įrodytų teoremų matyti, kad empirinė pasiskirstymo funkcija $\hat{F}_n$ yra geras pasiskirstymo funkcijos F įvertinys. Taškinio įvertinio sąvoką ir jo gerumo apibrėžimus nagrinėsime tolesniuose skyriuose.

2.1.3 teorema. *Su bet kuriuo fiksuotu x*

$$\sqrt{n}(\hat{F}_n(x)-F(x))\overset{d}{\to}Y_x\sim N\left(0,F(x)(1-F(x))\right). \tag{2.1.10}$$

Įrodymas. Teoremos rezultatas išplaukia iš centrinės ribinės teoremos ([11], p. 215), nes $\mathbf{1}_{(-\infty,\,x]}(X_i)$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a.d., kurių vidurkiai yra $F(x)$ ir dispersijos – $F(x)(1-F(x))$. ▲

Jei n didelis, tai iš teoremos išplaukia

$$\hat{F}_n(x)\simeq Z_{x,n}\sim N\left(F(x),\frac{F(x)(1-F(x))}{n}\right).$$

Galima įrodyti dar stipresnį teiginį (žr. [11], p. 335).

2.1.4 teorema. *(*Kolmogorovo). Jei pasiskirstymo funkcija F tolydi, tai su bet kuriuo $y > 0$

$$\mathbf{P}\{\sqrt{n}\sup_{x\in\mathbf{R}} \mid \hat{F}_n(x) - F(x) \mid\leq y\} \to K(y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \mathrm{e}^{-2i^2y^2}, \text{ kai } n \to \infty. \tag{2.1.11}$$

Ši teorema praverčia ieškant pasiskirstymo funkcijos F pasikliautinųjų sričių ir tikrinant hipotezes apie F skirstinį. Funkcija $K(y)$ yra tabuliuota ([5], 6.1 lent.).

2.1.1 pavyzdys. *Imties didumo radimas.* Koks turėtų būti paprastosios imties didumas n, kad empirinės pasiskirstymo funkcijos $\hat{F}_n(x)$ maksimalus nuokrypis nuo tolydžiosios teorinės pasiskirstymo funkcijos neviršytų 0,05 su tikimybe, ne mažesne už 0,95?

Turime

$$\mathbf{P}\{\sup_{x\in\mathbf{R}} \mid \hat{F}_n(x) - F(x) \mid\leq 0,05\} \geq 0,95 \Leftrightarrow \mathbf{P}\{\sqrt{n}\sup_{x\in\mathbf{R}} \mid \hat{F}_n(x) - F(x) \mid\leq 0,05\sqrt{n}\} \geq 0,95.$$

Taikydami Kolmogorovo aproksimaciją gauname

$$K(0,05\sqrt{n}) \geq 0,95 \quad \Leftrightarrow \quad 0,05\sqrt{n} \geq 1,3581 \quad \Leftrightarrow n \geq 738.$$

2.2. Pozicinės statistikos. Empiriniai kvantiliai

Tarkime, kad turime imtį $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^{\mathrm{T}}$. Bet kuriai $\mathbf{X}$ realizacijai $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$ galima sudaryti vektorių $\boldsymbol{x}^{(n)} = (x_{(1)}, ..., x_{(n)})^{\mathrm{T}}$, surikiavus stebinius x_i nemažėjimo tvarka:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ... \leq x_{(n)}.$$

Taigi $x_{(1)} = \min(x_1, ..., x_n), \ldots, x_{(n)} = \max(x_1, ..., x_n)$.

Pažymėkime $X_{(k)}$ a. d., kuris įgyja reikšmę $x_{(k)}$, kai imties $\mathbf{X}$ realizacija įgyja reikšmę $\boldsymbol{x}$.

Tada imtis $\mathbf{X}$ apibrėžia atsitiktinių dydžių

$$X_{(1)} \leq ... \leq X_{(n)},$$

vadinamųjų *pozicinių statistikų*, seką. Ši seka vadinama *variacine eilute.*

Atsitiktinis dydis $X_{(i)}$ vadinamas *i-ąja pozicine statistika.*

Pozicinės statistikos $X_{(1)}$ ir $X_{(n)}$ (dažnai ir jų stebiniai $x_{(1)}$ ir $x_{(n)}$) vadinamos imties *ekstremaliosiomis reikšmėmis.*

Pozicinių statistikų interpretacija vaizdžiausia, kai $X_1, \ldots, X_n$ yra gyvenimo trukmės. Tada X_i yra i-ojo individo gyvenimo trukmė, o $X_{(i)}$ yra i-oji pagal didumą gyvenimo trukmė.

Pažymėkime $\mathbf{X}^{(n)} = (X_{(1)}, ..., X_{(n)})^T$ pozicinių statistikų vektorių. Tada $\boldsymbol{x}^{(n)} = (x_{(1)}, ..., x_{(n)})^T$ yra jo realizacija.

Empirinė pasiskirstymo funkcija (žr. (2.1.1)) gali būti užrašyta naudojantis $\mathbf{X}^{(n)}$:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty,\, x]}(X_{(i)}), \tag{2.2.1}$$

nes skaičius tų X_i, kurie tenkina nelygybę $X_i \leq x$, lygus skaičiui $X_{(i)}$, tenkinančių nelygybę $X_{(i)} \leq x$.

Reikia pažymėti, kad $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$ yra surikiuoti pagal didumą empirinės pasiskirstymo funkcijos $\hat{F}_n$ realizacijos F_n šuolių taškai. Tarp šių taškų funkcija F_n pastovi. Jei visi $x_{(i)}$ skirtingi, tai šuolių didumai lygūs $1/n$:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei} \quad x < x_{(1)}, \\ \frac{i}{n}, & \text{jei} \quad x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ 1, & \text{jei} \quad x \geq x_{(n)}. \end{cases}$$

Jei kelių gretimų pozicinių statistikų realizacijos sutampa, šuoliukai didesni. Pavyzdžiui, jei $x_{(2)} < x_{(3)} = x_{(4)} = x_{(5)} < x_{(6)}$, tai šuoliukas taške $x_{(3)}$ lygus $3/n$.

Remiantis pozicinėmis statistikomis sudaromi kvantilių empiriniai analogai.

2.2.1 apibrėžimas. *Empiriniu kvantiliu* vadinamas p-ojo kvantilio $x(p) = \inf\{x : \ F(x) \geq p\}, \quad 0 < p < 1$, empirinis analogas

$$\hat{x}(p) = \sup\{x : \ \hat{F}_n(x) \leq p\} = \begin{cases} X_{(np)}, & \text{jei} \quad np \in N, \\ X_{([np]+1)}, & \text{kitais atvejais}; \end{cases} \tag{2.2.2}$$

čia $[np]$ yra skaičiaus np sveikoji dalis.

Pozicinės statistikos yra svarbios ne tik vertinant teorinius kvantilius, bet ir kuriant kai kuriuos neparametrinius kriterijus.

2.3. Pozicinių statistikų skirstiniai

Pozicinės statistikos yra priklausomi ir skirtingai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Ieškosime jų skirstinio. Jį svarbu žinoti patikimumo teorijoje, nes patikimumo eksperimentų laikas ribotas ir stebimi ne visi gedimai, o tik pirmieji iš jų.

Tarkime, kad paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint tolydųjį atsitiktinį dydį X, kurio pasiskirstymo funkcija yra $F(x)$ ir tikimybinis tankis $f(x)$. Priminsime, kad tokiu atveju a. d. $Y = F(X)$ turi tolygųjį skirstinį $Y \sim U(0,\ 1)$ ([11], p. 334). Šis sąryšis naudojamas ieškant pozicinių statistikų skirstinių. Todėl papildomai nagrinėsime ir a. d.

$$Y_{(1)} = F(X_{(1)}), \ldots, Y_{(n)} = F(X_{(n)}), \tag{2.3.1}$$

kurie yra pozicinės statistikos, gautos stebint a. d. $Y \sim U(0,\ 1)$. Jų skirstinys nepriklauso nuo $F(x)$.

2.3.1 teorema. *Atsitiktinio vektoriaus* $\mathbf{Y}^{(n)} = (Y_{(1)}, ..., Y_{(n)})^T$ *tankio funkcija yra*

$$f_{\mathbf{Y}^{(n)}}(y_{(1)}, ..., y_{(n)}) = \begin{cases} n!, & \textit{jei} \quad (y_{(1)}, ..., y_{(n)}) \in Q_{1n}, \\ 0, & \textit{kitais atvejais}; \end{cases} \tag{2.3.2}$$

čia

$$Q_{1n} = \{(y_{(1)}, ..., y_{(n)}) : \quad 0 \leq y_{(1)} \leq \cdots \leq y_{(n)} \leq 1\}.$$

Įrodymas. Atsitiktinis vektorius $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^T$ tolygiai pasiskirstęs vienetiniame n-matės erdvės kube; čia $Y_i = F(X_i), i = 1, ..., n$. Jo tankio funkcija

$$f_{\boldsymbol{Y}}(y_1, ..., y_n) = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad (y_1, ..., y_n) \in Q_{0n}, \\ 0, & \text{kitais atvejais;} \end{cases} \tag{2.3.3}$$

čia

$$Q_{0n} = \{(y_1, ..., y_n) : \quad 0 \le y_i \le 1, \quad i = 1, ..., n\}.$$

Aišku, kad $\mathbf{P}\{\boldsymbol{Y}^{(n)} \in Q_{1n}\} = 1$, t. y. atsitiktinio vektoriaus $\boldsymbol{Y}^{(n)}$ tikimybinė masė sukoncentruota aibėje Q_{1n}. Vektoriaus $(1, \dots, n)$ kėlinių aibę pažymėkime J. Tada su bet kuria Borelio aibe $B \subset Q_{1n}$,

$$\mathbf{P}\{\boldsymbol{Y}^{(n)} \in B\} = \sum_{(k_1,...,k_n) \in J} \mathbf{P}\{Y_{k_1}, \dots, Y_{k_n}\} \in B) =$$

$$= n!\,\mathbf{P}\{\boldsymbol{Y} \in B\} = n! \int_B f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}.$$

Iš čia gaunama (2.3.2) formulė. ▲

2.3.2 teorema. *Tarkime, kad* $1 \le k_1 < \cdots < k_r \le n$. *Atsitiktinio vektoriaus* $(Y_{(k_1)}, Y_{(k_2)}, \dots, Y_{(k_r)})^T$ *tankis yra*

$$f_{Y_{(k_1)},...,Y_{(k_r)}}(y_1, \dots, y_r) = \frac{n!}{(k_1 - 1)!(k_2 - k_1 - 1)! \dots (k_r - k_{r-1} - 1)!(n - k_r)!}$$

$$y_1^{k_1 - 1}(y_2 - y_1)^{k_2 - k_1 - 1} \dots (y_r - y_{r-1})^{k_r - k_{r-1} - 1}(1 - y_r)^{n - k_r} \tag{2.3.4}$$

sukoncentruotas aibėje $Q_{1r} = \{(y_1, ..., y_r) : \quad 0 \le y_1 \le \cdots \le y_r \le 1\}$.

Įrodymas. Įrodysime matematinės indukcijos metodu. Kai $r = n$, teorema teisinga remiantis (2.3.2) formule. Jei teiginys teisingas, kai turime $r + 1$ a. d., tai imant r a. d. tikimybinis tankis

$$f_{Y_{(k_1)},...,Y_{(k_r)}}(y_1, \dots, y_r) = \frac{n!}{(k_1 - 1)!(k_2 - k_1 - 1)! \dots (k_{r+1} - k_r - 1)!(n - k_{r+1})!}$$

$$y_1^{k_1 - 1} \dots (y_r - y_{r-1})^{k_r - k_{r-1} - 1} \int_{y_r}^1 (y_{r+1} - y_r)^{k_{r+1} - k_r - 1}(1 - y_{r+1})^{n - k_{r+1}} dy_{r+1}.$$

Atlikime kintamųjų keitimą: $u = (y_{r+1} - y_r)/(1 - y_r)$. Tada lygybės dešinėje esantis integralas lygus

$$(1 - y_r)^{n - k_r} \int_0^1 u^{k_{r+1} - k_r - 1}(1 - u)^{n - k_{r+1}} du$$

$$= (1 - y_r)^{n - k_r} \frac{(k_{r+1} - k_r - 1)!(n - k_{r+1})!}{(n - k_r)!}.$$

Teorema įrodyta. ▲

2.3.1 išvada. Pozicinė statistika $Y_{(k)}$ turi beta skirstinį $Be(k, n-k+1)$, kurio tankio funkcija

$$f_{Y_{(k)}}(y) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} y^{k-1}(1-y)^{n-k}, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

2.3.2 išvada. Ekstremalių reikšmių vektoriaus $(Y_{(1)}, Y_{(n)})^T$ tankio funkcija

$$f_{Y_{(i)},Y_{(n)}}(y_1, y_2) = n(n-1)(y_2 - y_1)^{n-2}, \quad 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1,$$

o imties plotis $Y_{(n)} - Y_{(1)}$ turi beta skirstinį $Be(n-1, 2)$, kurio tankio funkcija yra

$$\frac{n(n-1)}{2} y^{n-2}(1-y), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

2.3.3 teorema. *Tarkime, kad* $1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq n$. *Atsitiktinio vektoriaus* $(X_{(k_1)}, X_{(k_2)}, \ldots, X_{(k_r)})$ *tankis yra*

$$f_{X_{(k_1)},\ldots,X_{(k_r)}}(x_1, \ldots, x_r) = \frac{n!}{(k_1-1)!(k_2-k_1-1)!\ldots(k_r-k_{r-1}-1)!(n-k_r)!}$$

$$F^{k_1-1}(x_1)(F(x_2)-F(x_1))^{k_2-k_1-1}\ldots(F(x_r)-F(x_{r-1}))^{k_r-k_{r-1}-1}\times$$

$$(1-F(x_r))^{n-k_r}\, f(x_1), \ldots, f(x_r), \tag{2.3.5}$$

sukoncentruotas aibėje $Q_r = \{(x_1, \ldots, x_r): \quad -\infty < x_1 \leq \cdots \leq x_r < +\infty\}$.

Įrodymas. Tankio (2.3.5) išraiška gaunama iš tankio (2.3.4) formulės, panaudojus (2.3.1) transformaciją. Pakeitimo jakobianas

$$|J| = \left|\frac{D(y_1, \ldots, y_r)}{D(x_1, \ldots, x_r)}\right| = f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_r).$$

▲

2.3.3 išvada. Atsitiktinio vektoriaus $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ tankio funkcija yra

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} n!f(x_1), \ldots, f(x_n), & \text{jei} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in Q_n, \\ 0 & \text{kitais atvejais.} \end{cases} \tag{2.3.6}$$

2.3.4 išvada. k-osios pozicinės statistikos $X_{(k)}$ tankio funkcija yra

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k}f(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{2.3.7}$$

2.3.5 išvada. Ekstremalių reikšmių vektoriaus $(X_{(1)}, X_{(n)})^T$ tankio funkcija

$$n(n-1)(F(x_2)-F(x_1))^{n-2}f(x_1)f(x_2), \quad -\infty \leq x_1 \leq x_2 \leq \infty.$$

2.3.1 pavyzdys. *Pozicinės statistikos nuokrypio tikimybė.* Tegu paprastoji didumo $n = 50$ imtis gauta stebint a. d., kurio tankio funkcija $f(x|\mu) = 2e^{-2(x-\mu)}, \quad x > \mu$. Rasime tikimybę, kad $X_{(1)} - \mu \leq 0,05$.

Remiantis 2.3.4 išvada statistikos $X_{(1)}$ tankio funkcija yra

$$f_1(x) = 2ne^{-2n(x-\mu)}, \quad x > \mu.$$

Randame

$$\mathbf{P}\{X_{(1)} - \mu \leq 0,05\} = \int_{\mu}^{\mu+0,05} f_1(x)dx = 1 - e^{-2n0,05} = 1 - e^{-5} \approx 0,9933.$$

2.4. Pozicinių statistikų asimptotinės savybės

2.4.1 teorema. *Jei egzistuoja tolydi atvirkštinė funkcija F^{-1}, tai*

$$\hat{x}(p) \xrightarrow{P} x(p), \quad \textit{kai} \quad n \to \infty.$$

Įrodymas. Empirinis kvantilis $\hat{x}(p) = X_{(k)}$; čia $k = [np] + \delta$, $\delta = 0$, kai np yra sveikasis skaičius, ir $\delta = 1$ – priešingu atveju. Abiem atvejais $k/n = p + \mathrm{O}(1/n) \to p$, kai $n \to \infty$.

Atsitiktinis dydis $Y_{(k)} = F(X_{(k)}) \sim Be(k, \ \ n - k + 1)$, todėl

$$\mathbf{E}(Y_{(k)}) = \frac{k}{n+1} \to p, \quad \boldsymbol{V}(Y_{(k)}) = \frac{k(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)} \to 0.$$

Remiantis Čebyšovo nelygybe ([11], p. 144), su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{|Y_{(k)} - \mathbf{E}(Y_{(k)})| > \varepsilon\} \leq \frac{\boldsymbol{V}(Y_{(k)})}{\varepsilon^2} \to 0, \ \ n \to \infty.$$

Taigi $Y_{(k)} - \mathbf{E}(Y_{(k)}) \xrightarrow{P} 0$ ir

$$Y_{(k)} = Y_{(k)} - \mathbf{E}(Y_{(k)}) + \mathbf{E}(Y_{(k)}) \xrightarrow{P} p.$$

Remdamiesi a. d. sekų konvergavimo faktu: jei $X_n \xrightarrow{P} X$, o $h(x)$ yra tolydžioji funkcija, tai $h(X_n) \xrightarrow{P} h(X)$ ([15], 2c skyrelis) ir pažymėję, kad $X_{(k)} = F^{-1}(Y_{(k)})$ yra tolydžioji funkcija, gauname teoremos teiginį. ▲

2.4.2 teorema. *Jei pasiskirstymo funkcija F tolydžiai diferencijuojama taško $x(p)$ aplinkoje ir $f(x(p)) > 0$, tai*

$$\sqrt{n}(\hat{x}(p) - x(p)) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{p(1-p)}{f^2(x(p))}\right), \quad \textit{kai} \ \ n \to \infty. \qquad (2.4.1)$$

Įrodymas. Iš pradžių nagrinėjame atsitiktinį dydį $Y_{(k)}$. Kadangi $k = [np] + \delta_n$ ($\delta_n = 0$ arba $\delta_n = 1$), tai $k = np + \varepsilon_n$, $0 \le \varepsilon_n \le 1$. Pažymėkime

$$Z_k = \sqrt{n}(Y_{(k)} - p)/\sqrt{pq}, \quad q = 1 - p.$$

Tada $Y_{(k)} = p + Z_k\sqrt{pq/n}$, todėl, remiantis 2.3.1 išvada a. d. Z_k tankis

$$g_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(p + x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)^{k-1}\left(q - x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)^{n-k}\sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Reikia pažymėti, kad $k - 1 = np - 1 + \varepsilon_n$, $n - k = nq - \varepsilon_n$. Logaritmuodami ir taikydami Stirlingo formulę

$$\ln(n!) = (n + 1/2)\ln n - n + \ln(\sqrt{2\pi}) + \mathrm{O}(1/n),$$

gauname

$$\ln g_k(x) = \ln n! - \ln(np-1+\varepsilon_n)! - \ln(nq-\varepsilon_n)! + (np-1+\varepsilon_n)(\ln p + \ln(1+x\sqrt{q/pn}))$$
$$+(nq - \varepsilon_n)(\ln q + ln(1 - x\sqrt{p/qn})) + (\ln p + \ln q - \ln n)/2$$
$$= (n+1/2)\ln n - n + \ln(\sqrt{2\pi}) - (np-1/2+\varepsilon_n)\ln(np-1+\varepsilon_n) + np - 1 + \varepsilon_n - \ln\sqrt{2\pi}$$
$$-(nq-\varepsilon_n+1/2)\ln(nq-\varepsilon_n) + nq - \varepsilon_n - \ln\sqrt{2\pi} + (np-1+\varepsilon_n)(\ln p + \ln(1+x\sqrt{q/pn}))$$
$$+(nq - \varepsilon_n)(\ln q + \ln(1 - x\sqrt{p/qn}) + (\ln p + \ln q - \ln n)/2 + \mathrm{O}(1/n).$$

Skleidžiame logaritmus pagal Teiloro formulę ir apsiribojame pirmaisiais nariais:

$$\ln g_k(x) = (n + 1/2)\ln n - (np - 1/2 + \varepsilon_n)(\ln n + \ln p + \ln(1 + (\varepsilon_n - 1)/np)$$
$$-(nq - \varepsilon_n + 1/2)(\ln n + \ln q + \ln(1 - \varepsilon_n/nq)) - \ln\sqrt{2\pi} + (np - 1 + \varepsilon_n)(\ln p$$
$$+x\sqrt{q/pn} - qx^2/2pn) + (nq-\varepsilon_n)(\ln q - x\sqrt{p/qn} - px^2/2qn) + (\ln p + \ln q - \ln n)/2$$
$$-1 + \mathrm{O}(1/\sqrt{n}) = \ln n \cdot 0 + \ln p \cdot 0 + \ln q \cdot 0 - (np - 1/2 + \varepsilon_n)(\varepsilon_n - 1)/np$$
$$-(nq - \varepsilon_n + 1/2)(-\varepsilon_n/nq)) - \ln\sqrt{2\pi} + (np - 1 + \varepsilon_n)(x\sqrt{q/pn} - qx^2/2pn)$$
$$-(nq - \varepsilon_n)(x\sqrt{p/qn} + px^2/2qn) + \mathrm{O}(1/\sqrt{n}) = -\ln\sqrt{2\pi} - x^2/2 + \mathrm{O}(1/\sqrt{n}).$$

Taigi tolygiai visuose baigtiniuose x kitimo intervaluose

$$g_k(x) \to \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-x^2/2\}, \tag{2.4.2}$$

t. y. $Z_k \xrightarrow{d} Z \sim N(0,\ 1)$, arba $\sqrt{n}(Y_{(k)} - p) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ pq)$. Pritaikę delta metodą (žr. po teoremos įrodymo), gauname

$$\sqrt{n}(X_{(k)} - x(p)) \xrightarrow{d} V \sim N(0,\ pq/f^2(x(p))). \tag{2.4.3}$$

▲

Delta metodas. 1. Tarkime $T_n, n = 1, 2, ...$ yra tokia a. d. seka, kad

$$T_n \xrightarrow{P} \theta, \quad \sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{d} Y \sim N(0, \sigma^2(\theta)),$$

o $g(\theta)$ yra vieno kintamojo funkcija turinti tolydžią išvestinę $g'(\theta) \neq 0$. Tada

$$\sqrt{n}(g(T_n) - g(\theta)) \xrightarrow{d} Z \sim N(0, [g'(\theta)\sigma(\theta)]^2).$$

2. Tarkime $\boldsymbol{T}_n = (T_{1n}, ..., T_{kn})^T, n = 1, 2, ...$ yra tokia k-mačių a. v. seka, kad

$$\boldsymbol{T}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_k)^T, \quad \sqrt{n}(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Y} \sim N_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})).$$

Tegu $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) = (g_1(\boldsymbol{\theta}), ..., g_r(\boldsymbol{\theta}))^T$ yra r-matė funkcija, kurios visos koordinatės turi tolydžias dalines išvestines:

$$g_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial g_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}, \quad i = 1, ..., r, \quad j = 1, ..., k.$$

Pažymėkime $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta})$ matricą $[g_{ij}(\boldsymbol{\theta})]_{r \times k}$. Tada a. v. $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{T}_n) = (g_1(\boldsymbol{T}_n), ..., g_r(\boldsymbol{T}_n))^T$ seka yra asimptotiškai normalioji:

$$\sqrt{n}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{T}_n) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z} \sim N_r(\mathbf{0}, \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{G}^T(\boldsymbol{\theta})).$$

Analogiškai įrodoma kita teorema.

2.4.3 teorema. *Tegu pasiskirstymo funkcija $F(x)$ tolydžiai diferencijuojama taškų $x(p_1)$ ir $x(p_2)$ aplinkose ($0 < p_1 < p_2 < 1$) ir $f(x(p_1)) > 0, \ f(x(p_2)) > 0$. Tada*

$$\sqrt{n}(\hat{x}(p_1) - x(p_1), \ \ \hat{x}(p_2) - x(p_2))^T \xrightarrow{d} \boldsymbol{Y} \sim N(\mathbf{0}, \ \boldsymbol{\Sigma}); \tag{2.4.4}$$

kovariacinės matricos $\boldsymbol{\Sigma}$ diagonalieji elementai yra $p_1(1-p_1)/f^2(x(p_1))$ ir $p_2(1-p_2)/f^2(x(p_2))$, o kovariacija yra $p_1(1-p_2)/[f(x(p_1))f(x(p_2))]$.

2.4.1 pavyzdys. *Normaliojo skirstinio empirinės medianos asimptotinis skirstinys.* Tegu paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim N(\mu, \ \sigma^2)$. Šio skirstinio vidurkis sutampa su mediana $\mu = \mathbf{E}X = x(1/2)$. Imkime $\hat{x}(1/2) = X_{([n/2]+1)}$. Tada, remiantis (2.4.1) formule,

$$\sqrt{n}(\hat{x}(1/2) - \mu) \xrightarrow{d} Y \sim N\left(0, \ \frac{\pi\sigma^2}{2}\right). \tag{2.4.5}$$

2.4.2 pavyzdys. *Koši skirstinio empirinės medianos ir empirinių kvartilių skirtumo asimptotinis skirstinys.* Tarkime, kad paprastoji imtis gauta stebint a. d., turintį Koši skirstinį $K(\mu, \ \sigma)$, kurio tankis

$$f(x; \mu, \ \sigma) = \frac{1}{\pi}\frac{\sigma}{\sigma^2 + (x - \mu)^2}.$$

Šio skirstinio vidurkis neegzistuoja, o parametras μ yra mediana $\mu = x(1/2)$. Imkime $\hat{x}(1/2) = X_{([n/2]+1)}$. Tada gauname, kad

$$\sqrt{n}(\hat{x}(1/2) - \mu) \xrightarrow{d} Y \sim N\left(0, \ \frac{\pi^2\sigma^2}{4}\right). \tag{2.4.6}$$

Kadangi $x(1/4) = \mu - \sigma$, $x(3/4) = \mu + \sigma$, $x(3/4) - x(1/4) = 2\sigma$, tai pasirinkus $\hat{\sigma} = (\hat{x}(3/4) - \hat{x}(1/4))/2$, iš (2.4.4) sąryšio išplaukia

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma} - \sigma) \xrightarrow{d} Y \sim N\left(0, \ \frac{\pi^2\sigma^2}{4}\right). \tag{2.4.7}$$

2.4.3 pavyzdys. *Imties didumo radimas.* Koks turėtų būti paprastosios imties, gautos stebint a.d. $X \sim K(\mu, 1)$, didumas n, kad empirinės medianos nuokrypis nuo parametro μ absoliučiu didumu neviršytų 0,1 su tikimybe, ne mažesne už 0,95?

Taikydami normaliąją aproksimaciją, gauname

$$\mathbf{P}\{|\hat{x}(1/2) - \mu| \leq 0,1\} = \mathbf{P}\{\sqrt{n}|\hat{x}(1/2) - \mu| \leq 0,1\sqrt{n}\} \approx$$
$$2\Phi(0,2\sqrt{n}/\pi) - 1 \geq 0,95.$$

Iš čia randame

$$\frac{0,2\sqrt{n}}{\pi} \geq z_{0,025} \quad \Leftrightarrow n \geq \frac{\pi^2 1,96^2}{0,04} \quad \Leftrightarrow n \geq 948.$$

2.5. Empiriniai momentai

2.5.1. Empirinio momento sąvoka

Atsitiktinio dydžio X, kurio pasiskirstymo funkcija $F(x)$, k-asis pradinis momentas α_k ir k-asis centrinis momentas μ_k apibrėžiami lygybėmis

$$\alpha_k = \mathbf{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x) \quad \text{ir} \quad \mu_k = \mathbf{E}(X - \alpha_1)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \alpha_1)^k dF(x). \tag{2.5.1}$$

Empiriniai momentai gaunami šiose lygybėse pasiskirstymo funkciją F pakeitus empirine pasiskirstymo funkcija $\hat{F}_n$.

2.5.1 apibrėžimas. *Atsitiktiniai dydžiai*

$$a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k d\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

ir

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a_1)^k d\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a_1)^k \tag{2.5.2}$$

atitinkamai vadinami k-uoju pradiniu ir k-uoju centriniu empiriniais momentais.

Iš Niutono binomo formulės gaunama

$$m_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i a_1^i a_{k-i}.$$

Pirmasis pradinis empirinis momentas $a_1 = \bar{X}$ vadinamas *empiriniu vidurkiu* :

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{2.5.3}$$

Antrasis empirinis centrinis momentas m_2 vadinamas *empirine dispersija* :

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = a_2 - a_1^2. \tag{2.5.4}$$

Empiriniai asimetrijos ir eksceso koeficientai yra skirstinio F asimetrijos ir eksceso koeficientų $\gamma_1 = \mu_3/\mu_2^{3/2}, \quad \gamma_2 = \mu_4/\mu_2^2 - 3$ empiriniai analogai:

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}, \quad g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3. \tag{2.5.5}$$

Priminsime, kad jei $\gamma_1 = 0$, $\gamma_1 > 0$ arba $\gamma_1 < 0$, tai tikimybinis tankis (tolydusis skirstinys) ir tikimybių diagrama (diskretusis skirstinys) yra atitinkamai simetriniai, turi dešiniąją asimetriją arba kairiąja asimetriją.

Standartinio normaliojo skirstinio $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Jei $\gamma_2 > 0$ ($\gamma_2 < 0$), tai tankio grafikas, palyginti su standartinio normaliojo skirstinio tankiu, atitinkamai smailesnis arba plokštesnis.

Tikimybinio tankio empiriniai analogai nagrinėjami 2.6 skyrelyje. Empirinių tankio analogų realizacijų formos ir atitinkamų empirinių koeficientų g_1 ir g_2 reikšmių ryšys atitinka tikimybinio tankio ir koeficientų γ_1 ir γ_2 reikšmių ryšius.

Turint atsitiktinio vektoriaus $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_m)^T$ paprastąją imtį

$$\mathbf{X}_1 = (X_{11}, \ldots, X_{1m})^T, \ldots, \mathbf{X}_n = (X_{n1}, \ldots, X_{nm})^T,$$

galima nagrinėti vidurkių vektoriaus

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_m)^T = \mathbf{E}(\mathbf{X}_i) = (\mathbf{E}(X_{i1}), \ldots, \mathbf{E}(X_{im}))^T,$$

kovariacinės matricos

$$\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{kl}]_{m\times m} = [\mathbf{Cov}(X_{ik}, X_{il})]_{m\times m}$$

ir koreliacinės matricos

$$\boldsymbol{\rho} = [\rho_{kl}]_{m\times m} = \left[\frac{\mathbf{Cov}(X_{ik}, X_{il})}{\{\boldsymbol{V}(X_{ik})\boldsymbol{V}(X_{il})\}^{1/2}}\right]_{m\times m}$$

empirinius analogus.

Empirinis vidurkių vektorius

$$\bar{\mathbf{X}} = (\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_m)^T,$$

empirinė kovariacinė matrica

$$\boldsymbol{S} = [s_{kl}]_{m\times m},$$

empirinė koreliacinė matrica

$$\boldsymbol{r} = [r_{kl}]_{m\times m}.$$

Šiose formulėse empiriniai vidurkiai

$$\bar{X}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ik},$$

empirinės kovariacijos

$$s_{kl} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{ik} - \bar{X}_k)(X_{il} - \bar{X}_l), \quad k, l = 1, \ldots, m,$$

o empiriniai koreliacijos koeficientai

$$r_{kl} = \frac{s_{kl}}{\{s_{kk}s_{ll}\}^{1/2}};$$

čia

$$s_{kk} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{ik} - \bar{X}_k)^2.$$

Kaip ir nagrinėdami empirinę pasiskirstymo funkciją, parodysime, kad tam tikromis sąlygomis beveik visos empirinių momentų realizacijos konverguoja į atitinkamus visos populiacijos momentus, kai $n \to \infty$.

2.5.2. Empirinių momentų skirstiniai

Norėdami ištirti, kaip teoriniai momentai aproksimuojami empiriniais momentais, turime išnagrinėti jų savybes. Empiriniai momentai yra atsitiktiniai dydžiai, todėl jų savybes galime nusakyti tik tikimybiškai, t. y. nurodydami jų pasiskirstymo funkcijas ar tankius, jų skaitines charakteristikas ir pan.

Tarkime, $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis, gauta stebint a. d. X, kurio pasiskirstymo funkcija yra $F(x)$. Tada statistikos $T = T(\mathbf{X})$ pasiskirstymo funkcija yra

$$G(t) = \mathbf{P}\{T \le t\} = \int_{E_t} dF^{(n)}(\boldsymbol{x});$$

čia $E_t = \{\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)^T : T(x_1, ..., x_n) \le t\} \subset \mathbf{R}^n$, o

$$F^{(n)}(\boldsymbol{x}) = F(x_1) \cdots F(x_n).$$

Taigi teoriškai uždavinys dėl bet kurios statistikos (taip pat empirinių momentų) skirstinio išspręstas. Tačiau gana retai funkciją $G(t)$ pavyksta užrašyti naudojant žinomas funkcijas.

Išimtis – aritmetinis vidurkis $\bar{X}$, nes daugelis praktiškai naudojamų skirstinių turi šią savybę: pagal tą patį dėsnį vienodai pasiskirsčiusių n. a. d. sumos skirstinys yra to paties tipo kaip ir dėmenų (žr. 1.P.3 lentelę). Atsitiktinio dydžio $\bar{X}$ arba sumos $n\bar{X}$, gautų pagal paprastąją imtį, skirstinį paprasta rasti naudojant charakteristines funkcijas:

$$\varphi_{\bar{X}}(t) = [\varphi_{X_1}(t/n)]^n, \quad \varphi_{n\bar{X}}(t) = [\varphi_{X_1}(t)]^n. \tag{2.5.6}$$

Pavyzdžiui, (žr. 1.P.1 ir 1.P.2 lenteles):

$$\begin{aligned}
&\text{kai} \quad X_1 \sim N(\mu,\ \sigma^2), \quad \text{tai} \quad \varphi_{X_1}(t) = e^{i\mu t - t^2\sigma^2/2} \quad \text{ir} \quad \bar{X} \sim N(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n});\\
&\text{kai} \quad X_1 \sim K(\mu,\ \sigma), \quad \text{tai} \quad \varphi_{X_1}(t) = e^{i\mu t - |t|\sigma} \quad \text{ir} \quad \bar{X} \sim K(\mu,\ \sigma);\\
&\text{kai} \quad X_1 \sim G(\lambda,\ \eta), \quad \text{tai} \quad \varphi_{X_1}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^\eta \quad \text{ir} \quad n\bar{X} \sim G(\lambda,\ n\eta);\\
&\text{kai} \quad X_1 \sim B(k,\ p), \quad \text{tai} \quad \varphi_{X_1}(t) = (q + pe^{it})^k \quad \text{ir} \quad n\bar{X} \sim B(nk,\ p);\\
&\text{kai} \quad X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda), \quad \text{tai} \quad \varphi_{X_1}(t) = \exp\{-\lambda(1 - e^{it}) \quad \text{ir} \quad n\bar{X} \sim \mathcal{P}(n\lambda).
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Dažnai naudojamas normalusis skirstinys (vienmatis ar daugiamatis), todėl šiuo atveju yra detaliai išnagrinėti empirinių momentų ir kitų statistikų skirstiniai, sudarytos atitinkamos lentelės arba įtrauktos paprogramės į matematinės statistikos TPP. Suformuluosime keletą teiginių, kai yra vienmatis normalusis skirstinys.

2.5.1 teorema. *Tarkime, kad turime paprastąją imtį* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$, $X_i \sim N(\mu,\ \sigma^2)$. *Tada a. d.*

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j, \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2$$

nepriklausomi ir jų skirstiniai yra tokie:

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0,\ \ 1), \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \quad \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{s} \sim S(n-1). \tag{2.5.8}$$

Įrodymas. Atsitiktiniai dydžiai $\bar{X}$ ir $X_j - \bar{X}$ yra normalieji. Jeigu šių dydžių kovariacija lygi nuliui, tai jie yra nepriklausomi. Gauname

$$\mathbf{Cov}\,(\bar{X},\ \ X_j - \bar{X}) = \mathbf{Cov}\,(\bar{X},\ \ X_j) - \mathbf{Cov}\,(\bar{X},\ \ \bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = 0.$$

Kadangi $\bar{X}$ nepriklauso nuo visų skirtumų $X_j - \bar{X}$, $j = 1, ..., n$, o s^2 sudarytas tik iš tokių skirtumų, tai $\bar{X}$ ir s^2 nepriklausomi.

Pirmasis (2.5.8) tvirtinimas tiesiogiai išplaukia iš (2.5.7) sąryšių. Norėdami įrodyti antrąjį tvirtinimą, naudodamiesi ortonormuota matrica $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times n}$, t. y. tenkinančia lygybę $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T = \mathbf{I}$, čia $\mathbf{I}$ – vienetinė matrica, atlikime transformaciją $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}\mathbf{X}$. Tada gauname:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\mu},\ \ \boldsymbol{\mu} = (\mu, ..., \mu)^T, \quad \boldsymbol{V}(\boldsymbol{Y}) = \sigma^2\mathbf{B}\mathbf{I}\boldsymbol{B}^T = \sigma^2\mathbf{I}.$$

Taigi a. v. $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^T$ koordinatės yra nepriklausomi normalieji a. d., kurių dispersijos σ^2 vienodos. Parinkime matricos $\boldsymbol{B}$ pirmąją eilutę $(1/\sqrt{n}, ..., 1/\sqrt{n})$, o likusias – bet kokias, kad tik jos būtų ortogonalios tarpusavyje ir su pirmąja eilute. Tada:

$$Y_1 = \sqrt{n}\bar{X}, \quad \mathbf{E}(Y_1) = \sqrt{n}\mu, \;\; \mathbf{E}(Y_i) = (b_{i1}, \dots, b_{in})(\mu, ..., \mu)^T = 0, \quad i = 2, \dots n.$$

Kai transformacija ortonormuotoji, tai

$$(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{B\mu})^T(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{B\mu}) = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}).$$

Įstatę Y_1 ir $\mathbf{E}(Y_i)$ išraiškas į šią lygybę, gauname

$$\sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2 = n(\bar{X} - \mu)^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2.$$

Kairiosios šios lygybės pusės skliaustuose pridėję ir atėmę $\bar{X}$, gauname

$$\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2 = n(\bar{X} - \mu)^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2.$$

Suprastinę ir padalije iš σ^2, įsitikiname, kad

$$\frac{s^2(n-1)}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 = \left(\frac{Y_2}{\sigma}\right)^2 + \dots + \left(\frac{Y_n}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1).$$

Trečiąjį (2.5.8) tvirtinimą gauname iš dviejų pirmųjų pasinaudoję $\bar{X}$ ir s^2 nepriklausomumu ir Stjudento skirstinio apibrėžimu: jei a. d. $Z \sim N(0,\ 1)$ ir χ_n^2 yra nepriklausomi, tai santykis $Z/\sqrt{\chi_n^2/n} \sim S(n)$ turi Stjudento skirstinį su n laisvės laipsnių.

▲

2.5.1 pastaba. Jeigu parametras μ žinomas, tai dispersijos σ^2 empirinis analogas yra

$$s_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2. \tag{2.5.9}$$

Akivaizdu, kad $s_0^2 n/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$.

2.5.3. Empirinių momentų savybės

Tikslius empirinių momentų skirstinius ne visada pasiseka rasti, tad tenka apsiriboti jų skaitinėmis charakteristikomis ir apytiksliais (asimptotiniais) skirstiniais, kai imties didumas $n \to \infty$.

Nagrinėsime paprastąją imtį $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$, gautą stebint a. d. X. Tarsime, kad a. d. X teoriniai momentai (pradiniai – $\alpha_k = \mathbf{E}X^k$, $\alpha_1 = \mu = \mathbf{E}X$; centriniai – $\mu_k = \mathbf{E}(X - \mu)^k$, $\mu_2 = \sigma^2 = \boldsymbol{V}X$), kurie bus aptinkami tolesnėse formulėse, egzistuoja.

1. *Empirinis vidurkis.* Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai $X_1, ..., X_n$, kaip ir stebimasis a. d. X, yra vienodai pasiskirstę, todėl

$$\mathbf{E}\bar{X} = \mu, \quad \boldsymbol{V}\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \mathbf{E}(\bar{X}-\mu)^3 = \frac{\mu_3}{n^2},$$
$$\mathbf{E}(\bar{X}-\mu)^4 = \frac{3\sigma^4}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\sigma^4}{n^3}. \tag{2.5.10}$$

Taigi $\bar{X}$ dispersija ir eksceso koeficientas yra n kartų, o asimetrijos koeficientas – $\sqrt{n}$ kartų mažesni už stebimo atsitiktinio dydžio X atitinkamas charakteristikas.

Taikydami sustiprintą didžiųjų skaičių dėsnį ir centrinę ribinę teoremą ([11], p. 159, p. 215), gauname

$$\bar{X} \overset{b.v.}{\to} \mu, \quad \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \overset{d}{\to} Z \sim N(0,\ 1), \text{ kai } n \to \infty. \tag{2.5.11}$$

2. *Aukštesniųjų eilių pradiniai empiriniai momentai.* Kadangi

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^k, \quad k = 2, 3, ...,$$

išreiškiama vienodai pasiskirsčiusių nepriklausomų a. d. X_j^k suma, tai analogiškai gauname:

$$\mathbf{E}a_k = \alpha_k, \quad \boldsymbol{V}a_k = \frac{\alpha_{2k} - \alpha_k^2}{n}, \quad \mathbf{Cov}\,(a_k,\ a_l) = \frac{\alpha_{k+l} - \alpha_k\alpha_l}{n} \tag{2.5.12}$$

ir

$$a_k \overset{b.v.}{\to} \alpha_k, \quad \sqrt{n}\frac{a_k - \alpha_k}{\sqrt{\alpha_{2k} - \alpha_k^2}} \overset{d}{\to} Z \sim N(0,\ 1), \text{ kai } n \to \infty. \tag{2.5.13}$$

Panagrinėkime atsitiktinį vektorių

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_k)^T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{Y}_i, \tag{2.5.14}$$

kuris išreiškiamas vienodai pasiskirsčiusių n. a. v. $\mathbf{Y}_i = (X_i, X_i^2, ..., X_i^k)^T$ suma. Dėmens vidurkis $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)^T$ ir kovariacinė matrica $\mathbf{\Sigma} = [\alpha_{i+j} - \alpha_i\alpha_j]_{k\times k}$. Remdamiesi daugiamate CRT ([15], 2c skyrelis), gauname

$$\sqrt{n}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\alpha}) \overset{d}{\to} \boldsymbol{Z} \sim N_k(\mathbf{0},\ \mathbf{\Sigma}), \text{ kai } n \to \infty. \tag{2.5.15}$$

3. *Empirinė dispersija.* Nagrinėti empirinę dispersiją

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2 = a_2 - \bar{X}^2 \tag{2.5.16}$$

arba statistiką

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2, \tag{2.5.17}$$

kaip ir kitus aukštesnės eilės centrinius momentus, yra sudėtingiau, nes (2.5.16) ir (2.5.17) formulėse sumų dėmenys yra priklausomi.

2.5.2 teorema. *Jei egzistuoja* $\sigma^2 = \boldsymbol{V}X_i$, *tai*

$$\mathbf{E}m_2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2, \quad \mathbf{E}s^2 = \sigma^2. \tag{2.5.18}$$

Be to, jei egzistuoja $\alpha_4 = \mathbf{E}X_i^4$, *tai*

$$\boldsymbol{V}m_2 = \frac{\mu_4 - \sigma^4}{n} - \frac{2(\mu_4 - 2\sigma^4)}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\sigma^4}{n^3}. \tag{2.5.19}$$

Įrodymas. Atkreipiame dėmesį, kad a. d. m_2 (kaip ir kitų empirinių centrinių momentų) skirstinys nepriklauso nuo vidurkio $\mathbf{E}X = \mu$ (pridėjus prie visų X_j konstantą, prie $\bar{X}$ prisideda ta pati konstanta). Todėl nagrinėdami centrinius empirinius momentus ir nesiaurindami prasmės galime tarti, kad $\mathbf{E}X = \mu = 0$, $\mathbf{E}X^k = \alpha_k = \mu_k$.

Gauname

$$\mathbf{E}m_2 = \mathbf{E}a_2 - \mathbf{E}(\bar{X}^2) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2. \tag{2.5.20}$$

Tada

$$\mathbf{E}s^2 = \frac{n}{n-1}\mathbf{E}m_2 = \sigma^2.$$

Atsitiktinio dydžio m_2 dispersija

$$\boldsymbol{V}m_2 = \mathbf{E}m_2^2 - (\mathbf{E}m_2)^2 = \mathbf{E}(a_2 - \bar{X}^2)^2 - (n-1)^2\sigma^4/n^2. \tag{2.5.21}$$

Tada (primename, kad $\mathbf{E}X_i = 0, \ \ i = 1, 2, ..., n$)

$$\mathbf{E}a_2^2 = \frac{1}{n^2}\mathbf{E}(\sum_j X_j^2)^2 = \frac{\mu_4 + (n-1)\sigma^4}{n},$$

$$\mathbf{E}(a_2\bar{X}^2) = \frac{1}{n^3}\mathbf{E}(\sum_j X_j^2(\sum_i X_i^2 + \sum_{i\neq k} X_iX_k)) = \frac{\mu_4 + (n-1)\sigma^4}{n^2},$$

$$\mathbf{E}\bar{X}^4 = \frac{1}{n^4}\mathbf{E}(\sum_j X_j^2 + \sum_{i\neq k} X_iX_k)^2 = \frac{1}{n^4}\mathbf{E}(\sum_j X_j^4 + \sum_{j\neq l} X_j^2X_l^2$$

$$+2\sum_j X_j^2 \sum_{i\neq k} X_iX_k + \sum_{i\neq k} X_iX_k \sum_{i'\neq k'} X_{i'}X_{k'}) = \frac{\mu_4 + 3(n-1)\sigma^4}{n^3}.$$

Įstatę į (2.5.21) išraišką ir sutraukę panašius narius, gauname (2.5.19) lygybę. ▲

2.5.1 išvada. Jei tenkinamos teoremos sąlygos, tai

$$\boldsymbol{V}m_2 = \frac{\mu_4 - \sigma^4}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{2.5.22}$$

2.5.3 teorema. *Jei egzistuoja* $\alpha_4 = \mathbf{E}X_i^4$, *tai:*

$$m_2 \xrightarrow{b.v} \sigma^2, \quad s^2 \xrightarrow{b.v} \sigma^2, \quad \sqrt{n}(m_2-\sigma^2) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ \mu_4-\sigma^4), \quad \sqrt{n}(s^2-\sigma^2) \xrightarrow{d} Y. \tag{2.5.23}$$

Įrodymas. Ieškant m_2 ribų, pakanka pasinaudoti sąryšiu $m_2 = a_2 - \bar{X}^2$, stipriuoju didžiųjų skaičių dėsniu, daugiamate CRT ir delta metodu (žr. 2.4 skyrelį ir [15] 2c skyrelį).▲

4. *Aukštesniųjų eilių centriniai empiriniai momentai.* Kaip ir empirinės dispersijos atveju, aukštesniųjų eilių momentai

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^k, \quad k \geq 3, \tag{2.5.24}$$

yra paslinktieji atitinkamų teorinių momentų įvertiniai. Pavyzdžiui:

$$\mathbf{E}m_3 = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\mu_3 = \mu_3 + O(\frac{1}{n}),$$

$$\mathbf{E}m_4 = \frac{(n-1)(n^2-3n+3)}{n^3}\mu_4 + \frac{3(n-1)(2n-3)}{n^3}\sigma^4 = \mu_4 + O(\frac{1}{n}). \tag{2.5.25}$$

Esant dideliems k, centrinių empirinių momentų skaitinių charakteristikų išraiškos gana gremėzdiškos, todėl natūralu apsiriboti pagrindinėmis jų dalimis, tariant, kad imties didumas $n \to \infty$.

2.5.4 teorema. *Jei egzistuoja momentas* α_{2k}, *tai:*

$$m_k \xrightarrow{b.v.} \mu_k, \quad \sqrt{n}(m_k - \mu_k) \xrightarrow{d} Z_k \sim N\left(0, \mu_{2k} - 2k\mu_{k-1}\mu_{k+1} - \mu_k^2 + k^2\mu_2\mu_{k-1}^2\right). \tag{2.5.26}$$

Įrodymas. Pradinių empirinių momentų konvergavimas beveik visur įrodytas, todėl

$$m_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i a_1^i a_{k-i} \xrightarrow{b.v.} \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i \alpha_1^i \alpha_{k-i} = \mu_k.$$

Kadangi $\mu_k = \mathbf{E}(X_i - \alpha_1)^k$, tai $Y_i = X_i - \alpha_1$ pradiniai momentai sutampa su X_i tos pačios eilės centriniais momentais. Be to, $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^k$. Todėl galime tarti, kad išraiškoje

$$m_k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j a_1^{k-j} a_j$$

a. d. a_j yra atsitiktinių dydžių Y_i pradiniai empiriniai momentai. Taigi $\alpha_1 = 0$. Pasinaudoję daugiamate CRT ir delta metodu (žr. 2.4 skyrelį ir [15] 2c skyrelį), gauname

$$\sqrt{n}(m_k - \alpha_k) \xrightarrow{d} V \sim N(0,\ b_k^2);$$

čia $b_k^2 = \boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\psi}$, o $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, ..., \psi_k)^T$ yra vektorius, kurio j-oji koordinatė ψ_j yra funkcijos m_k dalinė išvestinė pagal a_j taške $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)^T$, $\boldsymbol{\Sigma} = [\alpha_{i+j} - \alpha_i\alpha_j]_{k\times k}$. Tada:

$$\psi_1 = -k\alpha_{k-1}, \quad \psi_2 = \psi_3 = \cdots = \psi_{k-1} = 0, \quad \psi_k = 1;$$

$$\begin{aligned} b_k^2 = \boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\psi} &= \psi_1^2\alpha_2 + 2\psi_1\psi_k\alpha_{k+1} + \psi_k^2(\alpha_{2k} - \alpha_k^2) = \\ &= \alpha_{2k} - \alpha_k^2 - 2k\alpha_{k-1}\alpha_{k+1} + k^2\alpha_{k-1}^2\alpha_2. \end{aligned}$$

Belieka paskutinėje išraiškoje pakeisti dydžių Y_i pradinius momentus dydžių X_i centriniais momentais. ▲

Analogiškai galime gauti ir daugiamatę CRT imdami vektorius, sudarytus iš keleto centrinių momentų.

4. *Empirinių momentų funkcijos.* Empiriniai momentai yra simetrinės stebėjimų $X_1, X_2, ..., X_n$ polinominio tipo funkcijos. Tačiau naudojamos ir sudėtingesnės funkcijos. Pavyzdžiui, empirinis asimetrijos koeficientas yra trupmena, kurios skaitiklyje yra trečiojo laipsnio polinomas, o vardiklyje – kvadratinė šaknis iš šeštojo laipsnio polinomo.

Tarkime, $H(a_{k_1}, ..., a_{k_r})$ yra pradinių empirinių momentų $a_{k_1},..., a_{k_r}$, $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ (tai nesiaurina prasmės, nes centrinius momentus galime išreikšti pradiniais) funkcija. Jeigu egzistuoja $\alpha_{2k_r} = \mathbf{E}(X^{2k_r})$, tai pagal daugiamatę CRT

$$\sqrt{n}\left((a_{k_1}, ..., a_{k_r})^T - (\alpha_{k_1}, ..., \alpha_{k_r})^T\right) \xrightarrow{d} V_r \sim N(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\Sigma}), \tag{2.5.27}$$

čia $\boldsymbol{\Sigma} = [\alpha_{k_i+k_j} - \alpha_{k_i}\alpha_{k_j}]_{k\times k}$.

2.5.5 teorema. *Tarkime, egzistuoja momentas α_{2k_r}, o funkcija H turi tolydžias dalines išvestines taško $(\alpha_{k_1}, ..., \alpha_{k_r})$ aplinkoje. Tada empirinių momentų funkcijos H skirstinys, kai $n \to \infty$, konverguoja į normalųjį skirstinį:*

$$\sqrt{n}(H(a_{k_1}, ..., a_{k_r}) - H(\alpha_{k_1}, ..., \alpha_{k_r})) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ B_r^2); \tag{2.5.28}$$

čia

$$B_r^2 = \boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\psi} = (\psi_1, ..., \psi_r)^T, \quad \psi_j = \frac{\partial H}{\partial a_{k_j}}\Big|_{(\alpha_{k_1}, ..., \alpha_{k_r})}, \ \ j = 1, 2, ..., r.$$

Įrodymas. Pakanka pritaikyti daugiamatę CRT ir delta metodą (žr. 2.4 skyrelį ir [15] 2c skyrelį). ▲

2.5.2 pastaba. Teorema pritaikoma ir tuo atveju, kai funkcija H yra vektorinė.

2.5.3 pastaba. Funkcijos H argumentai patys gali būti empirinių momentų funkcijos (pavyzdžiui, centriniai empiriniai momentai, empiriniai asimetrijos ar eksceso koeficientai, empirinis koreliacijos koeficientas ir kt.). Teorema pritaikoma, jeigu H turi tolydžias dalines išvestines, o vektoriui, sudarytam iš argumentų, galioja daugiamatė CRT.

2.5.4 pastaba. Centruojančios ir normuojančios konstantos H_0 ir B_r^2 nebūtinai sutampa su H vidurkiu ir dispersija ar jų pagrindinėmis dalimis. Kad tuo įsitikintume, pakanka panagrinėti pavyzdį.

Tarkime, kad paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ...X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim B(1,\ p)$. Tada:

$$\mathbf{E}\bar{X} = p, \quad \boldsymbol{V}\bar{X} = \frac{p\,(1-p)}{n}, \quad \sqrt{n}(\bar{X} - p) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ p\,(1-p)).$$

Nagrinėkime statistiką $H(\bar{X}) = 1/\bar{X}$. Funkcija $H(p) = 1/p$ yra tolydi ir turi tolydžias išvestines taško p, $0 < p < 1$, aplinkoje, $\psi = H'(p) = -1/p^2$, $\sigma_{11} = \alpha_2 - \alpha_1^2 = p\,(1-p)$, $B_1^2 = p\,(1-p)/p^4 = (1-p)/p^3$. Todėl

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\bar{X}} - \frac{1}{p}\right) \xrightarrow{d} V \sim N\left(0,\ \frac{1-p}{p^3}\right).$$

Akivaizdu, kad funkcija H neturi jokių momentų, nes $\mathbf{P}\{\bar{X} = 0\} = (1-p)^n > 0$.

Keleto dažniau naudojamų empirinių charakteristikų vidurkiai, dispersijos ir kovariacijos (arba jų pagrindinės dalys) pateiktos 1.27–1.28 pratimuose (žr. taip pat [2], [10]). Šiuose pratimuose išskirtas svarbiausias normalusis skirstinys. Tokių charakteristikų prireikia nagrinėjant empirinių momentų funkcijas ir formuluojant CRT.

2.5.1 pavyzdys. *Empirinių asimetrijos ir eksceso koeficientų nuokrypių nuo teorinių tikimybės.* Tegu turime didumo $n = 100$ imtį, gautą stebint a. d. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Rasime tikimybes, kad empiriniai asimetrijos ir eksceso koeficientai skiriasi nuo teorinių absoliučiu didumu ne daugiau kaip 0,5.

Taikydami normaliąją aproksimaciją (pirmųjų momentų išraiškos pateiktos 2.27 pratime), gauname

$$\mathbf{P}\{|g_1| \le 0,5\} \approx 2\Phi(0,5\sqrt{(n+1)(n+3)/(6(n-1))}) - 1 = 0,9636,$$

$$\mathbf{P}\{|g_2| \le 0,5\} \approx \Phi((0,5 + 6/(n+1))/\sqrt{\boldsymbol{V}(g_2)}) - \Phi((-0,5 + 6/(n+1))/\sqrt{\boldsymbol{V}(g_2)}) = \Phi(1,2301) - \Phi(-0,9689) = 0,7244.$$

2.6. Empiriniai tikimybinio tankio analogai

2.6.1. Diskretieji skirstiniai: stulpelių diagrama

Diskrečiojo atsitiktinio dydžio, kurio galimos reikšmės yra $b_1, b_2, \ldots$, skirstinys vienareikšmiškai nusakomas tikimybėmis $p_i = \mathbf{P}\{X = b_i\}$. Jei imties $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ realizacija yra $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, tai tikimybes p_i galima aproksimuoti dažniais d_i/n; čia d_i yra skaičius x_j, lygių b_i. Šie dažniai yra realizacijos atsitiktinių dydžių

$$\hat{p}_i = D_i/n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{b_i\}}(X_j);$$

čia D_i yra skaičius a. d. X_j, lygių b_i. Atsitiktinis dydis D_i turi binominį skirstinį $B(n, p_i)$, taigi

$$\mathbf{E}(\hat{p}_i) = p_i, \quad \boldsymbol{V}(\hat{p}_i) = \frac{1}{n}p_i(1-p_i).$$

Iš stipriojo didžiųjų skaičių dėsnio ir centrinės ribinės teoremos išplaukia, kad

$$\hat{p}_i \xrightarrow{b.v.} p_i, \quad \sqrt{n}(\hat{p}_i - p_i) \xrightarrow{d} N\left(0, p_i(1-p_i)\right).$$

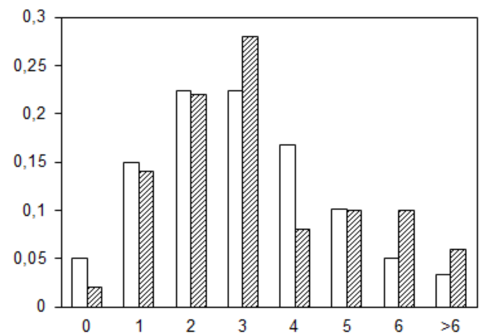
Diskrečiojo a. d. skirstinį gerai iliustruoja ***stulpelių diagrama***: aukščio (d_i/n) (ar d_i) stulpeliai virš taškų b_i.

2.6.1 pavyzdys. Lentelėje pateikiami stebiniai, gauti $n = 50$ kartų modeliuojant Puasono atsitiktinį dydį $X \sim \mathcal{P}(3)$ (m_i – skaičius imties reikšmių, lygių i, $i = 0, 1, \ldots$).

2.6.1 lentelė. A.d. $X \sim \mathcal{P}(3)$ imties realizacija

i	0	1	2	3	4	5	6	>6	Σ
m_i	1	7	11	14	4	5	5	3	50

Stulpelių diagrama, sudaryta remiantis šios lentelės stebiniais (tamsūs stulpeliai), pavaizduota **2.6.1 pav.** Kad palyginti pavaizduotos tikimybės $p_i = \mathbf{P}\{X = i\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ (šviesūs stulpeliai).



2.6.1 pav. Stulpelių diagrama

2.6.2. Tolydieji skirstiniai: histograma

Tolydžiojo skirstinio tankis $f(x)$ daug vaizdžiau parodo skirstinio savybes negu pasiskirstymo funkcija $F(x)$.

Turint imties realizaciją, tankis f gali būti aproksimuotas tokiu būdu. Atsitiktinių dydžių X_i realizacijų reikšmių sritis $\mathcal{X}$ yra padalijama į ilgio h intervalus $(a_{i-1}, a_i]$: $\mathcal{X} = \bigcup_i (a_{i-1}, a_i]$. Jei $h = a_i - a_{i-1}$ yra mažas, tai su bet kuriuo $x \in (a_{i-1}, a_i]$

$$F(a_i) - F(a_{i-1}) \approx f(x)h,$$

taigi tankio reikšmė $f(x)$ nedaug skiriasi nuo

$$f_n(x) = \frac{1}{h}\left(F_n(a_i) - F_n(a_{i-1})\right) = \frac{1}{nh}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{(a_{i-1}, a_i]}(x_j) = \frac{n_i}{nh}; \qquad (2.6.1)$$

čia F_n yra empirinės pasiskirstymo funkcijos realizacija, o n_i – skaičius tų x_j, kurie priklauso intervalui $(a_{i-1}, a_i]$.

2.6.1 apibrėžimas. Funkcijos $f_n(x)$ grafikas (ir pati funkcija) vadinamas *histograma*.

Jei n fiksuotas, ypač svarbu parinkti h. Jei h labai mažas, tai intervaluose $(a_{i-1}, a_i]$ dažniausiai nebus x_j arba bus tik vienas iš x_j. Pirmu atveju apskritai nebūtų stulpelio virš intervalo, o antruoju – labai aukštas stulpelis (žr. 3.6.2 pav., a)). Iš tokio grafiko nieko negalima pasakyti apie tankio pavidalą. Atvirkščiai, jei h didelis, tai gaunami du ar trys platūs stulpeliai (žr. 3.6.2 pav., c)). Tai taip pat nėra vaizdu.

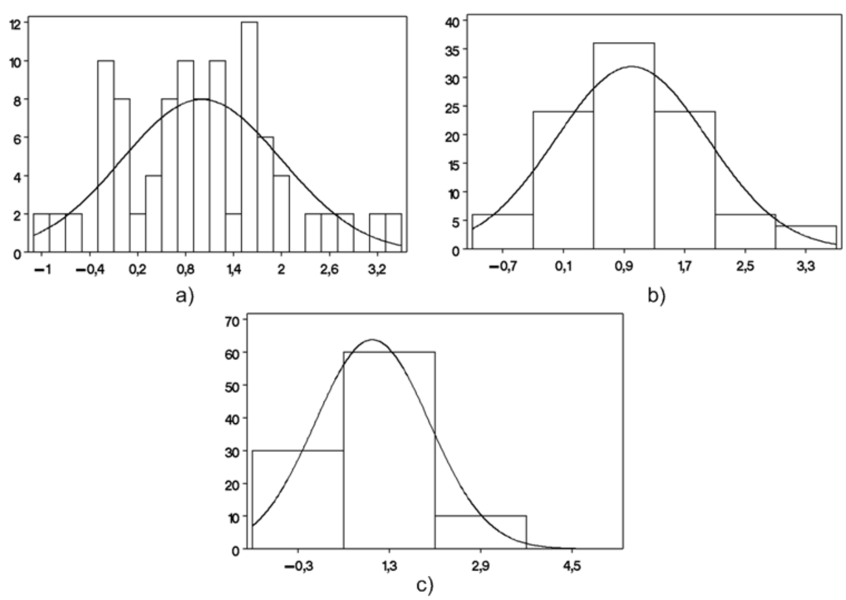
2.6.2 pavyzdys. Lentelėje pateikiami stebiniai, gauti $n = 50$ kartų modeliuojant atsitiktinį dydį $X \sim N(1, 1)$. Stebiniai sugrupuoti į $h = 0,2$ ilgio intervalus (x_i yra i-ojo intervalo vidurys, m_i – skaičius stebinių, patekusių į i-ąjį intervalą).

2.6.2 lentelė. A.d. $X \sim N(1, 1)$ imties realizacija

x_i	-1,0	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
m_i	1	1	1	0	5	4	1	2	4	5	4	5

x_i	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4
m_i	1	6	3	2	0	1	1	1	0	1	1

Remiantis šiais stebiniais, sudaryta histograma pavaizduota **2.6.2** paveiksle: a) – kai grupavimo intervalo ilgis h yra labai mažas, b) – kai $h = 0,8$; c) – kai $h = 1,6$. Kad palyginti pavaizduota stebimo atsitiktinio dydžio tankio funkcija. Matome, kad atveju b) grupavimo intervalo ilgis parinktas geriau.



2.6.2 pav. Histogramų pavyzdžiai

Funkcija f_n yra realizacija atsitiktinės funkcijos $\hat{f}_n$, su visais i ir visais $x \in (a_{i-1}, a_i]$, apibrėžtos lygybe

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{(a_{i-1}, a_i]}(X_j) = \frac{N_i}{nh}; \qquad (2.6.2)$$

čia N_i yra a.d. – imties narių X_j, priklausančių intervalui $(a_{i-1}, a_i]$, skaičius. Atsitiktinė funkcija $\hat{f}_n$ vadinama *empiriniu tankiu.*

Jei h yra mažas ir nh didelis, tai su bet kuriuo x beveik visos $\hat{f}_n(x)$ realizacijos $f_n(x)$ artimos $f(x)$.

2.6.1 teorema. *Bet kuriame tankio f tolydumo taške x*

$$\hat{f}_n(x) \stackrel{b.v.}{\to} f(x), \quad \textit{kai } nh \to \infty, \quad h \to 0. \tag{2.6.3}$$

Įrodymas. Kadangi intervalų kraštai gali priklausyti nuo n, tai juos žymėsime $(a_{i-1,n}, a_{i,n}]$. Reikia pažymėti, kad bet kuriame fiksuotame tankio f tolydumo taške $x \in (a_{i-1,n}, a_{i,n}]$

$$| \mathbf{E}\left(\hat{f}_n(x)\right) - f(x) | = | \frac{1}{h}\left(F(a_{i,n}) - F(a_{i-1,n})\right) - f(x) |$$

$$= | \frac{1}{h}\int_{a_{i-1,n}}^{a_{in}} f(u)du - f(x) | \leq \sup_{y:|x-y|\leq h}|f(x) - f(y)| \to 0, \quad \text{kai} \quad h \to 0. \tag{2.6.4}$$

Turime

$$| \hat{f}_n(x) - f(x) | \leq | \hat{f}_n(x) - \mathbf{E}\left(\hat{f}_n(x)\right) | + | \mathbf{E}\left(\hat{f}_n(x)\right) - f(x) |, \tag{2.6.5}$$

$$\hat{f}_n(x) - \mathbf{E}\left(\hat{f}_n(x)\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \mathbf{E}(Y_j)), \quad Y_j = \frac{1}{h_n}\mathbf{1}_{(a_{i-1,n}, a_{i,n}]}(X_j).$$

Atsitiktiniai dydžiai Y_j yra nepriklausomi, jų vidurkiai

$$\mathbf{E}(Y_j) = \frac{1}{h}(F(a_{i,n}) - F(a_{i-1,n})),$$

ir dispersijos

$$\boldsymbol{V}(Y_j) = \frac{1}{h^2}(F(a_{i,n}) - F(a_{i-1,n}))(1 - F(a_{i,n}) + F(a_{i-1,n})).$$

Gauname

$$\frac{\boldsymbol{V}(Y_j)}{n} \leq \frac{1}{nh^2}\int_{a_{i-1,n}}^{a_{in}} f(y)dy \leq \frac{1}{nh}\sup_{y\in(a_{i-1,n}, a_{i,n}]} f(y) \to 0, \quad nh \to \infty, \ h \to 0.$$

Taigi Y_j yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, kurių $V(Y_j)/n \to 0$. Iš šio rezultato ir stipriojo didžiųjų skaičių dėsnio išplaukia, kad su bet kuriuo fiksuotu x

$$\hat{f}_n(x) - \mathbf{E}\left(\hat{f}_n(x)\right) \stackrel{b.v.}{\to} 0, \quad \text{kai } h \to 0, \quad nh \to \infty. \tag{2.6.6}$$

Iš (2.6.5) nelygybės ir (2.6.4) bei (2.6.6) konvergavimų gaunamas teoremos rezultatas. ▲

2.6.3. Tolydieji skirstiniai: branduolinis įvertinys

Histograma yra laiptinė funkcija. Kartais ji suglodinama. Paaiškinsime suglodinimo idėją.

Matėme, kad, naudojantis imties realizacija $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, pasiskirstymo funkcija F aproksimuojama kita pasiskirstymo funkcija F_n tokiu būdu: kiekvienam stebiniui x_i priskiriama tikimybinė masė $1/n$. Čia F_n yra diskrečiojo skirstinio (žr. 2.3.1 skyrelį) pasiskirstymo funkcija.

Jei žinoma, kad skirstinys yra tolydus, pasiskirstymo funkciją F galima priartinti, naudojantis tolydžiojo skirstinio pasiskirstymo funkcija, išsklaidant tikimybinę masę $1/n$ aplink x_i pagal kokį nors dėsnį.

Tarkime, kad $K(x)$ yra unimodalus tikimybinis tankis, įgyjantis maksimumą nuliniame taške. Jis vadinamas *branduoliu*. Su bet kuriuo $h > 0$ ir bet kuriuo i funkcija

$$f_{in}^*(x) = \frac{1}{h}\, K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

yra unimodalus tankis, kurio maksimumas įgyjamas taške x_i. Išsklaidome tikimybinę masę $1/n$ aplink x_i pagal skirstinį, apibrėžtą tankiu f_{in}^*. Taigi intervalas $(-\infty, x]$ iš šios masės gauna dalį

$$\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{x} f_{in}^*(u)du = \frac{1}{n}\, G\left(\frac{x - x_i}{h}\right);$$

čia $G(x) = \int_{-\infty}^{x} K(u)du$. Tada visiems taškams priskiriama tikimybinė masė 1, išdėstyta pagal skirstinį su pasiskirstymo funkcija ir tankiu:

$$F_n^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \quad f_n^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h}K\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

Pasiskirstymo funkcija F_n^* ir tikimybinis tankis f_n^* yra atsitiktinių funkcijų

$$\hat{F}_n^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \tag{2.6.7}$$

ir

$$\hat{f}_n^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h}K\left(\frac{x - X_i}{h}\right). \tag{2.6.8}$$

realizacijos.

Reikia pasakyti, jei $G(u) = \mathbf{1}_{[0,\,\infty)}(u)$, tai

$$\hat{F}_n^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{[0,\,\infty)}(\frac{x - X_i}{h}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty,\,x]}(X_i) = \hat{F}_n(x)$$

sutampa su empirine pasiskirstymo funkcija.

2.6.2 apibrėžimas. Atsitiktinis funkcija, apibrėžta (2.6.8) lygybe, vadinama tankio f *branduoliniu įvertiniu.*

Jei n fiksuotas ir h yra mažas, tai tankis f_n^* turi aukštus pikus taškuose x_i (tikimybės masė sukoncentruota trumpuose intervaluose aplink x_i). Jei h didelis, tankis f_n^* plokščias. Geriausių rezultatų gaunama esant tarpinėms h reikšmėms.

Parodysime, kad jei h mažas ir nh didelis, tai $\hat{f}_n^*$ artimas f. Atstumas tarp $\hat{f} = \hat{f}_n^*$ ir f dažnai apibrėžiamas taip:

$$d(\hat{f}, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\left(\hat{f}(x) - f(x)\right)^2 dx.$$

2.6.2 teorema. *Tarkime, kad funkcija f du kartus tolydžiai diferencijuojama ir*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid f''(x) \mid^2 dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} yK(y) = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 K(y) < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) dy < \infty.$$

Tada egzistuoja tokia konstanta $C > 0$, kad su mažais $h > 0$

$$d(\hat{f}, f) \le C\left(\frac{1}{nh} + h^4\right).$$

Įrodymas. Turime

$$d(\hat{f}, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{V}\left(\hat{f}(x)\right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathbf{E}\hat{f}(x) - f(x)\right)^2 dx. \tag{2.6.9}$$

Atsitiktiniai dydžiai X_i yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę, todėl

$$\boldsymbol{V}\left(\hat{f}(x)\right) = \frac{1}{nh^2} \boldsymbol{V}\left(K\left(\frac{x - X_1}{h}\right)\right) \le \frac{1}{nh^2} \mathbf{E}\left(K^2\left(\frac{x - X_1}{h}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{nh^2} \int_{-\infty}^{\infty} K^2\left(\frac{x-u}{h}\right) f(u) du = \frac{1}{nh} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) f(x - hy) dy \tag{2.6.10}$$

ir pirmasis (2.6.9) lygybės narys yra

$$\frac{1}{nh} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) f(x - hy) dy\right) dx$$

$$= \frac{1}{nh} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x - hy) dx\right) dy = \frac{1}{nh} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(y) dy \le \frac{C_1}{nh}, \tag{2.6.11}$$

čia $C_1 > 0$ yra konstanta.

Iš sąlygos $\int_{-\infty}^{\infty} yK(y) = 0$ ir Teiloro formulės su Laplaso formos liekamuoju nariu

$$f(x + a) - f(x) = af'(x) + a^2 \int_0^1 f''(x + av)(1 - v) dv$$

išplaukia (imant $a = -hy$)

$$\mathbf{E}\{\hat{f}(x)\} - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{x-u}{h}\right) f(u)du - f(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K(y)\{f(x-hy) - f(x)\}dy = h^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 y^2 K(y) f''(x-hyv)(1-v)dvdy$$

$$= h^2 \mathbf{E}\{Y^2 f''(x-hYV)(1-V)\} = h^2 \mathbf{E}(YZ),$$

čia Y tankis yra $K(y)$, o V turi tolygųjį skirstinį intervale $[0,1]$, Y ir V nepriklausomi a. d., $Z = Yf''(x-hYV)(1-V)$. Remiantis Koši ir Švarco nelygybe

$$\{\mathbf{E}(YZ)\}^2 \le \mathbf{E}(Y^2)\mathbf{E}(Z^2)$$

turime

$$\left(\mathbf{E}\hat{f}(x) - f(x)\right)^2$$

$$\le h^4 \int_{-\infty}^{\infty} v^2 K(v)dv \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 y^2 K(y)\{f''(x-hyv)\}^2(1-v)^2 dvdy.$$

Integruodami x atžvilgiu, gauname

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathbf{E}\hat{f}(x) - f(x)\right)^2 \le h^4 \int_{-\infty}^{\infty} v^2 K(v)dv\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} y^2 K(y)dy \int_0^1 (1-v)^2 dv \int_{-\infty}^{\infty} \{f''(x-hyv)\}^2 dx \le C_2 h^4, \qquad (2.6.12)$$

nes paskutinis integralas yra $\int_{-\infty}^{\infty}\{f''(x)\}^2dx$. Iš (2.6.9)–(2.6.12) formulių gaunamas teoremos teiginys.

▲

2.6.1 išvada. Jei $h \sim n^{-1/5}$, tai $d(\hat{f}, f) = O(n^{-4/5})$.

2.6.1 pastaba. Galima įrodyti bendresnę teoremą, kuri tvirtina, kad jei f yra m kartų tolydžiai diferencijuojama ir $\int_{-\infty}^{\infty} \mid f^{(m)}(x) \mid^2 dx < \infty$, tai egzistuoja tokia konstanta $C > 0$, kad su mažais $h > 0$

$$d(\hat{f}, f) \le C\left(\frac{1}{nh} + h^{2m}\right).$$

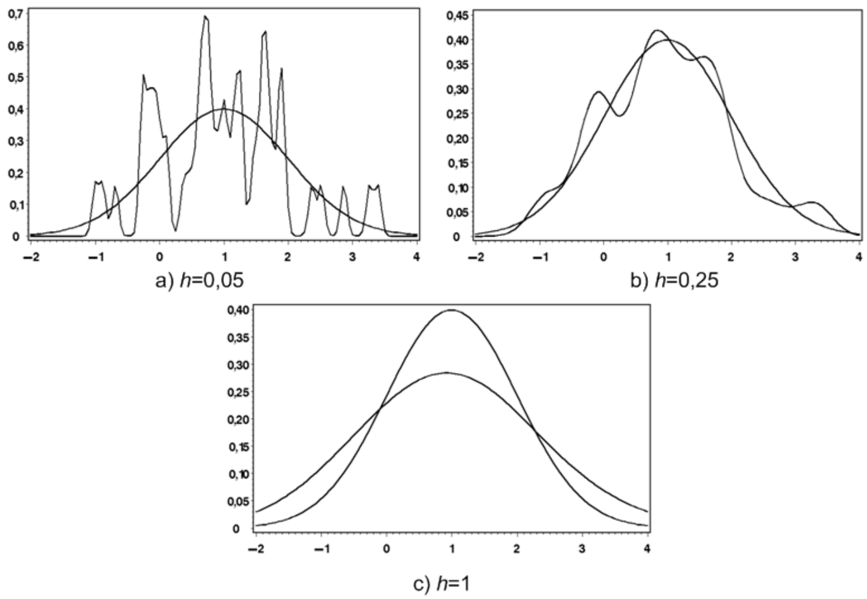
Taigi, jei $h \sim n^{-1/(2m+1)}$, tai $d(\hat{f}, f) = \mathrm{O}(n^{-2m/(2m+1)})$.

Labai svarbu parinkti h, o branduolys K nedaug keičia įvertinio $\hat{f}$ kokybę. Dažniausiai naudojamas *Jepanečnikovo branduolys*, sukoncentruotas intervale $[-1,1]$ (tuo atveju $\frac{1}{h}K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$ sukoncentruotas intervale $[x_i - h, x_i + h]$):

$$K(x) = 0,75(1-x^2)\mathbf{1}_{[-1,1]}(x).$$

Taip pat naudojamas branduolys $K(x)$, sutampantis su standartinio normaliojo skirstinio tankiu.

2.6.3 pavyzdys. Pasinaudosime 2.6.2 pavyzdžio duomenimis ir imdami branduoliu standartinio normaliojo skirstinio tankį, sudarysime branduolinį tankio įvertį. Gautieji įverčiai pavaizduoti 2.6.3 paveiksle: a) – kai $h = 0,05$ b) – kai $h = 0,25$ ir c) – kai $h = 1$. Kad palyginti tuose pačiuose paveiksluose yra pateikti stebimo atsitiktinio dydžio tankio grafikai. Matome, kad b) atveju parametras h parinktas geriau.



2.6.3 pav. Branduoliniai tankio įverčiai

2.7. Pratimai

2.1 skyrelis

2.1. Lentelėje pateikiamos $n = 100$ gaminių tam tikro parametro pamatuotos reikšmės (didumo n imties realizacija).

24	41	30	37	25	32	28	35	28	51
36	26	43	25	27	39	21	45	39	25
29	43	66	25	24	56	29	31	41	41
36	57	36	48	25	36	48	24	48	22
40	7	31	24	32	53	33	46	22	33
25	37	34	32	41	36	19	32	25	19
19	37	20	21	48	44	35	19	44	34
29	48	38	43	48	35	42	37	35	36
58	45	34	40	37	21	41	11	41	27
50	24	37	39	33	45	39	43	21	34

a) Sugrupuokite tuos stebinius ilgio $h = 10$ intervalais pradėdami nuo 0.

b) Nubraižykite empirinės pasiskirstymo funkcijos realizacijos grafiką ir histogramą; palyginkite jas su normaliojo skirstinio pasiskirstymo funkcija ir tankiu (vietoje nežinomų parametrų imkite jų empirinius analogus).

2.2. Sumodeliuokite a. d. X paprastąją $n = 50$ didumo imtį ir palyginkite empirinę pasiskirstymo funkciją ir histogramą su teorine pasiskirstymo funkcija ir tankiu tokiais atvejais:
a) $X \sim N(3,\ 4)$;
b) $X \sim LN(3,\ 2)$;
c) $X \sim \mathcal{E}(2)$;
d) $X \sim K(0,\ 1)$.

2.2–2.3 skyreliai

2.3. Variacinė eilutė $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$ gauta stebint a. d., kurio tankio funkcija

$$f(x|\mu,\ \sigma) = \frac{1}{\sigma}\exp\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\},\ x > \mu.$$

Raskite statistikos

$$T = \frac{X_{(1)} - \mu}{W}, \quad (W = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}(X_{(i)} - X_{(1)}))$$

tikimybinį tankį.

2.4. Variacinė eilutė $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$ gauta stebint tolydųjį a. d. X, kurio pasiskirstymo funkcija yra $F(x)$. Įrodykite, kad a. d.

$$Y_i = \left(\frac{F(X_{(i)})}{F(X_{(i+1)})}\right)^i, i = 1, 2, ..., n-1,$$

yra nepriklausomi ir vienodai pasikirstę pagal $U(0,\ 1)$.

2.5. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_m)^T$ ir $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^T$ yra dvi paprastosios nepriklausomos atsitiktinės imtys, gautos stebint tolygųjį a. d. $U(0,\ 1)$. Raskite tų imčių maksimalių reikšmių santykio $X_{(m)}/Y_{(n)}$ tikimybinį skirstinį.

2.6. Imtis, kurios didumas $n = 2k+1$, gauta stebint a. d. $X \sim U(0,\ 1)$. Įrodykite, kad empirinės medianos dispersija lygi $1/4(2k+3)$.

2.7. Variacinė eilutė $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$ gauta stebint tolydųjį a. d., kurio pasiskirstymo funkcija yra $F(x)$. Raskite a. d. $F(X_{(k_1)})$ ir $F(X_{(k_2)})$ kovariacijų matricą.

2.8. Variacinė eilutė $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$ gauta stebint tolydųjį a. d., kurio pasiskirstymo funkcija yra $F(x)$. Įrodykite, kad imties pločio $W_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ vidurkis yra

$$\mathbf{E}W_n = \int_{-\infty}^{\infty}(1 - F^n(x) - (1 - F(x))^n)dx,$$

jeigu pasiskirstymo funkcija $F(x)$ tenkina sąlygą $x[1-F^n(x)-(1-F(x)^n)] \to 0$, kai $x \to \pm\infty$.

2.9. Raskite kraštinių pozicinių statistikų pirmuosius momentus, kai stebimo a. d. skirstinys yra eksponentinis.

2.10. $\widetilde{X}$ yra empirinė mediana paprastosios n didumo imties, gautos stebint tolydųjį a. d., kurio pasiskirstymo funkcija yra $F(x)$. Įrodykite, kad asimptotiškai $(n \to \infty)$

$$2\sqrt{n}(F(\widetilde{X}) - 1/2) \xrightarrow{d} Z \sim N(0,\ 1).$$

2.11. Tegu $X_1, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a. d., kurių skirstinys yra eksponentinis su parametru λ, o $X_{(1)} < \ldots < X_{(n)}$ yra pozicinės statistikos ir

$$\begin{aligned}
&Y_1 = nX_{(1)},\\
&Y_2 = (n-1)(X_{(2)} - X_{(1)}),\\
&Y_3 = (n-2)(X_{(3)} - X_{(2)}),\\
&\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\
&Y_n = X_{(n)} - X_{(n-1)}.
\end{aligned}$$

Įrodykite, kad $Y_1, \ldots, Y_n$ yra nepriklausomi a. d., turintys eksponentinį skirstinį.

2.12. Yra k nepriklausomų paprastųjų n didumo imčių, gautų stebint a. d. $X_i \sim U(0,\ 1)$. Tegu i-osios imties maksimali reikšmė yra $X^i_{(n)}$ ir $V = X^1_{(n)}...X^k_{(n)}$. Raskite a. d. V tikimybių pasiskirstymo dėsnį.

2.13. Tarkime $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a. d. $X \sim \mathcal{E}(a, \theta)$, kurio tankis

$$f(x|a,\ \theta) = \frac{1}{\theta}\exp\{-\frac{x-a}{\theta}\},\ a \in \mathcal{R},\ \theta > 0,\ x > a.$$

Įrodykite, kad:

a) mažiausios pozicinės statistikos $X_{(1)}$ skirstinys yra $\mathcal{E}(a,\ \theta/n)$;

b) $2\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})/\theta$ turi chi kvadrato skirstinį $\chi^2(2n-2)$.

2.14. (**2.13.** tęsinys). Įrodykite, kad:

a) $\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})$ ir $X_{(1)}$ yra nepriklausomi bet kokiems (a, θ);

b) $Z_i = (X_{(n)} - X_{(i)})/(X_{(n)} - X_{(n-1)}),\ i = 1, \ldots, n-2$, nepriklauso nuo $X_{(1)}$ ir $\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})$.

2.15. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra a. d. $X \sim G(\lambda,\ \eta)$ paprastoji atsitiktinė imtis. Įrodykite, kad $\sum_{i=1}^n X_i$ ir $\sum_{i=1}^n [\ln X_i - \ln X_{(1)}]$ yra nepriklausomi.

2.16. Sakykime $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra a. d. $X \sim U(a,\ b)$, $-\infty < a < b < \infty$, paprastoji atsitiktinė imtis. Įrodykite, kad $(X_{(i)} - X_{(1)})/(X_{(n)} - X_{(1)})$, $i = 2, \ldots, n-2$, yra nepriklausomi nuo $X_{(1)}$ ir $X_{(n)}$.

2.4 skyrelis

2.17. Raskite asimptotinius ($n \to \infty$) maksimalios ir minimalios pozicinių statistikų skirstinius, kai paprastoji imtis gauta stebint eksponentį, gama ir normalųjį skirstinius.

2.18. Įrodykite, kad eksponentinio skirstinio empirinės medianos $\widetilde{X}$, gautos iš $2n+1$ didumo imties, asimptotinis ($n \to \infty$) skirstinys yra normalusis:

$$\sqrt{2n+1}(\widetilde{X} - \frac{\ln 2}{\lambda}) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ \frac{1}{\lambda^2}).$$

2.5 skyrelis

2.19. Ekspertų grupė vertino kino kadrų, nufilmuotų dviejų tipų kino juostomis, kokybę. Gauti šie rezultatai:

I tipo kino juosta				II tipo kino juosta			
i	n_i	$\bar{X}_i$	s_i^2	i	n_i	$\bar{X}_i$	s_i^2
1	20	25	6	1	10	21	6
2	10	23	5	2	10	18	25
3	10	21	4	3	10	17	5
4	10	18	4	4	9	17	5
5	10	22	9				

Čia n_i yra i-osios imties didumas, $\bar{X}_i$ – empirinis vidurkis, s_i^2 – nepaslinktasis dispersijos įvertis. Raskite jungtinių I ir II tipo kino juostų imčių empirinius vidurkius ir nepaslinktuosius dispersijų įverčius.

2.20. Yra k nepriklausomų a. d. $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$ imčių, kurių didumai – $n_1, ..., n_k$. Tegu $\bar{X}_i$ ir s_i^2 yra i-osios imties empirinis vidurkis ir nepaslinktasis dispersijos įvertinys. Įrodykite, kad funkcijos

$$U = \sum_{i=1}^k (n_i - 1)\frac{s_i^2}{\sigma_i^2}, \qquad V = \sum_{i=1}^k n_i \frac{(\bar{X}_i - \bar{X})^2}{\sigma_i^2},$$

$$W = n\frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2}, \quad (\bar{X} = \frac{\sum_i n_i \bar{X}_i}{n},\ n = \sum_i n_i)$$

yra n. a. d., turintys χ^2 skirstinius.

2.21. Paprastosios imtys $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ ir $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_m)^T$ gautos stebint n. a. d. X ir Y su vienodomis dispersijomis σ^2. Raskite statistikos $\bar{Z} - \bar{X}$ vidurkį ir dispersiją, kai $\bar{Z} = (m\bar{Y} + n\bar{X})/(m+n)$.

2.22. Sakykim, $(X_{1i},...,X_{ki})^T$, $i=1,...,n$, yra imtis a. v., kurio vidurkių vektorius $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,...,\mu_k)^T$ ir kovariacijų matrica $\mathbf{\Sigma}=[\sigma_{ij}]_{k\times k}$. Įrodykite, kad $(\bar{X}_1,...,\bar{X}_k)^T$ pagal tikimybę konverguoja į $\boldsymbol{\mu}$, kai $n\to\infty$.

2.23. Tarkim, $\mathbf{X}=(X_1,...,X_n)^T$ yra paprastoji n didumo imtis. Įrodykite, kad asimptotiškai $(n\to\infty)$:

a) $$\sqrt{n}(2\sqrt{\bar{X}}-2\sqrt{\lambda})\xrightarrow{d} Z\sim N(0,\ 1),$$
kai stebimo a. d. skirstinys yra Puasono $\mathcal{P}(\lambda)$;

b) $$\sqrt{n}(\arcsin(2\bar{X}-1)-\arcsin(2p-1))\xrightarrow{d} Z\sim N(0,\ 1),$$
kai stebimo a. d. skirstinys yra binominis $B(1,\ p)$;

c) $$\sqrt{3n}(\ln(2\bar{X})-\ln\theta)\xrightarrow{d} Z\sim N(0,\ 1),$$
kai stebimo a. d. skirstinys yra tolygusis $U(0,\ \theta)$.

2.24. Tegu r yra empirinis koreliacijos koeficientas, gautas stebint dvimatį normalųjį a. v. Įrodykite, kad asimptotiškai $(n\to\infty)$

$$\sqrt{n}\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+r}{1-r}-\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)\xrightarrow{d} Z\sim N(0,\ 1).$$

2.25. Sakykim, $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis, $\alpha_4=\mathbf{E}X_i^4<\infty$. Lai $\bar{X}=n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$, $s^2=(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2)$. Raskite sąlygą, kad $\bar{X}$ ir s^2 būtų nekoreliuoti.

2.26. Tarkime, kad $(X_i,\ Y_i)^T$, $i=1,\dots,n$, yra vienodai pasiskirstę n. a. v., o $r=s_{12}/\sqrt{s_{20}s_{02}}$ yra empirinis koreliacijos koeficientas.

a) Tegu $\mathbf{E}|X_i|^4<\infty$ ir $\mathbf{E}|Y_i|^4<\infty$. Įrodykite, kad $\sqrt{n}[r-\rho]\xrightarrow{d} N(0,c^2)$; čia ρ yra a. d. X_1 ir Y_1 koreliacijos koeficientas, o c – konstanta.

b) Tegu $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ ir $Y_1\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ yra nepriklausomi. Įrodykite, kad r tankio funkcija

$$f(t)=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}(1-t^2)^{(n-4)/2},\quad -1<t<1.$$

2.27. Tarkim, $\mathbf{X}=(X_1,...,X_n)^T$ yra paprastoji didumo n imtis. Įrodykite, kad

a) jeigu egzistuoja $\mu_4=\mathbf{E}(X_i-\mathbf{E}X_i)^4$, tai

$$\mathbf{E}s=\sigma+O(1/n),\quad \boldsymbol{V}s=\frac{\mu_4-\sigma^4}{4n\sigma^2}+O(1/n^{3/2}),$$

o kai skirstinys normalusis

$$\mathbf{E}s=\sigma M_{n-1},\quad \boldsymbol{V}s=\sigma^2(1-M_{n-1}^2),\quad M_n=\sqrt{\frac{2}{n}}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)};$$

b) jeigu egzistuoja $\mu_6=\mathbf{E}(X_i-\mathbf{E}X_i)^6$, tai

$$\mathbf{E}g_1=\gamma_1+O(1/n),\quad \boldsymbol{V}g_1=\frac{4\mu_6\sigma^4-12\mu_5\mu_3\sigma^2+9\mu_4\mu_3^2+35\mu_3^2\sigma^4}{4n\sigma^{10}}$$
$$+\frac{9\sigma^4-6\mu_4}{n\sigma^4}+O(1/n^{3/2}),$$

o kai skirstinys normalusis

$$\mathbf{E}g_1=0,\quad \boldsymbol{V}g_1=\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)};$$

c) jeigu egzistuoja $\mu_8=\mathbf{E}(X_i-\mathbf{E}X_i)^8$, tai

$$\mathbf{E}g_2=\gamma_2+O(1/n),\quad \boldsymbol{V}g_2=\frac{\mu_8\sigma^4-4\mu_6\mu_4\sigma^2+4\mu_4^3+16\mu_4\mu_3^2\sigma^2}{n\sigma^{12}}$$
$$+\frac{16\mu_3^2\sigma^2-\mu_4^2-8\mu_5\mu_3}{n\sigma^8}+O(1/n^{3/2}),$$

o kai skirstinys normalusis

$$\mathbf{E}g_2 = -\frac{6}{n+1}, \quad \boldsymbol{V}g_2 = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)};$$

d) jeigu egzistuoja $\mu_6 = \mathbf{E}(X_i - \mathbf{E}X_i)^6$, tai $\mathbf{Cov}\,(\bar{X}, s^2) = (n-1)\mu_3/n^2$, o kai skirstinys normalusis kovariacija lygi 0;

e) jeigu egzistuoja $\mu_{2k+2l} = \mathbf{E}(X_i - \mathbf{E}X_i)^{2k+2l}$, tai

$$\mathbf{Cov}\,(m_k, m_l) = (\mu_{k+l} - k\mu_{k-1}\mu_{l+1} - l\mu_{l-1}\mu_{k+1} - \mu_k\mu_l + kl\mu_{k-1}\mu_{l-1}\sigma^2)/n + O(1/n^2),$$

kai skirstinys normalusis $\mathbf{Cov}\,(m_k, m_l) = (((k+l-1)!! - (k-1)!!(l-1)!!)\sigma^{k+l})/n + O(1/n^2)$, kai k, l – lyginiai; $\mathbf{Cov}\,(m_k, m_l) = (((k+l-1)!! - k!!l!!)\sigma^{k+l})/n + O(1/n^2)$, kai k, l – nelyginiai; $\mathbf{Cov}\,(m_k, m_l) = O(1/n^2)$, kitais atvejais.

2.28. Tegu $(X_i, Y_i)^T, i = 1, 2, ..., n$, yra didumo n paprastoji imtis, gauta stebint a. v. $(X, Y)^T$. Įrodykite, kad

a) jeigu egzistuoja $\mu_{22} = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X)^2(Y - \mathbf{E}Y)^2]$, tai

$$\mathbf{E}m_{11} = \frac{n-1}{n}\mu_{11}, \quad \boldsymbol{V}m_{11} = \frac{\mu_{22} - \mu_{11}^2}{n} + O(1/n^2);$$

b) $$\mathbf{E}r = \rho + O(1/n),$$

$$\boldsymbol{V}r = \frac{\rho^2}{4n}\left(\frac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2} + \frac{\mu_{04}}{\mu_{02}^2} + \frac{2\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}} + \frac{4\mu_{22}}{\mu_{11}^2} - \frac{4\mu_{31}}{\mu_{11}\mu_{20}} - \frac{4\mu_{13}}{\mu_{11}\mu_{02}}\right) + O(1/n^{3/2}),$$

o kai skirstinys normalusis

$$\mathbf{E}r = \rho(1 - \frac{1-\rho^2}{2n}) + O(1/n^2), \quad \boldsymbol{V}r = \frac{(1-\rho^2)^2}{n} + O(1/n^{3/2});$$

c) jeigu egzistuoja $\mu_{66} = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X)^6(Y - \mathbf{E}Y)^6]$, tai

$$\mathbf{Cov}\,(m_{20}, m_{11}) = \frac{\mu_{31} - \mu_{20}\mu_{11}}{n} + O(1/n^2), \quad \mathbf{Cov}\,(m_{20}, m_{02}) = \frac{\mu_{22} - \mu_{20}\mu_{02}}{n} + O(1/n^2);$$

o kai skirstinys normalusis

$$\mathbf{Cov}\,(m_{20}, m_{11}) = \frac{2\rho\sigma_1^3\sigma_2}{n} + O(1/n^2), \quad \mathbf{Cov}\,(m_{20}, m_{02}) = \frac{2\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{n} + O(1/n^2).$$

2.6 skyrelis

2.29. Iš 5 gaminių X gaminių yra defektiniai. Paėmus 70 imčių po 5 gaminius, gautos šitokios dydžio X reikšmės x_i, $i = 0, 1, ..., 5$ (n_i – skaičius imčių, kuriose X įgijo reikšmę x_i):

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	55	12	3	0	0	0

Gautus stebinius interpretuokime kaip $n = 70$ binominio skirstinio $B(5,\ p)$ realizacijų. Nubraižykite stulpelių diagramą ir palyginkite ją su binominiu skirstiniu (vietoje nežinomos tikimybės imkite defektinių gaminių pasitaikymo santykinį dažnį).

2.30. Ląstelių, veikiamų Rentgeno spinduliais, keičiasi kai kurios chromosomos. Lentelėje pateikiami 4 skirtingų bandymų serijų duomenys (i – pasikeitusių chromosomų skaičius, n_{ik} – k-ojo eksperimento ląstelių, turinčių i pokyčių, skaičius).

k	i	0	1	2	≥ 3	$\sum_i n_{ik}$
1	n_{i1}	280	75	12	1	368
2	n_{i2}	593	143	20	3	759
3	n_{i3}	639	141	13	0	793
4	n_{i4}	359	109	13	1	482

Nubraižykite stulpelių diagramas ir palyginkite su Puasono skirstiniais (parametro λ įvertį imkite imties reikšmių aritmetinį vidurkį).

2.31. Lentelėje pateikiami duomenys apie 647 moterų, gaminusių sviedinius, skirstinį pagal per 5 savaites su jomis atsitikusių nelaimingų įvykių skaičių (i – nelaimingų įvykių skaičius):

i	0	1	2	3	4	5	Σ
n_i	447	132	42	21	3	2	647

Nubraižykite stulpelių diagramą ir palyginkite ją su $\mathcal{P}(\lambda)$ ir $B^-(\eta,\ p)$ tikimybinių skirstinių daugiakampiais (parametro λ įvertį imkite $\bar{X}$; parametrų η ir p įverčius raskite iš lygčių sistemos $\eta q/p = \bar{X}$, $\eta q/p^2 = s^2$).

Atsakymai ir nurodymai

2.3. $nT \sim F(2,\ 2n-2)$. *Nurodymas.* Atlikite transformaciją $Z_1 = X_{(1)} - \mu, Z_2 = X_{(2)} - X_{(1)}, ..., Z_n = X_{(n)} - X_{(n-1)}$ ir įrodykite, kad $Z_1, ..., Z_n$ yra nepriklausomi a. d.: $Z_1 \sim \mathcal{E}(n/\sigma)$, $Z_i \sim \mathcal{E}(n-i+1)/\sigma)$, $i = 2, ..., n$. Taigi $W/\sigma \sim \chi^2(2n-2)/(2n-2)$ nepriklauso nuo $(X_{(1)} - \mu)/\sigma \sim \chi^2(2)/2$. **2.4.** *Nurodymas.* Atsitiktinis vektorius $(Z_{(1)}, ..., Z_{(n)})^T = (F(X_{(1)}), ..., F(X_{(n)}))^T$ yra variacinė eilutė, gauta stebint a.d. $Z \sim U(0,\ 1)$; jos tankio funkcija yra $n!$ srityje $0 < z_1 < ... < z_n < 1$. Atliekame transformaciją $Y_i = (Z_{(i)}/Z_{(i+1)})^i$, $i = 1, ..., n-1$, $Y_n = Z_{(n)}$. Pakeitimo jakobianas $J = y_n^{n-1}/(n-1)!$. Taigi a.v. $(Y_1, ..., Y_n)^T$ tankio funkcija yra ny_n^{n-1} srityje $0 < y_1, ..., y_n < 1$. Integruodami pagal y_n, gauname, kad a.v. $(Y_1, ..., Y_{n-1})^T$ tankis lygus 1 srityje $0 < y_1, ..., y_{n-1} < 1$. **2.5.** Atsitiktinio dydžio $X_{(m)}/Y_{(n)}$ tankio funkcija $f(t) = mnt^{m-1}/(m+n)$, kai $0 < t \leq 1$, ir $f(t) = mn/[(m+n)t^{n+1}]$, kai $0 < t < \infty$. **2.6.** *Nurodymas.* Empirinė mediana $X_{k+1} \sim Be(k+1,\ k+1)$. **2.7.** $\boldsymbol{V}(F(X_{k_i})) = k_i(n-k_i+1)/[(n+1)^2(n+2)]$, $i = 1, 2$; $\mathbf{Cov}\,(F(X_{k_1},\ F(X_{k_2}))) = k_1(n-k_2+1)/[(n+1)^2(n+2)]$. **2.8.** *Nurodymas.* $\mathbf{E}(W_n) = n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} y[F(y) - F(x)]^{n-2}dF(x)dF(y)$ - $n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{y}^{\infty} x[F(y) - F(x)]^{n-2}dF(y)dF(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} xd[1 - F^n(x) - (1-F(x))^n]$. **2.9.** $\mathbf{E}X_{(1)} = 1/n\lambda$, $\mathbf{E}X_{(n)} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} C_n^k(-1)^{k-1}/k$. **2.10.** *Nurodymas.* $F(\tilde{X})$ yra a.d. $Y \sim U(0,\ 1)$ paprastosios n didumo imties empirinė mediana. **2.12.** $-\ln V \sim G(n,\ k)$. *Nurodymas.* $-\ln X_{(n)}^j \sim \mathcal{E}(n)$, $j = 1, ..., k$. **2.15.** *Nurodymas.* Atsitiktinio vektoriaus $(X_{(1)}, ..., X_{(n)})^T$ tankis yra $n!(\lambda^{n\eta}/(\Gamma(\eta))^n)x_1^{\eta-1}...x_n^{\eta-1}\exp\{-\lambda(x_1 + ... + x_n)\}$ srityje $0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < \infty$. Atliekame transformaciją $s = x_1 + ... + x_n$, $y_i = \ln x_i - \ln x_1$, $i = 2, ..., n$. Atvirkštinė transformacija yra $x_1 = s/(1 + e^{y_2} + ... + e^{y_n})$, $x_i = se^{y_i}/(1 + e^{y_1} + ... + e^{y_n})$, $i = 2, ..., n$. Pakeitimo jakobianas

$$J = \left[\frac{\mathcal{D}(s, y_2, ..., y_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, ..., x_n)}\right]^{-1} = \frac{x_1x_2...x_n}{x_1 + ... + x_n} = \frac{s^{n-1}e^{1+y_2+...+y_n}}{(1 + e^{y_2} + ... + e^{y_n})^n}.$$

Įstatę į tankio formulę matome, kad jis lygus funkcijos, priklausančios tik nuo s, ir funkcijos, priklausančios nuo $y_2, ..., y_n$, sandaugai. Taigi a.d. $X_1 + ... + X_n$,ir a.v.$(\ln X_{(2)} - \ln X_{(1)}, ..., \ln X_{(n)} - \ln X_{(1)})^T$ yra nepriklausomi. **2.16.** *Nurodymas.* Atsitiktinio vektoriaus $(X_{(1)}, ..., X_{(n)})^T$ tankio funkcija yra $n!/(b-a)^n$ srityje $a < x_1 < ... < x_n < b$. Atliekame transformaciją $y_1 = x_1$, $y_i = (x_i - x_1)/(x_n - x_1)$, $i = 2, ..., n-1$, $y_n = x_n$. Pakeitimo jakobianas $J = (y_n - y_1)^{n-2}$. Po pakeitimo gauname tankį $n!(y_n - y_1)^{n-2}/(b-a)^n$ srityje $a < y_1 < y_n < b$, $0 < y_2 < y_3 < ... < y_{n-1} < 1$. Integruodami pagal y_1, y_n gauname tankį lygų $(n-2)!$ srityje $0 < y_2 < y_3 < ... < y_{n-1} < 1$. Tai tankis variacinės eilutės, gautos pagal paprastąją a.d. $Y \sim U(0,\ 1)$ imtį, kurios didumas $n-2$. **2.17.** *Nurodymas.* Tegu $(Y_{(1)}, ..., Y_{(n)})^T$ yra variacinė eilutė, sudaryta pagal paprastąją a.d. $Y \sim U(0,\ 1)$ n didumo imtį. Tada $nY_{(1)} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{E}(1)$ ir $n(1 - Y_{(n)}) \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{E}(1)$, kai $n \to \infty$. Jeigu a.d. X pasiskirstymo funkcija $F(x)$ absoliučiai tolydi, tai ekstremalių reikšmių $X_{(1)}$ ir $X_{(n)}$ asimptotinius skirstinius galime gauti naudodami sąryšius $nF(X_{(1)}) \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{E}(1)$ ir $n(1 - F(X_{(1)})) \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{E}(1)$. **2.18.** *Nurodymas.* Eksponentinio skirstinio $\mathcal{E}(\lambda)$ mediana yra

$(\ln 2)/\lambda$. **2.19.** $\bar{X}_I = 22,3333$, $s_I^2 = 5,6727$; $\bar{X}_{II} = 18,2821$, $s_{II}^2 = 10,4000$. **2.20.** *Nurodymas.* Žr. 2.5.1 teoremą. **2.21.** $\mathbf{E}\bar{Z} = m(\mathbf{E}Y_i - \mathbf{E}X_j)/(m+n)$, $\boldsymbol{V}\bar{Z} = \sigma^2 m/[n(m+n)]$. **2.23.** *Nurodymas.* Pritaikykite delta metodą (žr. 1.4.7 skyrelį). **2.24.** *Nurodymas.* Pritaikykite delta metodą (žr. 1.4.7 skyrelį). **2.25.** Momentas $\mu_3 = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^3 = 0$. **2.26.** *Nurodymas.* b) žr. [15], 3d skyrelį arba šio vadovėlio 4 dalies 4.1 skyrelį.

3 skyrius

Parametrų įvertiniai

3.1. Taškiniai įvertiniai ir jų klasifikavimas

Tarkime, kad $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra didumo n imtis ir a. v. $\mathbf{X}$ tikimybinis skirstinys priklauso parametrinei šeimai (žr. **1.3; 1.4** skyrelius)

$$\mathbf{X} \sim \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}},\ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m, \quad m \leq n. \tag{3.1.1}$$

Greta parametro $\boldsymbol{\theta}$ nagrinėsime ir parametro $\boldsymbol{\theta}$ vienareikšmes funkcijas $\boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\Theta} \to \mathcal{G} \subset \mathbf{R}^k$.

Ieškosime imties $\mathbf{X}$ funkcijų $\hat{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{X})$ (statistikų), kurių realizacijos $\hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x})$ būtų artimos tikrajai $\boldsymbol{\gamma}$ reikšmei.

Pavyzdžiui, turint paprastąją imtį $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, galima daryti išvadas apie vidurkio μ, dispersijos σ^2 ar kokios nors jų funkcijos reikšmes.

Toliau vienodai žymima funkcija $\boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\Theta} \to \mathcal{G}$ ir jos reikšmė $\boldsymbol{\gamma}$.

3.1.1 apibrėžimas. Parametro $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta})$ *taškiniu įvertiniu* vadinama statistika $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{X})$, įgyjanti reikšmes parametro $\boldsymbol{\gamma}$ kitimo srityje $\mathcal{G}$. Imdami imties realizaciją $\boldsymbol{x}$, gausime taškinio įvertinio realizaciją (stebinį) $\hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x})$, kuri vadinama *taškiniu įverčiu.*

3.1.1 pastaba. Siekiant supaprastinti žymenis, įvertinys (arba kitokia statistika) ir jo realizacija dažnai bus žymima tuo pačiu simboliu, jeigu iš konteksto aišku, ar kalbama apie atsitiktinį dydį, ar apie jo įgytąją reikšmę (realizaciją).

Iš visų galimų įvertinių reikia rasti optimalesnį. Nagrinėkime neneigiamą skaliarinę nuostolių funkciją $L(\hat{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\gamma}) \geq 0$, apibrėžtą srityje $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$, tokią, kad $L(u, v) = 0$ tada ir tik tada, kai $u = v$. Funkcijos L reikšmę $L(\hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta})) \geq 0$ interpretuojame kaip nuostolius, kurių atsiranda, kai įvertinio realizacija yra $\hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x})$, o tikroji parametro reikšmė lygi $\boldsymbol{\gamma}$. Nuostolių funkciją $L(\hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\gamma})$ apibrėšime kaip atstumą tarp tikrosios parametro $\boldsymbol{\gamma}$ reikšmės ir to parametro įverčio $\hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x})$

arba kaip neneigiamą atstumo funkciją. Vidutiniai nuostoliai, gaunami taikant įvertinį $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$, vadinami *rizikos funkcija*:

$$R_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\gamma}},\ \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}[L(\hat{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{X}),\ \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}))]. \tag{3.1.2}$$

Kai parametras $\gamma = \gamma(\boldsymbol{\theta}) \in \mathcal{G} \subset \mathbf{R}$ vienmatis, dažniausiai naudojamasi nuostolių funkcijomis:

$$L(\hat{\gamma}(\boldsymbol{x}),\ \gamma) = (\hat{\gamma}(\boldsymbol{x}) - \gamma)^2, \quad L(\hat{\gamma}(\boldsymbol{x}),\ \gamma) = |\hat{\gamma}(\boldsymbol{x}) - \gamma|.$$

Imant pirmąjį iš šių atstumų, gaunama *kvadratinė rizikos funkcija*

$$R_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\gamma},\ \gamma) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\gamma} - \gamma)^2 = \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\gamma}) + (\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\gamma}) - \gamma)^2, \tag{3.1.3}$$

kuri daugeliui tikimybinių dėsnių yra paprasta ir lengvai skaičiuojama.

Ieškoma tokių įvertinių $\hat{\gamma}$, kurie minimizuotų riziką $R_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\gamma},\ \gamma)$ su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, t. y. nesvarbu, kad ir kokia būtų tikroji parametro $\boldsymbol{\theta}$ (ir γ) reikšmė. Jie vadinami *tolygiai minimalios rizikos įvertiniais.*

3.1.2 pastaba. Tolygiai minimalios rizikos įvertinio nėra visų įvertinių klasėje, jei vertinamo parametro $\gamma = \gamma(\boldsymbol{\theta})$ reikšmių aibė susideda bent iš dviejų taškų.

Iš tikrųjų, tarkime, kad $\hat{\gamma}$ yra toks parametro γ įvertinys. Jei tikroji parametro $\boldsymbol{\theta}$ reikšmė yra $\boldsymbol{\theta}_1$ ir imamas įvertinys $\gamma^* = \gamma(\boldsymbol{\theta}_1)$, tada $R_{\boldsymbol{\theta}_1}(\gamma^*, \gamma(\boldsymbol{\theta}_1)) = 0$. Tuo labiau $R_{\boldsymbol{\theta}_1}(\hat{\gamma}, \gamma(\boldsymbol{\theta}_1)) = 0$. Bet jei tikroji $\boldsymbol{\theta}$ reikšmė yra $\boldsymbol{\theta}_2$, tai gauname $R_{\boldsymbol{\theta}_2}(\hat{\gamma}, \gamma(\boldsymbol{\theta}_2) = 0$. Taigi $R_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\gamma}, \gamma(\boldsymbol{\theta})) = 0$ su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$. Iš čia išplaukia $\hat{\gamma} = \gamma(\boldsymbol{\theta})$ b.v. $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}$. Gavome, kad įvertinys $\hat{\gamma}$ nepriklauso nuo $\mathbf{X}$. Tačiau $\hat{\gamma}$ yra statistika, todėl neturi priklausyti nuo $\boldsymbol{\theta}$. Taigi $\gamma(\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{const}$. Tada parametro reikšmių sritis susideda iš vieno taško. Tai prieštarauja prielaidai.

Tad įvertinių klasę tenka apriboti ir ieškoti tolygiai minimalios rizikos įvertinių siauresnėse klasėse.

3.1.2 apibrėžimas. Parametro $\gamma = \gamma(\boldsymbol{\theta})$ įvertinys $\hat{\gamma}$ vadinamas parametro γ *minimalios kvadratinės rizikos* įvertiniu klasėje $\mathcal{K}_\gamma$, jei *su visais* $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ kvadratinė rizika $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\gamma} - \gamma)^2$ yra minimali toje klasėje.

3.1.3 pastaba. Žodžiai „su visais“ yra svarbūs, nes įvertiniai, kurie turi minimalią kvadratinę riziką tik su kai kuriomis $\boldsymbol{\theta}$ reikšmėmis, nenaudingi.

Iš tikrųjų, nagrinėkime Puasono skirstinį $\mathcal{P}(\theta)$. Imkime parametro θ įvertinį $\hat{\theta} = 1$. Aišku, kad $R_1(\hat{\theta}, 1) = \mathbf{E}_1(1-1)^2 = 0$ minimali visų įverčių klasėje. Tačiau šis įvertinys geras tik tada, kai tikroji nežinoma parametro reikšmė artima 1. Bet tikroji reikšmė nežinoma ir jei ji lygi, pavyzdžiui, 100, tai su tikimybe 1 įvertinys bus nutolęs nuo tikrosios reikšmės per 99, taigi jis bus labai blogas. Šis įvertinys įgyja tą pačią reikšmę su bet kuria imties $\mathbf{X}$ realizacija $\boldsymbol{x}$, taigi jis neišnaudoja informacijos, kurią suteikia $\boldsymbol{x}$.

Apibendrinsime minimalios kvadratinės rizikos įvertinio sąvoką, kai parametras daugiamatis $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = (\gamma_1(\boldsymbol{\theta}), \ldots, \gamma_k(\boldsymbol{\theta}))^T$.

Tarkime, $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = (\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_k)^T$ yra parametro $\boldsymbol{\gamma}$ įvertinys, o $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k)^T \in$ $\in \mathbf{R}^k$ yra bet koks vektorius. Tiesinės funkcijos $\sum_{i=1}^k c_i\gamma_i$ yra vienmačiai parametrai. Jų įvertiniais galima imti atitinkamas tiesines funkcijas $\sum_{i=1}^k c_i\hat{\gamma}_i$ ir nagrinėti kvadratines rizikas

$$R_{\boldsymbol{\theta}}(\sum_{i=1}^k c_i\hat{\gamma}_i, \sum_{i=1}^k c_i\gamma_i) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\left(\sum_{i=1}^k c_i\hat{\gamma}_i - \sum_{i=1}^k c_i\gamma_i\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k c_ic_j\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\{(\hat{\gamma}_i - \gamma_i)(\hat{\gamma}_j - \gamma_j)\} = \mathbf{c}^T\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\{(\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma})(\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma})^T\}\mathbf{c}. \qquad (3.1.4)$$

3.1.3 apibrėžimas. Parametro $\boldsymbol{\gamma}$ įvertinys $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ vadinamas *minimalios kvadratinės rizikos įvertiniu* to parametro įvertinių klasėje $\mathcal{K}_{\boldsymbol{\gamma}}$, jei su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ ir $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^k$ (3.1.4) kvadratinės rizikos yra minimalios toje įvertinių klasėje.

3.1.4 pastaba. Jei $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ yra minimalios kvadratinės rizikos įvertinys klasėje $\mathcal{K}_{\boldsymbol{\gamma}}$, tai imant $\boldsymbol{c} = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$, čia 1 yra i-oje pozicijoje, gaunama, kad su visais i ir $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\gamma}_i - \gamma_i(\boldsymbol{\theta}))^2 \le \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\gamma_i^* - \gamma_i(\boldsymbol{\theta}))^2,$$

taigi $\hat{\gamma}_i$ yra minimalios kvadratinės rizikos parametrų γ_i įvertiniai.

3.1.5 pastaba. Jei $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ yra minimalios rizikos įvertinys klasėje $\mathcal{K}_{\boldsymbol{\gamma}}$, tai iš (3.1.4) formulės išplaukia, kad su bet kuriuo įvertiniu $\boldsymbol{\gamma}^* \in \mathcal{K}_{\boldsymbol{\gamma}}$ ir su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\{(\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}))(\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}))^T\} \le \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\{(\boldsymbol{\gamma}^* - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}))(\boldsymbol{\gamma}^* - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}))^T\}; \qquad (3.1.5)$$

primename, kad žymime $\boldsymbol{A} < \boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{A} \le \boldsymbol{B}$), jei matrica $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ teigiamai (neneigiamai) apibrėžta.

Pakankamai plati įvertinių klasė, kurioje dažnai galima rasti minimalios kvadratinės rizikos įvertinį, yra *nepaslinktųjų* įvertinių klasė.

3.1.4 apibrėžimas. Parametro $\boldsymbol{\gamma}$ įvertinys $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ vadinamas *nepaslinktuoju*, jei su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) = \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}). \qquad (3.1.6)$$

Jei įvertinys $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ paslinktasis, tai skirtumas $\boldsymbol{b}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta})$ vadinamas to įvertinio *poslinkiu*.

Pavyzdžiui, 2.2.3 skyrelyje nagrinėti vidurkio ir pradinių momentų empiriniai analogai yra atitinkamų teorinių charakteristikų nepaslinktieji įvertiniai.

Jeigu vienmačio parametro γ įvertinys $\hat{\gamma}$ yra nepaslinktasis, tai (3.1.3) rizikos funkcija sutampa su jo dispersija.

Tarkime, kad $\mathcal{K}_{\boldsymbol{\gamma}}$ yra nepaslinktųjų parametro $\boldsymbol{\gamma}$ įvertinių klasė.

3.1.5 apibrėžimas. Vienmačio parametro γ įvertinį $\hat{\gamma}$ vadiname *nepaslinktuoju minimalios dispersijos* (NMD) įvertiniu, jeigu jis tenkina (3.1.6) lygybę ir

$$\inf_{\tilde{\gamma}\in K_\gamma} \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\theta}}(\tilde{\gamma}) = \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\gamma}), \quad \forall \ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}. \tag{3.1.7}$$

3.1.6 pastaba. Tarkime $\hat{\gamma}_1, ..., \hat{\gamma}_N$ yra nepriklausomi parametro γ įvertiniai, $\mathbf{E}\hat{\gamma}_i = \gamma + b$, $\boldsymbol{V}\hat{\gamma}_i = \sigma^2$. Imkime įvertinį $\bar{\gamma} = (\hat{\gamma}_1 + ... + \hat{\gamma}_N)/N$. Tada $\mathbf{E}\bar{\gamma} = \gamma + b$, $\boldsymbol{V}\bar{\gamma} = \sigma^2/N$. Jei įvertiniai $\hat{\gamma}_i$ nepaslinktieji ($b = 0$), tai įvertinys $\bar{\gamma}$ taip pat nepaslinktasis, be to, jo dispersija N kartų mažesnė. Taigi, didėjant N, įvertinio $\bar{\gamma}$ realizacijos vis labiau telksis apie tikrąją parametro reikšmę.

Jeigu įvertiniai $\hat{\gamma}_i$ turi poslinkį $b \neq 0$, tai, didėjant N, dispersija taip pat artėja prie nulio. Tačiau poslinkis nesumažėja ir įvertinio $\bar{\gamma}$ reikšmės telkiasi apie parametro reikšmę, kuri nukrypusi nuo tikrosios per b.

3.1.7 pastaba. Nepaslinktieji įvertiniai gali neegzistuoti.

3.1.1 pavyzdys. *Nepaslinktasis įvertinys neegzistuoja Puasono skirstinio atveju, kai parametras yra* $\gamma = 1/\lambda$. Tegu a.d. X turi Puasono skirstinį: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ir $\gamma = \gamma(\lambda) = 1/\lambda$. Jeigu $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(X)$ yra nepaslinktasis įvertinys, tai su visais $\lambda > 0$ turi galioti tapatybė

$$\mathbf{E}_\lambda\hat{\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\gamma}(k)\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} \equiv \frac{1}{\lambda} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda\hat{\gamma}(k)\frac{\lambda^k}{k!} \equiv \mathrm{e}^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Tapatybė su visais $\lambda > 0$ gali būti teisinga tik tada, kai $\lambda\hat{\gamma}(k) = 1$, $k = 0, 1, \ldots$. To negali būti, nes $\hat{\gamma}$ nepriklauso nuo λ. Todėl parametro $1/\lambda$ nepaslinktasis įvertinys neegzistuoja.

3.1.8 pastaba. Galima situacija, kai paslinktojo įvertinio kvadratinė rizika mažesnė už nepaslinktojo minimalios dispersijos įvertinio kvadratinę riziką (dispersiją).

3.1.2 pavyzdys. *Normaliojo skirstinio dispersijos paslinktojo įvertinio kvadratinė rizika mažesnė už nepaslinktojo minimalios dispersijos įvertinio kvadratinę riziką.* Tarkime, kad $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. Žinome (žr. 2.5.3 skyrelį), kad dispersijos σ^2 nepaslinktasis įvertinys yra

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$

o įvertinys

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

yra paslinktasis.

Tolesniuose skyreliuose parodysime, kad s^2 yra minimalios dispersijos nepaslinktasis įvertinys. Kadangi $(n-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$, tai:

$$\mathbf{E}(s^2) = \sigma^2, \quad \boldsymbol{V}(s^2) = \frac{2}{n-1}\sigma^4, \quad \mathbf{E}(m_2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2, \quad \boldsymbol{V}(m_2) = \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}.$$

Palyginame kvadratines rizikas:

$$\mathbf{E}(s^2 - \sigma^2)^2 = \boldsymbol{V}(s^2) = \frac{2}{n-1}\sigma^4 > \mathbf{E}(m_2 - \sigma^2)^2 =$$
$$= \boldsymbol{V}(m_2) + \mathbf{E}(m_2 - \sigma^2)^2 = \frac{2n-1}{n^2}\sigma^4.$$

Paslinktojo įvertinio m_2 kvadratinė rizika yra mažesnė už minimalios dispersijos nepaslinktojo įvertinio s^2 kvadratinę riziką.

Nors daugeliu atvejų įvertinių nepaslinktumas pageidautinas, tačiau iš pateiktų pavyzdžių matome, kad šio reikalavimo nereikėtų absoliutinti.

Tolesniuose skyreliuose nagrinėsime minimalios dispersijos įvertinių radimo įvairiems statistiniams modeliams metodus.

Jei parametras $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = (\gamma_1(\boldsymbol{\theta}), \ldots, \gamma_k(\boldsymbol{\theta}))^T$ yra daugiamatis ir $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = (\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_k)^T$ nepaslinktasis $\boldsymbol{\gamma}$ įvertinys, tai (3.1.4) rizikos funkcija yra

$$R_{\boldsymbol{\theta}}(\sum_{i=1}^{k} c_i\hat{\gamma}_i, \sum_{i=1}^{k} c_i\gamma_i) = \mathbf{c}^T \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\mathbf{c}; \tag{3.1.8}$$

čia

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) = [\sigma_{ij}(\boldsymbol{\theta})]_{k\times k}, \quad \sigma_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Cov}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\gamma}_i, \hat{\gamma}_j)$$

yra įvertinio $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ kovariacinė matrica. Remiantis (3.1.5) nelygybe, parametro $\boldsymbol{\gamma}$ nepaslinktasis įvertinys $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ turi minimalią riziką nepaslinktųjų įvertinių klasėje $\mathcal{K}_{\boldsymbol{\gamma}}$, jei su visais įvertiniais $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} \in \mathcal{K}_{\boldsymbol{\gamma}}$ ir visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) \leq \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\theta}}(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}). \tag{3.1.9}$$

Iš šios lygybės išplaukia (žr. 3.1.3 pastabą), kad su visais i ir $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\gamma}_i) \leq \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\theta}}(\tilde{\gamma}_i). \tag{3.1.10}$$

Pageidautina įverčio savybė yra ta, kad šio įverčio realizacijos artėtų prie tikrosios nežinomo parametro reikšmės, jei imtis neaprėžtai didėja. Norėdami nurodyti, kad parametro $\boldsymbol{\gamma}$ įvertiniai priklauso nuo imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ didumo n, kartais juos žymėsime su indeksu n: $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_n = (\hat{\gamma}_{n1}, ..., \hat{\gamma}_{nk})^T$.

3.1.6 apibrėžimas. Parametro $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta})$ taškinių įvertinių seka $\{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n\}$ vadinama *pagrįstąja*, jei su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}), \quad \text{kai} \quad n \to \infty, \tag{3.1.11}$$

t. y. su visais $\varepsilon > 0$ ir $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{|| \,\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta})\, || \geq \varepsilon\} \to 0, \quad \text{kai} \quad n \to \infty.$$

Ši seka vadinama *griežtai pagrįstąja*, jei su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n \xrightarrow{b.v.} \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}), \quad \text{kai} \quad n \to \infty,$$

t. y. su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{|| \,\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta})\, || \to 0, \, n \to \infty\} = 1. \tag{3.1.12}$$

Kiekviena griežtai pagrįsta seka yra pagrįstoji.

3.1.1 teorema. *Seka $\{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n\}$ yra pagrįstoji (griežtai pagrįsta) tada ir tiktai tada, kai visos sekos $\{\hat{\gamma}_{ni}\}$ $(i = 1, \dots, k)$ yra pagrįstosios (griežtai pagrįstos).*

Įrodymas. Teoremos rezultatas gaunamas iš nelygybių

$$\| \hat{\boldsymbol{\gamma}}_n - \boldsymbol{\gamma} \| = \left(\sum_{i=1}^{k} (\hat{\gamma}_{ni} - \gamma_i)^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq i \leq k} | \hat{\gamma}_{ni} - \gamma_i | \leq \sqrt{k} \, \| \hat{\boldsymbol{\gamma}}_n - \boldsymbol{\gamma} \| .$$

▲

Dėl trumpumo dažnai indekso θ prie tikimybės ir vidurkio simbolių nerašysime.

3.1.2 teorema. *Jei parametras γ yra vienmatis, $\mathbf{E}(\hat{\gamma}_n) = \gamma$ ir $\boldsymbol{V}(\hat{\gamma}_n) \to 0$, tai $\hat{\gamma}_n \xrightarrow{P} \gamma$, kai $n \to \infty$.*

Įrodymas Teoremos rezultatas gaunamas iš Čebyšovo nelygybės:

$$\mathbf{P}(| \hat{\gamma}_n - \gamma | \geq \varepsilon) \leq \frac{\boldsymbol{V}(\hat{\gamma}_n)}{\varepsilon^2} \to 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad n \to \infty.$$

▲

3.1.1 išvada. Jei parametras $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)^T$ yra daugiamatis, $\mathbf{E}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n) = \boldsymbol{\gamma}$ ir $\boldsymbol{V}(\hat{\gamma}_{ni}) \to 0$, tai $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{\gamma}$, kai $n \to \infty$.

Suformuluosime teoremą, iš kurios paaiškėja, kad tolydžioji parametrų pagrįstųjų įvertinių funkcija yra pagrįstasis tos pačios tų parametrų funkcijos įvertinys.

3.1.3 teorema. *Jei $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{\theta}$ ir $\gamma : \boldsymbol{\Theta} \to \mathbf{R}$ yra tolydžioji funkcija taške $\boldsymbol{\theta}$, tai*

$$\gamma(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) \xrightarrow{P} \gamma(\boldsymbol{\theta}). \tag{3.1.13}$$

Jei $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow{b.v.} \boldsymbol{\theta}$, tai

$$\gamma(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) \xrightarrow{b.v.} \gamma(\boldsymbol{\theta}). \tag{3.1.14}$$

Įrodymas. Tarkime, kad $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{\theta}$. Iš funkcijos γ tolydumo taške $\boldsymbol{\theta}$ gauname, kad su visais $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, kad

$$| \gamma(\boldsymbol{t}) - \gamma(\boldsymbol{\theta}) | < \varepsilon, \quad \text{kai} \quad \| \boldsymbol{t} - \boldsymbol{\theta} \| < \delta.$$

Todėl

$$\mathbf{P}\{| \gamma(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) - \gamma(\boldsymbol{\theta}) | \geq \varepsilon\} \leq \mathbf{P}\left\{\| \hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta} \| \geq \delta\right\} \to 0.$$

Vadinasi $\gamma(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) \xrightarrow{P} \gamma(\boldsymbol{\theta})$.

Tarkime, kad $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \stackrel{b.v.}{\to} \boldsymbol{\theta}$. Funkcija γ tolydi taške $\boldsymbol{\theta}$, todėl su bet kuriuo elementariuoju įvykiu ω iš konvergavimo $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(\omega) \to \boldsymbol{\theta}$ išplaukia konvergavimas $\gamma(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(\omega)) \to \gamma(\boldsymbol{\theta})$. Kadangi

$$\mathbf{P}\{\omega : \gamma(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(\omega)) \to \gamma(\boldsymbol{\theta})\} \geq \mathbf{P}\{\omega : \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(\omega) \to \boldsymbol{\theta}\} = 1,$$

tai iš čia išplaukia $\gamma(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) \stackrel{b.v.}{\to} \gamma(\boldsymbol{\theta})$.

▲

3.2. Pakankamosios statistikos

Ieškant parametrų įvertinių, kartais pavyksta rasti vieną ar kelias statistikas, kurios suteikia tiek pat informacijos apie nežinomus parametrus kaip ir visa imtis. Tada įvertiniu galima imti šių statistikų funkcijas.

Tarkime, kad tikimybinių matų šeima $\mathcal{P} = \{P_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m\}$ absoliučiai tolydi σ-baigtinio mato μ atžvilgiu ir jos tankis yra $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$.

3.2.1 apibrėžimas. Statistika

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\mathbf{X}), \quad \boldsymbol{T} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k, \tag{3.2.1}$$

vadinama *pakankamąja parametro* $\boldsymbol{\theta}$ (arba šeimos $\mathcal{P}$) *statistika*, jei sąlyginis $\mathbf{X}$ skirstinys, kai $\boldsymbol{T}$ fiksuotas, nepriklauso nuo $\boldsymbol{\theta}$, t. y. visoms Borelio aibėms $B \in \mathcal{B}^n$ tikimybė

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{X} \in B \mid \boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}\} \tag{3.2.2}$$

nepriklauso nuo $\boldsymbol{\theta}$.

Teiginys, kad $\mathbf{X}$ sąlyginis skirstinys, žinant $\boldsymbol{T}$, nepriklauso nuo $\boldsymbol{\theta}$, reiškia, kad *$\boldsymbol{T}$ suteikia imties $\mathbf{X}$ turimą informaciją apie nežinomą parametrą $\boldsymbol{\theta}$*. Tai galima paaiškinti taip. Pažymėkime $A_{\boldsymbol{t}} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{t}\}$ aibę galimų imties realizacijų reikšmių, su kuriomis pakankamoji statistika įgyja reikšmę $\boldsymbol{t}$. Pagal apibrėžimą imties $\mathbf{X}$ skirstinys aibėje $A_{\boldsymbol{t}}$ nepriklauso nuo $\boldsymbol{\theta}$, todėl, žinant $\boldsymbol{T}$ realizaciją $\boldsymbol{t}$, imties $\mathbf{X}$ realizacija nebegali suteikti jokios papildomos informacijos apie $\boldsymbol{\theta}$.

Pati imtis $\mathbf{X}$ yra pakankamoji statistika, bet, jei tai įmanoma, ieškoma minimalios dimensijos pakankamoji statistika, kuri leidžia labiausiai redukuoti duomenis ir daryti išvadas apie nežinomus parametrus, naudojantis tik šios statistikos realizacijomis. Pakankamosios statistikos $\boldsymbol{T}$ dimensija k tenkina nelygybę $m \leq k \leq n$. Gana dažnai minimalios dimensijos pakankamosios statistikos dimensija sutampa su parametrų vektoriaus $\boldsymbol{\theta}$ dimensija m.

3.2.1 pavyzdys. *Puasono skirstinio parametro pakankamoji statistika.* Tarkime, kad $X_1, ..., X_n$ yra paprastoji atsitiktinė imtis, gauta stebint a. d. X, kurio skirstinys priklauso Puasono dėsnių šeimai $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(\lambda), \quad \lambda > 0\}$. Randame sąlyginį a. v. $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ skirstinį, kai $S_n = X_1 + \cdots + X_n = N$:

$$\mathbf{P}\{X_1 = m_1, ..., X_n = m_n | S_n = N\} = \frac{\mathbf{P}\{X_1 = m_1\} ... \mathbf{P}\{X_n = m_n\}}{\mathbf{P}\{S_n = N\}} =$$

$$= \frac{N!}{m_1!...m_n!}\left(\frac{1}{n}\right)^N, \quad 0 \le m_i \le N, \quad m_1 + ... + m_n = N.$$

Matome, kad šis sąlyginis skirstinys yra polinominis ir nepriklauso nuo λ. Taigi S_n yra pakankamoji parametro λ (arba šeimos $\mathcal{P}$) statistika.

Ieškoti pakankamųjų statistikų naudojantis tiesiog jų apibrėžimu paprastai būna sudėtinga, todėl joms rasti dažniau naudojamas faktorizacijos kriterijus.

Praktiškai ieškant pakankamųjų statistikų prireiks tikėtinumo funkcijos sąvokos.

3.2.2 apibrėžimas. Atsitiktinė funkcija

$$L(\boldsymbol{\theta}) = L_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{X};\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m, \tag{3.2.3}$$

vadinama imties $\mathbf{X}$ *tikėtinumo funkcija.*

Tikėtinumo funkcija gaunama vietoje argumento $\boldsymbol{x}$ į tanko $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$ išraišką įstačius atsitiktinį vektorių (imtį) $\mathbf{X}$. Indeksas $\mathbf{X}$ dažnai nerašomas.

3.2.1 teorema. *(*Neimano ir Fišerio faktorizacijos kriterijus*). Statistika $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\mathbf{X})$ yra pakankama parametro $\boldsymbol{\theta}$ statistika tada ir tiktai tada, kai tikėtinumo funkcija $L_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta})$ gali būti faktorizuojama šitaip:*

$$L_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}) = q(\boldsymbol{T};\boldsymbol{\theta})\, W(\mathbf{X}); \tag{3.2.4}$$

čia pirmas daugiklis priklauso nuo $\boldsymbol{T}$ ir $\boldsymbol{\theta}$, o antrasis – tiktai nuo $\mathbf{X}$.

Įrodymas. Teoremą įrodysime dviem atvejais: kai $\mathbf{X}$ skirstinys diskretusis ir kai šis skirstinys yra absoliučiai tolydus, o statistika $\boldsymbol{T}$ pakankamai „glodi“. Bendru atveju įrodymą galima rasti knygoje [12].

1. *Diskretusis atvejis.* a) Tarkime, kad statistika $\boldsymbol{T} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ yra tokia, kad tenkinama (3.2.4) lygybė. Įvykis $\{\mathbf{X} = \boldsymbol{x}\}$ implikuoja įvykį $\{\boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\}$, todėl, jei $\boldsymbol{t} \in \mathbf{R}^k$, $T(\boldsymbol{x}) \ne \boldsymbol{t}$, tai

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{X} = \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{t}\} \le \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{t}\} = 0. \tag{3.2.5}$$

Jei $\boldsymbol{t} \in \mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{t}$, tai iš (3.2.4) formulės išplaukia, kad

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{X} = \boldsymbol{x}|\boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{t}\} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{X} = \boldsymbol{x}|\boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\}$$

$$= \frac{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{X} = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\}}{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\}} = \frac{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{X} = \boldsymbol{x}\}}{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\}} = \frac{f\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}\}}{\sum\limits_{\boldsymbol{y}:\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})} f\{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta}\}}$$

$$= \frac{q\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\theta}\}W(\boldsymbol{x})}{\sum\limits_{\boldsymbol{y}:\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})} q\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\theta}\}\, W(\boldsymbol{y})} = \frac{W(\boldsymbol{x})}{\sum\limits_{\boldsymbol{y}:\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})} W(\boldsymbol{y})}.$$

Gavome, kad su visais $\boldsymbol{t} \in \mathbf{R}^k$ sąlyginė tikimybė $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{X} = \boldsymbol{x}|\boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{t}\}$ nepriklauso nuo $\boldsymbol{\theta}$. Taigi $\boldsymbol{T}$ yra pakankamoji statistika.

b) Atvirkščiai, jei $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{X} = \boldsymbol{x}|\boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{t}\}$ nepriklauso nuo $\boldsymbol{\theta}$, tai $W(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{X} = \boldsymbol{x}|\boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\}$ nepriklauso nuo $\boldsymbol{\theta}$. Tada

$$f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{X} = \boldsymbol{x}\} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{X} = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\} =$$

$$= \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{X} = \boldsymbol{x}|\boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\}\, \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\} = W(\boldsymbol{x})\, q(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x});\boldsymbol{\theta}).$$

2. *Tolydusis atvejis.* Tarkime, kad statistika

$$\boldsymbol{T} = (T_1(\mathbf{X}), \dots, T_k(\mathbf{X}))^T, \quad \boldsymbol{T}:\ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k, \quad m \le k \le n,$$

tenkina (3.2.4) lygybę.

Jei $k < n$, tarsime, kad statistika $\boldsymbol{T}$ yra tokia, jog atvaizdį $\boldsymbol{T}:\ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ galima papildyti iki glodaus atvaizdžio $\tilde{\boldsymbol{T}}:\ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, t. y. rasti kitą statistiką

$$\boldsymbol{T}^* = (T_{k+1}(\mathbf{X}), \dots, T_n(\mathbf{X}))^T, \quad \boldsymbol{T}^*:\ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-k},$$

tokią, kad funkcijos $T_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, \dots, n$, būtų tolydžiai diferencijuojamos aibėje $\mathbf{R}^n$, o atvaizdis

$$\tilde{\boldsymbol{T}} = (T_1, \dots, T_n)^T:\ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

būtų bijekcija ir su visais $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ jakobianas

$$J(\boldsymbol{x}) = det[\partial T_i(\boldsymbol{x})/\partial x_j]_{n\times n} \ne 0$$

nevirstų nuliu. Statistikos $\tilde{\boldsymbol{T}}(\mathbf{X})$ tankis

$$f_{\tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta}) = f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta}) \mid J^{-1}(\boldsymbol{x}) \mid;$$

čia $\boldsymbol{x}$ tenkina lygybę $\boldsymbol{y} = \tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x})$. Statistikos $\boldsymbol{T}(\mathbf{X})$ tankis yra

$$f_{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})}(\boldsymbol{y}_1 \mid \boldsymbol{\theta}) = \int_{\mathbf{R}^{n-m}} f_{\tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{y}_2 = \int_{\mathbf{R}^{n-m}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta}) \mid J^{-1}(\boldsymbol{x}) \mid d\boldsymbol{y}_2; \tag{3.2.6}$$

čia $\boldsymbol{y}_1$ ir $\boldsymbol{y}_2$ yra vektoriaus $\boldsymbol{y}$ atitinkamai m pirmųjų ir $n-m$ paskutinių koordinačių vektoriai.

Iš atsitiktinio vektoriaus $\tilde{\boldsymbol{T}}(\mathbf{X})$ sąlyginio tankio, žinant $\boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{y}_1$, apibrėžimo išplaukia

$$f_{\tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{y}_1}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta}) = \frac{f_{\tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta})}{f_{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})}(\boldsymbol{y}_1 \mid \boldsymbol{\theta})} = \frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta}) \mid J^{-1}(\boldsymbol{x}) \mid}{f_{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})}(\boldsymbol{y}_1 \mid \boldsymbol{\theta})}. \tag{3.2.7}$$

a) Jei teisinga (3.2.4) lygybė, tai iš (3.2.6) ir (3.2.7) lygybių gaunama

$$f_{\tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{y}_1}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta}) = \frac{q(\boldsymbol{y}_1;\boldsymbol{\theta})W(\boldsymbol{x}) \mid J^{-1}(\boldsymbol{x}) \mid}{\int\limits_{\mathbf{R}^{n-k}} q(\boldsymbol{y}_1;\boldsymbol{\theta})W(\boldsymbol{x}) \mid J^{-1}(\boldsymbol{x}) \mid d\boldsymbol{y}_2}$$

$$= \frac{W(\boldsymbol{x}) \mid J^{-1}(\boldsymbol{x}) \mid}{\int\limits_{\mathbf{R}^{n-m}} W(\boldsymbol{x}) \mid J^{-1}(\boldsymbol{x}) \mid d\boldsymbol{y}_2}.$$

Taigi sąlyginis $\tilde{\boldsymbol{T}}(\mathbf{X})$ (ir tuo pačiu ir $\mathbf{X}$) skirstinys, žinant $\boldsymbol{T}(\mathbf{X})$, nepriklauso nuo parametro $\boldsymbol{\theta}$.

b) Jei $\mathbf{X}$ sąlyginis skirstinys, žinant $\boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{y}_1$, nepriklauso nuo $\boldsymbol{\theta}$, tai sąlyginis $\tilde{\boldsymbol{T}}(\mathbf{X})$ skirstinys, žinant $\boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{y}_1$, taip pat nepriklauso nuo $\boldsymbol{\theta}$. Iš (3.2.7) išplaukia, kad

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta}) = f_{\tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{y}_1}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta}) \mid J(\boldsymbol{x}) \mid f_{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})}(\boldsymbol{y}_1 \mid \boldsymbol{\theta}). \tag{3.2.8}$$

Paskutinėje lygybėje paėmę $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$, gauname, kad pirmi du daugikliai šios lygybės dešinėje priklauso tiktai nuo $\boldsymbol{x}$. Jų sandaugą pažymėkime $W(\boldsymbol{x})$. Trečiasis daugiklis yra $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ ir $\boldsymbol{\theta}$ funkcija. Pažymėkime šią funkciją q. Tada

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = q(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\theta})\, W(\boldsymbol{x}).$$

▲

3.2.2 pavyzdys. *Puasono skirstinio parametro pakankamosios statistikos radimas naudojant faktorizacijos kriterijų.* Kaip ir 3.2.1 pavyzdyje, tegu paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint Puasono a. d. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Tikėtinumo funkcija

$$L(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda^{X_j}}{X_j!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \left(\lambda^{S_n} \mathrm{e}^{-n\lambda}\right) \frac{1}{X_1!...X_n!}$$

faktorizuojama į dviejų daugiklių sandaugą. Pirmasis daugiklis priklauso tik nuo sumos $S_n = X_1 + ... + X_n$ ir nuo λ, o antrasis daugiklis nuo λ nepriklauso. Taigi, remiantis faktorizacijos kriterijumi, S_n yra pakankamoji statistika.

Atkreipsime dėmesį, kad (3.2.4) lygybe pakankamoji statistika nusakoma nevienareikšmiškai. Akivaizdu, kad a. v. $(X_1, ..., X_n)^T$ arba a. v. $(X_{(1)}, ..., X_{(n)})^T$ yra bet kurios šeimos pakankamoji statistika. Jos dimensija sutampa su imties tūriu n. Tokios pakankamos statistikos vadinamos *trivialiosiomis*. Pirmesniame pavyzdyje statistikos $\boldsymbol{T}_1 = (X_1, ..., X_n)^T$, $\boldsymbol{T}_2 = (X_1 + X_2, X_3, ..., X_n)^T, ..., T_n = X_1 + ... + X_n$ yra pakankamosios. Paskutinė iš jų turi mažiausią dimensiją ir labiausiai redukuoja imtį.

Įrodysime teoremą, tvirtinančią, kad nepaslinktųjų įvertinių klasėje minimalios kvadratinės rizikos įvertiniai yra pakankamųjų statistikų funkcijos.

3.2.2 teorema. *(*Rao, Blekvelo ir Kolmogorovo*). Tarkime, kad $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ yra nepaslinktasis parametro $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta})$ įvertinys ir $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\mathbf{X})$ pakankamoji šeimos $\{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$ statistika. Tada sąlyginis vidurkis $\hat{\gamma} = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\tilde{\gamma} \mid \boldsymbol{T})$ yra toks nepaslinktasis parametro $\boldsymbol{\gamma}$ įvertinys, kad*

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\gamma}) \leq \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\theta}}(\tilde{\gamma}). \tag{3.2.9}$$

Įrodymas. Iš pradžių tarkime, kad parametras γ vienmatis. Įvertinys $\tilde{\gamma}$ nepriklauso nuo $\boldsymbol{\theta}$. Iš sąlyginio vidurkio savybių išplaukia, kad $\hat{\gamma}$ yra $\boldsymbol{T}$ funkcija, taigi ir $\mathbf{X}$ funkcija. Vadinasi, $\hat{\gamma}$ yra įvertinys. Iš sąlyginio vidurkio sąvybių ([11], p. 123–132) išplaukia

$$\mathbf{E}(\hat{\gamma}) = \mathbf{E}\{\mathbf{E}(\tilde{\gamma} \mid \boldsymbol{T})\} = \mathbf{E}(\tilde{\gamma}) = \gamma,$$

todėl $\hat{\gamma}$ yra nepaslinktasis įvertinys. Nagrinėjamų įvertinių skirtumo dispersija

$$\boldsymbol{V}(\hat{\gamma}-\tilde{\gamma}) = \mathbf{E}(\hat{\gamma}-\gamma-(\tilde{\gamma}-\gamma))^2 = \boldsymbol{V}(\hat{\gamma}) - 2\mathbf{E}((\hat{\gamma}-\gamma)(\tilde{\gamma}-\gamma)) + \boldsymbol{V}(\tilde{\gamma}).$$

Iš sąlyginio vidurkio savybių gauname

$$\mathbf{E}((\hat{\gamma}-\gamma)(\tilde{\gamma}-\gamma)) = \mathbf{E}\{\mathbf{E}[((\hat{\gamma}-\gamma)(\tilde{\gamma}-\gamma)) \mid \boldsymbol{T}]\} =$$

$$= \mathbf{E}\{(\hat{\gamma}-\gamma)\mathbf{E}[(\tilde{\gamma}-\gamma) \mid \boldsymbol{T}]\} = \mathbf{E}(\hat{\gamma}-\gamma)^2 = \boldsymbol{V}(\hat{\gamma}).$$

Todėl

$$0 \le \boldsymbol{V}(\tilde{\gamma}-\hat{\gamma}) = \boldsymbol{V}(\tilde{\gamma}) - \boldsymbol{V}(\hat{\gamma}).$$

Tai ir reikėjo įrodyti.

Tarkime, kad $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k)^T$ daugiamatis ir $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{E}(\tilde{\boldsymbol{\gamma}} \mid \boldsymbol{T})$. Imkime vektorių $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_k)^T \in \mathbf{R}^k$. Tada $\boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \sum_{i=1}^k c_i\hat{\gamma}_i$ yra nepaslinktasis vienmačio parametro $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\gamma}$ įvertinys. Todėl su visais $\boldsymbol{c}$ ir $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{V}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{\gamma}}\right) \le \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{c}^T\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\right) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{V}(\tilde{\boldsymbol{\gamma}})\boldsymbol{c}.$$

Iš čia gaunamas teoremos teiginys.

▲

3.3. Statistikų pilnumas. NMD įvertinių radimas

Iš Rao, Blekvelo ir Kolmogorovo teoremos matyti, kad bet kuriam nepaslinktajam įvertiniui galima rasti kitą nepaslinktąjį įvertinį, kuris yra tik pakankamosios statistikos funkcija ir kurio kvadratinė rizika yra ne didesnė už pirmojo. Parodysime, kad labai dažnai nepaslinktasis įvertinys, kuris yra pakankamosios statistikos funkcija, yra vienintelis. Tuo atveju šis įvertinys turi minimalią riziką visų nepaslinktųjų įverčių klasėje.

Tarkime, kad turime statistinį modelį $\mathbf{X} \sim \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m$.

3.3.1 apibrėžimas. Pakankamoji statistika $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\mathbf{X}) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ vadinama *pilnąja*, jei su bet kuria mačiąja funkcija $\varphi : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ iš lygybės

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi(\boldsymbol{T})) = 0 \quad \text{su visais} \quad \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$$

išplaukia $\varphi(\boldsymbol{T}) = 0$ su tikimybe 1. Be to, jei funkcija $\varphi(\boldsymbol{T})$ aprėžta, tai statistika $\boldsymbol{T}$ vadinama *aprėžtai pilna*.

Iš apibrėžimo išplaukia, jei $\boldsymbol{\varphi} : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ yra mačioji funkcija ir $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{T})) = \mathbf{0}$ su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, tai $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{T}) = \mathbf{0}$ su tikimybe 1.

3.3.1 teorema. *Jei egzistuoja parametro $\boldsymbol{\gamma}$ nepaslinktasis įvertinys $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ ir $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\mathbf{X})$ yra pilnoji pakankamoji statistika, tai sąlyginis vidurkis $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{E}(\tilde{\boldsymbol{\gamma}} \mid \boldsymbol{T})$ yra parametro $\boldsymbol{\gamma}$ minimalios rizikos nepaslinktasis įvertinys.*

Jis vienintelis su tikimybe 1, t. y., jei $\boldsymbol{\gamma}^*$ yra kitas minimalios rizikos nepaslinktasis įvertinys, tai $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\boldsymbol{\gamma}^* = \hat{\boldsymbol{\gamma}}\} = 1$ su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$.

Įrodymas. Įvertinys $\hat{\gamma} = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\tilde{\gamma} \mid \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{T})$ yra $\boldsymbol{T}$ funkcija ir $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta})$ su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$. Remiantis Rao, Blekvelo ir Kolmogorovo teorema, užtenka parodyti, kad $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ yra minimalios dispersijos įvertinys visų nepaslinktųjų įvertinių, kurie yra $\boldsymbol{T}$ funkcijos, klasėje.

Tarkime, kad $\boldsymbol{\gamma}^* = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{T})$ yra kitas nepaslinktasis įvertinys, t. y. $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta})$ su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$. Tada $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{T}) - \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{T})) = \mathbf{0}$ su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$.

Pakankamoji statistika $\boldsymbol{T}$ yra pilnoji, todėl

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{T}) - \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{T}) = \mathbf{0}) = 1 \quad \text{su visais } \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}.$$

Gavome, kad visos pakankamosios statistikos funkcijos, kurios yra nepaslinktieji įvertiniai, su tikimybe 1 sutampa, todėl turi tą pačią dispersiją. Remiantis 3.2.2 teorema, $\hat{\gamma}$ turi minimalią dispersiją.

▲

3.3.1 pavyzdys. *Puasono skirstinio parametro pakankamosios statistikos pilnumas.* Tegu paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $0 < \lambda < \infty$. Įsitikinsime, kad pakankamoji statistika $S_n = X_1 + ... + X_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$ yra pilnoji. Vidurkis

$$\mathbf{E}_\lambda \varphi(S_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) \frac{(n\lambda)^k}{k!} \mathrm{e}^{-n\lambda} \equiv 0, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Ši sąlyga ekvivalenti sąlygai

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) \frac{n^k \lambda^k}{k!} \equiv 0, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Laipsninės eilutės suma su visais $\lambda > 0$ lygi nuliui tik tada, kai koeficientai prie visų λ laipsnių lygūs 0, t. y. $\varphi(0) = \varphi(1) = \cdots = 0$. Puasono skirstinys sukoncentruotas sveikuose neneigiamuose taškuose, todėl $\mathbf{P}_\lambda\{\varphi(S_n) = 0\} = 1$. Statistika S_n ne tik pakankamoji, bet ir pilnoji.

Taigi galima nurodyti du būdus, rasti NMD įvertinius, kai egzistuoja pilnoji ir pakankamoji statistika T.

Pirmas būdas. Galima rasti bet kokį nepaslinktąjį įvertinį $\tilde{\gamma}$ ir jį patikslinti remiantis 3.2.2 teorema, t. y. rasti

$$\mathbf{E}(\tilde{\gamma}|T) = \hat{\gamma}(T). \tag{3.3.1}$$

3.3.2 pavyzdys. *Puasono skirstinio parametro NMD įvertinys.* Tegu vėl paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Reikia rasti parametro λ NMD įvertinį. Imkime įvertinį $\tilde{\lambda} = X_1$, kuris yra nepaslinktasis: $\mathbf{E}_\lambda X_1 = \lambda$. Jį sudarant panaudotas tik pirmasis stebėjimas. Nesunku patikrinti, kad a. d. X_1 sąlyginis skirstinys, kai pakankamoji statistika S_n fiksuota ir lygi N, yra binominis $B(N,\ 1/n)$. Todėl

$$\hat{\lambda} = \mathbf{E}(X_1|S_n) = S_n \frac{1}{n} = \bar{X}$$

yra parametro λ NMD įvertinys.

3.3.3 pavyzdys. *Normaliojo skirstinio vidurkio funkcijos NMD įvertinys.* Tegu paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbf{R}$, σ žinomas. Reikia rasti parametro μ funkcijos $\gamma = \gamma(\mu) = \Phi((y - \mu)/\sigma)$, t. y. atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcijos taške y, NMD įvertinį.

Imkime įvertinį

$$\tilde{\gamma} = \mathbf{1}_{(-\infty, y]}(X_1),$$

kuris yra nepaslinktasis:

$$\mathbf{E}_\mu \tilde{\gamma} = \mathbf{E}_\mu(\mathbf{1}_{(-\infty,y]}(X_1)) = \mathbf{P}_\mu\{X_1 \le y\} = \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right).$$

Atsitiktinis vektorius $(X_1, \bar{X})^T$ turi dvimatį normalųjį skirstinį su vidurkių vektoriumi $(\mu,\mu)^T$ ir kovariacine matrica $\mathbf{\Sigma} = [\sigma_{ij}]_{2\times 2}$, $\sigma_{11} = \sigma^2$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{22} = \sigma^2/n$. Taigi a. d. X_1 sąlyginis skirstinys, kai $\bar{X}$ fiksuotas, yra normalusis $N(\bar{X}, \sigma^2(n-1)/n)$. Randame parametro γ NMD įvertinį

$$\hat{\gamma} = \mathbf{E}(\tilde{\gamma}|\bar{X}) = \mathbf{P}\{X_1 \le y|\bar{X}\} = \Phi\left(\frac{y-\bar{X}}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right).$$

Antras būdas. Galima išspręsti h atžvilgiu funkcinę lygtį

$$\mathbf{E}_\theta h(T) \equiv \gamma(\theta), \quad \theta \in \Theta. \tag{3.3.2}$$

Tada NMD įvertinys yra $\hat{\gamma} = h(T)$.

3.3.4 pavyzdys. *Puasono skirstinio parametro funkcijos NMD įvertinys.* Tegu paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Reikia rasti tikimybės $\mathbf{P}\{X = 2|\lambda\}$, t. y. parametro λ funkcijos $\gamma(\lambda) = \lambda^2 e^{-\lambda}/2!$ NMD įvertinį.

Iš 3.2.2 ir 3.3.1 teoremų išplaukia, kad bet kuri statistikos S_n funkcija $h(S_n)$ yra savo vidurkio $\mathbf{E}_\lambda h(S_n)$ NMD įvertinys. Taigi tereikia atžvilgiu h išspręsti funkcinę lygtį (3.3.2)

$$\mathbf{E}_\lambda h(S_n) = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda} \equiv \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = \gamma(\lambda).$$

Padauginę abi tapatybės puses iš $e^{n\lambda}$ ir išskleidę eilute, gauname tapatybę

$$\sum_{k=0}^{\infty} h(k)\frac{(n\lambda)^k}{k!} \equiv \frac{\lambda^2}{2!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{((n-1)\lambda)^j}{j!}.$$

Matome, kad $h(0) = h(1) = 0$. Sulyginę koeficientus prie $\lambda^k, k \ge 2$, randame

$$h(k)\frac{n^k}{k!} = \frac{(n-1)^{k-2}}{(k-2)!}, \quad h(k) = C_k^2(\frac{1}{n})^2(1-\frac{1}{n})^{k-2}, \quad k = 2, 3, ...$$

Taigi parametro $\gamma = \gamma(\lambda)$ NMD įvertinys $\hat{\gamma}$ yra toks: $\hat{\gamma} = 0$, kai $S_n = 0;\ 1;$

$$\hat{\gamma} = C_{S_n}^2(1/n)^2(1-1/n)^{S_n-2},$$

kai $S_n \ge 2$. Matome, kad Puasono skirstinio tikimybė $\mathbf{P}\{X = 2|\lambda\}$ vertinama binomine tikimybe $\mathbf{P}\{Y = 2\}$, kai $Y \sim B(S_n,\ 1/n)$.

3.3.5 pavyzdys. *Tolygiojo skirstinio parametro funkcijos NMD įvertinys.* Tegu paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim U(0,\theta), \theta > 0$. Reikia rasti NMD įvertinius parametro θ funkcijų a) $\gamma_1 = \theta^m$, $m > 0$ – fiksuotas skaičius; b) $\gamma_2 = \mathrm{e}^\theta$.

3.3.9 pavyzdyje įrodyta, kad parametro θ pilnoji ir pakankamoji statistika yra $X_{(n)}$, jos tankio funkcija

$$f_n(x|\theta) = \frac{n}{\theta^n}x^{n-1}, \quad 0 < x < \theta.$$

Taigi atveju a) reikia rasti tokią funkciją $h(X_{(n)})$, kuri tenkintų funkcinę lygtį

$$\mathbf{E}_\theta(h(X_{(n)})) = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta h(x)x^{n-1}dx \equiv \theta^m, \quad 0 < \theta < \infty.$$

Jeigu parinksime $h(x) = x^m(n+m)/n$, tai

$$\mathbf{E}_\theta(h(X_{(n)})) = \frac{n+m}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+m-1}dx \equiv \theta^m.$$

Taigi parametro $\gamma_1 = \theta^m$ NMD įvertinys yra

$$\hat{\gamma}_1 = X_{(n)}^m \frac{n+m}{n}.$$

Atveju b) h atžvilgiu reikia spręsti tokią lygtį:

$$\mathbf{E}_\theta(h(X_{(n)})) = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta h(x)x^{n-1}dx \equiv \mathrm{e}^\theta, \quad 0<\theta<\infty.$$

Išbandykime funkciją $\exp\{X_{(n)}\}$. Integruodami dalimis gauname

$$\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{X}_{(n)}} = \frac{\mathrm{n}}{\theta^{\mathrm{n}}}\int_0^\theta \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{x}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{dx} = \mathrm{e}^\theta - \frac{1}{\theta^{\mathrm{n}}}\int_0^\theta \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{x}^{\mathrm{n}}\mathrm{dx} = \mathrm{e}^\theta - \mathbf{E}_\theta(\mathrm{X}_{(\mathrm{n})}\exp\{\mathrm{X}_{(\mathrm{n})}\}/\mathrm{n}).$$

Taigi parametro $\gamma_2 = \mathrm{e}^\theta$ NMD įvertinys yra

$$\hat{\gamma}_2 = \exp\{X_{(n)}\} + X_{(n)}\exp\{X_{(n)}\}/n.$$

Tikrinti pakankamosios statistikos pilnumą remiantis apibrėžimu kartais gana sudėtinga. Suformuluosime sąlygas, kuriomis gana svarbių praktikoje tikimybinių skirstinių pakankamosios statistikos yra pilnosios.

3.3.2 apibrėžimas. Sakoma, kad a. v. $\mathbf{X}$ skirstinys priklauso *k-parametrinei eksponentinio tipo skirstinių šeimai*, jeigu to skirstinio tankis σ-baigtinio mato μ atžvilgiu yra

$$f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = h(\boldsymbol{x})\exp\{\boldsymbol{\eta}^T(\boldsymbol{\theta})\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) - b(\boldsymbol{\theta})\}, \;\; \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n, \tag{3.3.3}$$

čia

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,...,\theta_k)^T \in \boldsymbol{\Theta}\subset\mathbf{R}^k, \quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}) = (\eta_1(\boldsymbol{\theta}),...,\eta_k(\boldsymbol{\theta}))^T : \boldsymbol{\Theta}\to\mathcal{G},$$

$$b:\boldsymbol{\Theta}\to\mathbf{R}, \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = (T_1(\boldsymbol{x}),\ldots,T_k(\boldsymbol{x}))^T : \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^k,$$

yra mačiosios funkcijos, o $h(x):\mathbf{R}^n\to[0,\infty)$ mačioji neneigiama μ-beveik visur funkcija.

3.3.1 pastaba. Iš apibrėžimo išplaukia, kad jei $\mathbf{X} = (X_1,...,X_n)^T$ yra paprastoji imtis, o a. d. X_i tikimybinis tankis (mato μ_i atžvilgiu) priklauso eksponentinei skirstinių šeimai su funkcijomis $h(x_i)$, $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{T}(x_i)$, $b(\boldsymbol{\theta})$, tai imties $\mathbf{X}$ tikimybinis tankis (mato $\mu = \mu_1\times\cdots\times\mu_n$ atžvilgiu) priklauso eksponentinei skirstinių šeimai su funkcijomis $h(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^n h(x_i)$, $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{T}^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{T}(x_i)$, $nb(\boldsymbol{\theta})$.

Jei funkcija $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}):\boldsymbol{\Theta}\to\mathcal{G}\subset\mathbf{R}^k$ yra bijekcija, tai, atlikus reparametrizaciją, modelis pertvarkomas į vadinamąją *kanoninę formą*

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\eta}) = h(\boldsymbol{x})\exp\{\boldsymbol{\eta}^T\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) - B(\boldsymbol{\eta})\}, \;\; \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n. \tag{3.3.4}$$

Funkcija $\tilde{f}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\eta}) \geq 0$ yra tikimybinis tankis, jei $\int_{\mathbf{R}^n}\tilde{f}(x;\boldsymbol{\eta})\mu(dx) = 1$. Tai ekvivalentu tokiai sąlygai:

$$B(\boldsymbol{\eta}) = \ln\int_{\mathbf{R}^n} h(\boldsymbol{x})\exp\{\boldsymbol{\eta}^T\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\}\mu(d\boldsymbol{x}). \tag{3.3.5}$$

Integralas dešiniojoje pusėje teigiamas su visais $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^k$, nes funkcija h teigiama μ-b.v. Taigi šios šeimos parametrų reikšmių sritis yra

$$\mathcal{G} = \{\boldsymbol{\eta} : B(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbf{R}\} = \{\boldsymbol{\eta} : \int_{\mathbf{R}^n} h(\boldsymbol{x}) \exp\{\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\}\mu(d\boldsymbol{x}) < \infty)\}. \qquad (3.3.6)$$

3.3.6 pavyzdys. *Puasono skirstinys priklauso eksponentinei skirstinių šeimai.* Tarkime, $X \sim \mathcal{P}(\lambda), \quad \lambda > 0$. Tada

$$f(x;\lambda) = \frac{\lambda^k}{x!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{1}{x!}\,\mathrm{e}^{x\ln\lambda-\lambda}, \quad x = 0,1,..., \ 0 < \lambda < \infty.$$

Tai eksponentinė skirstinių šeima, kai $T(x) = x$, $\eta(\lambda) = \ln\lambda$, $b(\lambda) = \lambda$, $h(x) = 1/x!$.

Reparametrizavus skirstinį (imant $\eta = \ln\lambda$),

$$\tilde{f}(x;\eta) = h(x)\,\mathrm{e}^{x\eta-\mathrm{e}^{\eta}}, \quad x = 0,1,..., \quad \eta \in \mathbf{R}.$$

Tai eksponentinė kanoninės formos skirstinių šeima, kai $T(x) = x$, $B(\eta) = \mathrm{e}^{\eta}$.

3.3.7 pavyzdys. *Binominis skirstinys priklauso eksponentinei skirstinių šeimai.* Tarkime, $X \sim B(m,p), \quad p \in (0,1)$. Tada

$$f(x;p) = C_m^x\,p^x(1-p)^{m-x} =$$
$$= C_m^x\,\exp\{x\ln\frac{p}{1-p} + m\ln(1-p)\}, \quad x = 0,1...,m, \quad p \in (0,1).$$

Tai eksponentinė skirstinių šeima, kai $T(x) = x$, $\eta(p) = \ln\frac{p}{1-p}$, $b(p) = -m\ln(1-p)$, $h(x) = C_m^x$.

Reparametrizavus skirstinį (imant $\eta = \ln\frac{p}{1-p}$),

$$\tilde{f}(x;\eta) = h(x)\,\mathrm{e}^{\eta x - m\ln(1+\mathrm{e}^{\eta})}, \quad x = 0,1,...,m, \quad \eta \in \mathbf{R}.$$

Tai eksponentinė kanoninės formos skirstinių šeima, kai $T(x) = x$, $B(\eta) = m\ln(1+\mathrm{e}^{\eta})$

3.3.8 pavyzdys. *Normalusis skirstinys priklauso eksponentinei skirstinių šeimai.* Tarkime, $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $\mu \in \mathbf{R}$, $\sigma \in (0,\infty)$. Tada

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu x}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \ln\sigma\right\}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

tai eksponentinė skirstinių šeima, kai

$$\boldsymbol{T}(x) = (T_1(x), T_2(x))^T = (x^2, x)^T,\ \boldsymbol{\eta}(\mu,\sigma^2) = (-1/2\sigma^2, \mu/\sigma^2)^T,$$
$$b(\mu,\sigma^2) = \mu^2/2\sigma^2 + \ln\sigma, \quad h(x) = 1/\sqrt{2\pi}.$$

Reparametrizavus skirstinį (imant $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1,\eta_2)^T = (-1/(2\sigma^2), \mu/\sigma^2)^T$,

$$\tilde{f}(x;\boldsymbol{\eta}) = h(x)\ \exp\left\{\boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{T} + \eta_2^2/4\eta_1 - \frac{1}{2}\ln(-2\eta_1)\right\}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad \boldsymbol{\eta} \in (0,\infty)\times\mathbf{R}.$$

Tai eksponentinė kanoninės formos skirstinių šeima, kai $\boldsymbol{T}(x) = (x^2,x)^T$, $B(\boldsymbol{\eta}) = = -\eta_2^2/4\eta_1 + \frac{1}{2}\ln(-2\eta_1)$.

3.3.2 pastaba. Eksponentinei šeimai priklauso binominis, neigiamasis binominis, Puasono, eksponentinis, normalusis, gama, beta ir kt. skirstiniai. Skirstinio, kuris nepriklauso eksponentinių skirstinių šeimai, pavyzdys gali būti Koši skirstinys.

3.3.3 pastaba. Pabrėšime, kad eksponentinis skirstinys yra tik vienas iš vienmatės eksponentinės skirstinių šeimos pavyzdžių.

Kad užrašai būtų paprastesni, įvesime keletą papildomų žymėjimų. Tegu $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\theta}) : \mathbf{R}^n \times \boldsymbol{\Theta} \to \mathbf{R}$, yra imties realizacijos $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ir nežinomo parametro $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots,\ \theta_m)^T \in \boldsymbol{\Theta}$ mačioji funkcija. Šios funkcijos išvestines pagal $\boldsymbol{\theta}$ žymėsime

$$\dot{\varphi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1}\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}), \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_m}\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})\right)^T, \quad \ddot{\varphi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_l \partial \theta_s}\right]_{m\times m},$$

o išvestines pagal $\boldsymbol{x}$ žymėsime

$$\varphi'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})\right)^T, \quad \varphi''(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{n\times n}.$$

Jei $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)^T : \boldsymbol{\Theta} \to \mathbf{R}^k$ yra vektorinė parametro $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T$ funkcija, tai jos išvestinę taške $\boldsymbol{\theta}$ žymėsime

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{\partial \varphi_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}\right]_{m\times k}.$$

3.3.2 teorema. *Tarkime, kad a. v.* $\mathbf{X}$ *tikimybinis tankis σ-baigtinio mato μ atžvilgiu priklauso kanoninės formos (3.3.4) eksponentinei skirstinių šeimai. Tada:*

1) aibė $\mathcal{G}$ yra iškila;

2) funkcija $B(\boldsymbol{\eta})$ yra iškila aibėje $\mathcal{G}$;

3) jei aibė $\mathcal{G}$ turi bent vieną vidinį tašką $\boldsymbol{\eta}_0$, tai egzistuoja tokia nulinio taško aplinka $U_\varepsilon(\mathbf{0})$, kad su visais $\boldsymbol{t} \in U_\varepsilon(\mathbf{0})$ statistikos $\boldsymbol{T}$ momentų generuojanti funkcija $M_{\boldsymbol{\eta}_0}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\eta}_0} \mathrm{e}^{\boldsymbol{t}^T \boldsymbol{T}(\mathbf{X})}$ yra pavidalo

$$M_{\boldsymbol{\eta}_0}(\boldsymbol{t}) = \mathrm{e}^{B(\boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{t}) - B(\boldsymbol{\eta}_0)}.$$

Be to, aplinkoje $U_\varepsilon(\boldsymbol{\eta}_0)$ egzistuoja išvestinės $\dot{B}(\boldsymbol{\eta})$ ir $\ddot{B}(\boldsymbol{\eta})$ ir galioja lygybės:

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{T}(\mathbf{X})) = \dot{B}(\boldsymbol{\eta}), \quad \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{T}(\mathbf{X})) = \ddot{B}(\boldsymbol{\eta}).$$

Įrodymas. 1) Tarkime, kad $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in \mathcal{G}$, o $\alpha \in [0, 1]$. Iš aibės $\mathcal{G}$ (3.3.6) apibrėžimo išplaukia, kad $B(\boldsymbol{\eta}_1), B(\boldsymbol{\eta}_2) \in \mathbf{R}$. Kadangi $\alpha + (1 - \alpha) = 1$, tai, pritaikę Hiolderio nelygybę, gauname

$$\int_{\mathbf{R}^n} h(\boldsymbol{x}) \exp\{\alpha \boldsymbol{\eta}_1^T\, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha)\boldsymbol{\eta}_2^T\, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\}\mu(d\boldsymbol{x})$$

$$\leq \left(\int_{\mathbf{R}^n} h(\boldsymbol{x}) \exp\{(\boldsymbol{\eta}_1^T\, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\}\mu(d\boldsymbol{x})\right)^{\alpha} \left(\int_{\mathbf{R}^n} h(\boldsymbol{x}) \exp\{(\boldsymbol{\eta}_2^T\, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\}\mu(d\boldsymbol{x})\right)^{1-\alpha}$$

$$= \mathrm{e}^{\alpha B(\boldsymbol{\eta}_1)}\ \mathrm{e}^{(1-\alpha)B(\boldsymbol{\eta}_2)} < \infty. \tag{3.3.7}$$

Todėl integralas kairiojoje nelygybės pusėje baigtinis ir $\alpha\boldsymbol{\eta}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{\eta}_2 \in \mathcal{G}$. Taigi aibė $\mathcal{G}$ yra iškila.

2) Logaritmuodami abi pirmos (3.3.7) nelygybės puses ir prisiminę (3.3.5) sąlygą, gauname

$$B(\alpha\boldsymbol{\eta}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{\eta}_2) \leq \alpha B(\boldsymbol{\eta}_1) + (1-\alpha)B(\boldsymbol{\eta}_2). \tag{3.3.8}$$

Taigi funkcija $B(\boldsymbol{\eta})$ yra iškila aibėje $\mathcal{G}$.

3) Taškas $\boldsymbol{\eta}_0$ yra vidinis aibės $\mathcal{G}$ taškas, todėl egzistuoja jo aplinka $U_\varepsilon(\boldsymbol{\eta}_0) \subset \mathcal{G}$. Remiantis (3.3.5) sąlyga, su visais $\boldsymbol{t} \in U_\varepsilon(\mathbf{0})$ statistikos $\boldsymbol{T}(\mathbf{X})$ momentų generuojanti funkcija yra

$$M_{\boldsymbol{\eta}_0}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\eta}_0} \mathrm{e}^{\boldsymbol{t}^T \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})} = \int_{\mathbf{R}^n} h(\boldsymbol{x}) \exp\{(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{\eta}_0)^T \, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) - B(\boldsymbol{\eta}_0)\}\mu(d\boldsymbol{x}) =$$

$$= \mathrm{e}^{B(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{\eta}_0) - B(\boldsymbol{\eta}_0)} < \infty,$$

nes $\boldsymbol{t} + \boldsymbol{\eta}_0 \in U_\varepsilon(\boldsymbol{\eta}_0) \subset \mathcal{G}$. Taigi $B(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{\eta}_0) \in \mathbf{R}$.

Pritaikome momentų generuojančios funkcijos savybę: jeigu nulinis taškas yra vidinis jos apibrėžimo srities taškas, tai nulio aplinkoje ši funkcija yra be galo daug kartų diferencijuojama, visi a. v. $\boldsymbol{T}(\mathbf{X})$ momentai yra baigtiniai ir su bet kokiais $i_1 + \cdots + i_k = p$

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\eta}_0}(T_1^{i_1} \ldots T_k^{i_k}) = \frac{\partial^p M_{\boldsymbol{\eta}_0}(\boldsymbol{t})}{\partial t_1^{i_1} \ldots \partial t_k^{i_k}}|_{\boldsymbol{t}=\mathbf{0}}.$$

Atskiru atveju

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\eta}_0}(\boldsymbol{T}(\mathbf{X})) = M'_{\boldsymbol{\eta}_0}(\mathbf{0}), \quad \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\eta}_0}(\boldsymbol{T}(\mathbf{X})) = M''_{\boldsymbol{\eta}_0}(\mathbf{0}) - M'_{\boldsymbol{\eta}_0}(\mathbf{0})(M')^T_{\boldsymbol{\eta}_0}(\mathbf{0}).$$

Tada

$$M'_{\boldsymbol{\eta}_0}(\boldsymbol{t}) = M_{\boldsymbol{\eta}_0}(\boldsymbol{t})\dot{B}(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{\eta}_0), \quad M''_{\boldsymbol{\eta}_0}(\boldsymbol{t}) =$$

$$= M_{\boldsymbol{\eta}_0}(\boldsymbol{t})\dot{B}(T+\boldsymbol{\eta}_0)\dot{B}^T(T+\boldsymbol{\eta}_0) + M_{\boldsymbol{\eta}_0}(\boldsymbol{t})\ddot{B}(T+\boldsymbol{\eta}_0),$$

Kadangi $M_{\boldsymbol{\eta}_0}(\mathbf{0}) = 1$, tai $M'_{\boldsymbol{\eta}_0}(\mathbf{0}) = \dot{B}(\boldsymbol{\eta}_0)$, $M''_{\boldsymbol{\eta}_0}(\mathbf{0}) - M'_{\boldsymbol{\eta}_0}(\mathbf{0})(M')^T_{\boldsymbol{\eta}_0}(\mathbf{0}) = \ddot{B}(\boldsymbol{\eta}_0)$.

Tą patį buvo galima pakartoti su bet kuriuo $\boldsymbol{\eta} \in U_\varepsilon(\boldsymbol{\eta}_0)$, imant generuojančią funkciją $M_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{t})$, apibrėžtą taško $\boldsymbol{\eta}$ aplinkoje $U_\delta(\boldsymbol{\eta}) \subset U_\varepsilon(\boldsymbol{\eta}_0)$. Taigi su visais $\boldsymbol{\eta} \in U_\varepsilon(\boldsymbol{\eta}_0)$ galioja lygybės $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{T}(\mathbf{X})) = \dot{B}(\boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{T}(\mathbf{X})) = \ddot{B}(\boldsymbol{\eta})$.

▲

3.3.4 pastaba. Toliau dažnai naudosimės tokia reguliarių tikimybinių tankių savybe: su visais $\boldsymbol{\eta} \in U_\varepsilon(\boldsymbol{\eta}_0)$ ir integruojama Borelio funkcija $g(\boldsymbol{x})$ galima diferencijuoti po integralų ženklais:

$$\int_{\mathbf{R}^n} \dot{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}) d\mu(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} \int_{\mathbf{R}^n} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}) d\mu(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}, \tag{3.3.9}$$

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \ddot{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})d\mu(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \dot{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})d\mu(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}. \tag{3.3.10}$$

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} g(\boldsymbol{x})\dot{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})d\mu(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} \int\limits_{\mathbf{R}^n} g(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\eta})\mu(d\boldsymbol{x}). \tag{3.3.11}$$

Eksponentinė šeima turi šią savybę, nes remiantis (3.3.2) teoremos paskutiniu teiginiu (tankį $\tilde{f}$ žymėsime f)

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \dot{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})d\mu(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} (\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) - \dot{B}(\boldsymbol{\eta}))f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})d\mu(\boldsymbol{x}) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{T}(\mathbf{X})) - \dot{B}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0},$$

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \ddot{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})d\mu(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \{(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) - \dot{B}(\boldsymbol{\eta}))(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) - \dot{B}(\boldsymbol{\eta}))^T - \ddot{B}(\boldsymbol{\eta})\} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})d\mu(\boldsymbol{x})$$

$$= \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{T}(\mathbf{X})) - \ddot{B}(\boldsymbol{\eta}) = 0.$$

Kalbant apie (3.3.11) lygybę, tuo atveju, kai g neneigiama, vietoje mato μ galima imti matą ν, apibrėžiamą lygybe $\nu(d\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})\mu(d\boldsymbol{x})$. Tada (3.3.11) virsta (3.3.9) lygybe. Jei g nebūtinai neneigiama, ji užrašoma kaip skirtumas $g = g^+ - g^-$; čia $g^+(\boldsymbol{x}) = \max(g(\boldsymbol{x}), 0) \geq 0$, $g^-(\boldsymbol{x}) = \max(-g(\boldsymbol{x}), 0) \geq 0$. Jei (3.3.11) lygybė galioja funkcijoms g^+ ir g^-, tai galioja ir funkcijai g.

3.3.5 pastaba. Tarkime $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis, gauta stebint a. d. X, kurio tankis yra apibrėžtas (3.3.3) lygybe. Po reparametrizacijos šis tankis suvedamas į kanoninę (3.3.4) formą. Remiantis faktorizacijos kriterijumi, abiem atvejais statistika

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \left(\sum_{j=1}^{n} T_1(X_j), \cdots, \sum_{j=1}^{n} T_k(X_j) \right)^T$$

yra pakankamoji. Jei ji pilnoji, kai yra vienas iš šių modelių, tai ji pilnoji ir kai yra kitas modelis.

3.3.6 pastaba. Statistikos $\boldsymbol{T}$ skirstinio tankis mato, nepriklausančio nuo nežinomų parametrų, atžvilgiu taip pat yra kanoninio eksponentinio tipo:

$$g(\boldsymbol{t};\boldsymbol{\eta}) = \tilde{h}(\boldsymbol{t}) \exp\{\boldsymbol{\eta}^T\, \boldsymbol{t} - B(\boldsymbol{\eta})\}, \quad \boldsymbol{t} \in \mathbf{R}^k, \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{G} \subset \mathbf{R}^k. \tag{3.3.12}$$

Įrodysime diskrečiuoju atveju:

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\eta}}\{\boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{t}\} = \sum_{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{t}} \tilde{f}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\eta}) = \sum_{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{t}} h(\boldsymbol{x}) \exp\{\boldsymbol{\eta}^T\, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) - B(\boldsymbol{\eta})\}$$

$$= \exp\{\boldsymbol{\eta}^T\, \boldsymbol{t} - B(\boldsymbol{\eta})\} \sum_{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{t}} h(\boldsymbol{x}) = \tilde{h}(\boldsymbol{t}) \exp\{\boldsymbol{\eta}^T\, \boldsymbol{t} - B(\boldsymbol{\eta})\};$$

čia $\tilde{h}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{t}} h(\boldsymbol{x})$.

3.3.3 teorema. *Jeigu aibė $\mathcal{G}$ turi bent vieną vidinį tašką, tai statistika $\boldsymbol{T}$, kurios tankis mato ν atžvilgiu yra (3.3.12) pavidalo, yra pilnoji.*

Įrodymas. Tegu funkcija $\varphi(\boldsymbol{t})$ tokia, kad

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\eta}}\varphi(\boldsymbol{T}) = \int \varphi(\boldsymbol{t})g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\eta})d\nu(\boldsymbol{t}) \equiv 0, \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{G}.$$

Tarkime, kad $\boldsymbol{\eta}_0$ yra vidinis aibės $\mathcal{G}$ taškas. Tada egzistuoja $\boldsymbol{\eta}_0$ aplinka $B(\boldsymbol{\eta}_0) \subset \mathcal{G}$. Užrašę $\varphi(\boldsymbol{t}) = \varphi^+(\boldsymbol{t}) - \varphi^-(\boldsymbol{t})$, $\forall \boldsymbol{\eta} \in B(\boldsymbol{\eta}_0)$ gauname

$$\int_{\mathbf{R}^k} \mathrm{e}^{\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{t}}\varphi^+(\boldsymbol{t})d\nu(\boldsymbol{t}) = \int \mathrm{e}^{\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{t}}\varphi^-(\boldsymbol{t})d\nu(\boldsymbol{t}); \tag{3.3.13}$$

čia $d\upsilon(\boldsymbol{t}) = \tilde{h}(\boldsymbol{t})d\nu(\boldsymbol{t})$. Atskiru atveju, kai $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_0$, gauname

$$\int_{\mathbf{R}^k} \mathrm{e}^{\boldsymbol{\eta}_0^T \boldsymbol{t}}\varphi^+(\boldsymbol{t})d\upsilon(\boldsymbol{t}) = \int \mathrm{e}^{\boldsymbol{\eta}_0^T \boldsymbol{t}}\varphi^-(\boldsymbol{t})d\upsilon(\boldsymbol{t}) = c \geq 0.$$

Jei $c = 0$, tai $\varphi(\boldsymbol{t}) = \varphi^+(\boldsymbol{t}) = \varphi^-(\boldsymbol{t}) = 0$ b. v. pagal matą ν. Jei $c > 0$, tai $g^+(\boldsymbol{t}) = c^{-1}\mathrm{e}^{\boldsymbol{\eta}_0^T \boldsymbol{t}}\varphi^+(\boldsymbol{t})$ ir $g^-(\boldsymbol{t}) = c^{-1}\mathrm{e}^{\boldsymbol{\eta}_0^T \boldsymbol{t}}\varphi^-(\boldsymbol{t})$ yra tankiai υ atžvilgiu. Įstatę φ^+ ir φ^- išraiškas į (3.3.13) lygybę, gauname: $\forall \boldsymbol{\eta} \in B(\boldsymbol{\eta}_0)$

$$\int_{\mathbf{R}^k} \mathrm{e}^{(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}_0)^T \boldsymbol{t}}g^+(\boldsymbol{t})d\upsilon(\boldsymbol{t}) = \int \mathrm{e}^{(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}_0)^T \boldsymbol{t}}g^-(\boldsymbol{t})d\upsilon(\boldsymbol{t}).$$

Taigi momentų generuojančios funkcijos nulio aplinkoje sutampa, nes $\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0 \in B(\mathbf{0})$. Tada $g^+(\boldsymbol{t}) = g^-(\boldsymbol{t})$ b. v. ν atžvilgiu, todėl ir $\varphi^+(\boldsymbol{t}) = \varphi^-(\boldsymbol{t})$ b. v. mato ν atžvilgiu, iš čia išplaukia $\varphi(\boldsymbol{t}) = 0$ b. v. ν atžvilgiu. Vadinasi, pakankamoji statistika $\boldsymbol{T}$ yra pilnoji.

▲

3.3.1 išvada. Iš 3.3.3 – 3.3.5 pavyzdžių gaunama, kad Puasono ir binominiam skirstiniams statistika $T = \sum_{i=1}^n X_i$ (arba jai ekvivalenti statistika $\bar{X}$), o normaliajam skirstiniui dvimatė statistika $\boldsymbol{T} = (\sum_{i=1}^n X_i,\ \sum_{i=1}^n X_i^2)^T$ (arba jai ekvivalenti statistika $(\bar{X},\ s^2)^T$) yra ne tik pakankamosios, bet ir pilnosios.

Kadangi $\mathbf{E}_\lambda(\bar{X}) = \lambda$ (Puasono skirstinys) ir $\mathbf{E}_p(\bar{X}) = p$ (binominis skirstinys), tai $\bar{X}$ yra Puasono ir binominio skirstinių vidurkių NMD įvertinys. Kadangi $\mathbf{E}_{\mu,\sigma^2}(\bar{X}) = \mu$, $\mathbf{E}_{\mu,\sigma^2}(s^2) = \sigma^2$ (normalusis skirstinys), tai $(\bar{X}, s^2)^T$ yra parametro $(\mu, \sigma^2)^T$ nepaslinktasis minimalios kvadratinės rizikos įvertinys.

3.3.9 pavyzdys. *Tolygiojo skirstinio $U(0,\theta)$, nepriklausančio eksponentinei šeimai, pilnoji pakankamoji statistika.* Tarkime, kad turime paprastąją imtį $\mathbf{X}$, $X_i \sim U(0,\theta)$, $\theta > 0$. Tikėtinumo funkcija

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^n}\prod_{j=1}^n \mathbf{1}_{(0,\theta)}(X_j) = \frac{1}{\theta^n}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(X_{(n)}),$$

taigi pozicinė statistika $X_{(n)} = \max_{1\leq i\leq n} X_i$ yra pakankamoji. Tegu pagal 3.3.1 apibrėžimą

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi(X_{(n)})) = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta \varphi(x)x^{n-1}dx = 0 \quad \text{su visais} \quad \theta \in \Theta = (0,\infty).$$

Intervalai $(0,\theta)$, $\theta > 0$ generuoja visą intervalo $(0,\infty)$ Borelio poaibių σ algebrą $\mathcal{B}(0,\infty)$, todėl visoms aibėms $B \in \mathcal{B}(0,\infty)$

$$\int_B \varphi(x)x^{n-1}dx = 0.$$

Iš čia išplaukia $\varphi(x)x^{n-1} = 0$, todėl ir $\varphi(x) = 0$ b. v. pagal Lebego matą. Taigi $X_{(n)}$ yra pilnoji pakankamoji statistika. Kadangi

$$\mathbf{E}X_{(n)} = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n dx = \frac{n}{n+1}\,\theta,$$

tai įvertinys $\hat\theta = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$ yra nepaslinktasis. Statistika $X_{(n)}$ yra pilnoji, todėl $\hat\theta$ yra ir NMD įvertinys.

3.4. Rao ir Kramerio nelygybė. Efektyvieji įvertiniai

3.4.1. Rao ir Kramerio nelygybė

Tarkime, kad nagrinėjamas statistinis modelis $\mathbf{X} \sim f(x;\boldsymbol\theta)$, $\boldsymbol\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}^m$, t. y. tariama, kad tikimybiniai matai $P_{\boldsymbol\theta}$ absoliučiai tolydūs σ-baigtinio mato μ atžvilgiu.

Tegu parametro $\boldsymbol\gamma(\boldsymbol\theta) = (\gamma_1(\boldsymbol\theta),\dots,\gamma_k(\boldsymbol\theta))^T$ įvertinys $\hat{\boldsymbol\gamma} = (\hat\gamma_1,\dots,\hat\gamma_k)^T$ yra *nepaslinktasis*, t. y. $\mathbf{E}_{\boldsymbol\theta}\hat{\boldsymbol\gamma} = \boldsymbol\gamma(\boldsymbol\theta)$, ir su visais $\boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta$ egzistuoja kovariacinė matrica $\boldsymbol\Sigma = \boldsymbol V_{\boldsymbol\theta}(\hat{\boldsymbol\gamma})$.

Ieškosime kiekvieno įvertinio $\hat\gamma_i$ dispersijos apatinio rėžio ir bendru atveju – bet kurios šių įvertinių tiesinės funkcijos $\sum_{i=1}^m c_i\hat\gamma_i$, $c_i \in \mathbf{R}$ dispersijos apatinio rėžio.

Iš pradžių suformuluosime tam tikras reguliarumo sąlygas, kurias turi tenkinti nagrinėjami tankiai.

Rao ir Kramerio sąlygos:

a) aibė $\boldsymbol\Theta$ atvira ir sritis $\mathcal{X}^n = \{\boldsymbol x : f(\boldsymbol x,\boldsymbol\theta) > 0\}$ nepriklauso nuo $\boldsymbol\theta$;

b) su visais $\boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta$ egzistuoja išvestinė $\dot{\boldsymbol\gamma}(\boldsymbol\theta)$;

c) su visais $\boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta$ egzistuoja išvestinė $\dot f(\boldsymbol x,\boldsymbol\theta)$ ir galima diferencijuoti po integralo ženklu:

$$\int\limits_{\mathcal{X}^n} \dot f(\boldsymbol x,\boldsymbol\theta)d\mu(\boldsymbol x) = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol\theta}\int\limits_{\mathcal{X}^n} f(\boldsymbol x,\boldsymbol\theta)d\mu(\boldsymbol x) = 0, \tag{3.4.1}$$

$$\int\limits_{\mathcal{X}^n} \hat{\boldsymbol\gamma}(\boldsymbol x)\dot f(\boldsymbol x,\boldsymbol\theta)\,d\mu(\boldsymbol x) = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol\theta}\int\limits_{\mathcal{X}^n} \hat{\boldsymbol\gamma}(\boldsymbol x)f(\boldsymbol x,\boldsymbol\theta)d\mu(\boldsymbol x) = \dot{\boldsymbol\gamma}(\boldsymbol\theta). \tag{3.4.2}$$

Pažymėkime $\ell(\boldsymbol\theta)$ tikėtinumo funkcijos (3.2.3) logaritmą:

$$\ell(\boldsymbol\theta) = \ell_{\boldsymbol X}(\boldsymbol\theta) = \ln L_{\boldsymbol X}(\boldsymbol\theta) = \ln L(\boldsymbol\theta).$$

Šio atsitiktinio dydžio realizacijos yra imties tankio logaritmo $\ln f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, reikšmės.

3.4.1 apibrėžimas. Atsitiktinis vektorius

$$\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} \ell(\boldsymbol{\theta}), \ldots, \frac{\partial}{\partial \theta_m} \ell(\boldsymbol{\theta}) \right)^T \tag{3.4.3}$$

vadinamas *informančių vektoriumi.*

Iš (3.4.1) lygybės išplaukia

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\{\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta})\} = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial \ln f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) d\mu(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}.$$

3.4.2 apibrėžimas. Matrica

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}} \left(\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta})\, \dot{\ell}^T(\boldsymbol{\theta}) \right) = \left[\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}} \left(\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_l} \, \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s} \right) \right]_{m \times m} =: [I_{ls}(\boldsymbol{\theta})]_{m \times m} \tag{3.4.4}$$

vadinama imties *Fišerio informacine matrica.*

Jei θ vienmatis, $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}$, tai $I(\theta) = \mathbf{E}_\theta \dot{\ell}^2(\theta)$.

3.4.1 teorema. *(*Rao ir Kramerio nelygybė*). Tarkime, kad $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\mathbf{X})$ yra nepaslinktasis parametro $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta})$ įvertinys su kovariacine matrica $\mathbf{V}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\gamma})$. Jei Fišerio informacinė matrica $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta})$ teigiamai apibrėžta su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m$ ir tenkinamos Rao ir Kramerio sąlygos, tai su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$*

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\gamma}) \geq \dot{\boldsymbol{\gamma}}^T(\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\, \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\theta}). \tag{3.4.5}$$

Nelygybė virsta lygybe tada ir tik tada, kai μ-beveik tikrai

$$\hat{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = \dot{\boldsymbol{\gamma}}^T(\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\, \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}). \tag{3.4.6}$$

3.4.1 pastaba. Primename, kad simbolinis užrašas $\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{B}$, kai $\boldsymbol{A}$ ir $\boldsymbol{B}$ yra vienodos dimensijos kvadratinės matricos, reiškia, kad matrica $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ yra neneigiamai apibrėžta.

Įrodymas. Lygybes (3.4.1) ir (3.4.2) galima užrašyti taip:

$$\mathbf{E}(\dot{\ell}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E}(\dot{\ell}\hat{\gamma}^T) = \dot{\boldsymbol{\gamma}}.$$

Vektoriaus $\hat{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} - \dot{\boldsymbol{\gamma}}^T \boldsymbol{I}^{-1} \dot{\ell}$ kovariacinė matrica yra:

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{E} \left\{ \hat{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} - \dot{\boldsymbol{\gamma}}^T \boldsymbol{I}^{-1} \dot{\ell} \right\} \left\{ \hat{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} - \dot{\boldsymbol{\gamma}}^T \boldsymbol{I}^{-1} \dot{\ell} \right\}^T$$

$$= \boldsymbol{V}(\hat{\gamma}) - \mathbf{E} \left\{ (\hat{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}) \dot{\ell}^T \right\} \boldsymbol{I}^{-1} \dot{\boldsymbol{\gamma}}$$

$$-\dot{\gamma}^T \boldsymbol{I}^{-1}\mathbf{E}\left\{\dot{\ell}(\hat{\gamma}-\gamma)^T\right\}+\dot{\gamma}^T \boldsymbol{I}^{-1}\,\mathbf{E}\left\{\dot{\ell}\dot{\ell}^T\right\}\boldsymbol{I}^{-1}\,\dot{\gamma}$$
$$=\boldsymbol{V}(\hat{\gamma})-\dot{\gamma}^T\,\mathbf{I}^{-1}\,\dot{\gamma}.$$

Nelygybė virsta lygybe tada ir tik tada, kai beveik visur

$$\hat{\gamma}-\gamma=\dot{\gamma}^T\,\boldsymbol{I}^{-1}\,\dot{\ell}. \tag{3.4.7}$$

▲

3.4.1 išvada. Jeigu $m = k = 1$, t. y. $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}$, $\gamma(\theta) \in G \subset \mathbf{R}$, tai iš (3.4.5) nelygybės gauname

$$\boldsymbol{V}_\theta(\hat{\gamma}) \geq \frac{(\dot{\gamma}(\theta))^2}{I(\theta)}, \tag{3.4.8}$$

o jeigu $\gamma(\theta)=\theta$, tai

$$\boldsymbol{V}_\theta(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I(\theta)}. \tag{3.4.9}$$

3.4.2 išvada. Parametrinės funkcijos $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta})$ i-osios komponentės nepaslinktojo įvertinio $\hat{\gamma}_i$ dispersija tenkina nelygybę

$$\boldsymbol{V}(\hat{\gamma}_i) \geq \dot{\gamma}_i^T\mathbf{I}^{-1}\dot{\gamma}_i=\sum_r\sum_s I^{rs}\frac{\partial\gamma_i}{\partial\theta_r}\frac{\partial\gamma_i}{\partial\theta_s}; \tag{3.4.10}$$

čia I^{rs} yra matricos $\mathbf{I}^{-1}$ elementai, t. y. $\mathbf{I}^{-1}=[I^{rs}]_{m\times m}$. Jeigu $\gamma_i(\boldsymbol{\theta})=\theta_i$, tai

$$\boldsymbol{V}(\hat{\theta}_i) \geq I^{ii}. \tag{3.4.11}$$

Taigi, kai $\boldsymbol{\theta}$ daugiamatis, parametro θ_i nepaslinktųjų įvertinių dispersijos ne mažesnės už I^{ii}, jei visi kiti parametrai $\theta_j, j\neq i$, nežinomi. Jeigu visi kiti parametrai žinomi, tai iš (3.4.9)nelygybės gauname, kad parametro θ_i nepaslinktųjų įvertinių dispersijos ne mažesnės už $1/I_{ii}$. Galima patikrinti, kad $I^{ii} \geq 1/I_{ii}$ (žr. **3.85** pratimą). Tai natūralu, nes parametras θ_i, kai kiti parametrai žinomi, turėtų būti vertinamas tiksliau.

3.4.3 išvada. Įvertinio $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ *apibendrintąja dispersija* vadinamas determinantas $|\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})|$. Iš (3.4.5) nelygybės išplaukia

$$|\boldsymbol{V}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})| \geq |\dot{\boldsymbol{\gamma}}^T\mathbf{I}^{-1}\dot{\boldsymbol{\gamma}}|, \tag{3.4.12}$$

o kai $\gamma_i(\boldsymbol{\theta})=\theta_i,\ \ i=1,...,m$, tai

$$|\boldsymbol{V}(\hat{\boldsymbol{\theta}})| \geq |\mathbf{I}^{-1}|. \tag{3.4.13}$$

3.4.4 išvada. Jeigu θ ir $\gamma=\gamma(\theta)$ yra vienmačiai, tai iš (3.4.7) formulės išplaukia, kad nepaslinktojo įverčio $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ dispersija lygi apatinei Rao ir Kramerio nelygybės ribai tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia funkcija $C(\boldsymbol{\theta})$, kad galioja lygybė

$$\dot{\ell}(\theta) = C(\theta)(\hat{\gamma}(\mathbf{X}) - \gamma(\theta)). \tag{3.4.14}$$

Tada dispersija yra

$$\boldsymbol{V}\hat{\gamma} = | \dot{\gamma}(\theta)/C(\theta) |, \tag{3.4.15}$$

taigi dispersija gali būti rasta neskaičiuojant informacijos kiekio.

3.4.1 pavyzdys. *Eksponentinio skirstinio vidurkio įvertinys.* Tarkime, paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d., turintį eksponentinį skirstinį: $X_i \sim \mathcal{E}(1/\theta)$. Tada

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathrm{e}^{-n\bar{X}/\theta}, \quad \ell(\theta) = -n \ln \theta - \frac{n}{\theta}\bar{X}, \quad \dot{\ell}(\theta) = \frac{n}{\theta^2}(\bar{X} - \theta).$$

Kadangi $\mathbf{E}\bar{X} = \theta$, tai $\bar{X}$ yra nepaslinktasis parametro θ įvertinys. Funkcija $\dot{\ell}(\theta)$ yra (3.4.14) pavidalo, $C(\theta) = n/\theta^2$, todėl $\bar{X}$ yra NMD įvertinys ir jo dispersija θ^2/n.

3.4.2 pavyzdys. *Puasono skirstinio parametro įvertinys.* Tegu paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Tada

$$\dot{\ell}(\lambda) = \frac{n}{\lambda}(\bar{X} - \lambda).$$

Taigi $\bar{X}$ yra parametro λ NMD įvertinys ir jo minimali dispersijos reikšmė yra λ/n.

3.4.3 pavyzdys. *Binominio skirstinio parametro įvertinys.* Tarkime, kad paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim B(1,p)$. Tada

$$\dot{\ell}(p) = \frac{n}{p(1-p)}(\bar{X} - p).$$

Todėl $\bar{X}$ yra parametro p NMD įvertinys ir jo minimali dispersijos reikšmė yra $p(1-p)/n$.

3.4.5 išvada. Jeigu θ ir $\gamma = \gamma(\theta)$ yra vienmačiai, tai nepaslinktojo įvertinio $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ dispersija lygi apatinei Rao ir Kramerio nelygybės ribai tada ir tik tada, kai tikėtinumo funkcija yra pavidalo

$$L_{\boldsymbol{X}}(\theta) = h(\mathbf{X}) \exp\{\eta(\theta)\hat{\gamma}(\mathbf{X}) - b(\theta)\}. \tag{3.4.16}$$

Taigi $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\mathbf{X})$ yra pakankamoji statistika ir jos skirstinys priklauso vienparametrinei eksponentinių skirstinių šeimai.

Iš tikrųjų, integruodami (3.4.14) lygybės abi puses gauname, kad ji ekvivalenti lygybei

$$\ln L = \hat{\gamma}(\mathbf{X}) \int C(\theta) d\theta - \int C(\theta)\gamma(\theta) d\theta + D(\mathbf{X}),$$

todėl L yra (3.4.16) pavidalo.

3.4.4 pavyzdys. *Rao ir Kramero nelygybė gali ir negalioti, jeigu neišpildytos Rao ir Kramero sąlygos.* Tarkime, paprastoji imtis $X_1, ..., X_n$ gauta stebint a. d. $X \sim U(0,\theta)$. Pozicinės statistikos $X_{(n)}$ tankio funkcija yra

$$f_n(x) = n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 < x < \theta.$$

Randame

$$\mathbf{E}(X_{(n)}) = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n dx = \frac{n}{n+1}\theta.$$

Taigi $\tilde{\theta} = (n+1)X_{(n)}/n$ yra nepaslinktasis parametro θ įvertinys. Randame dispersiją

$$\boldsymbol{V}(\tilde{\theta}|\theta) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1}dx - \theta^2 = \frac{\theta^2}{n(n+2)} = O(\frac{1}{n^2}),$$

kai $n \to \infty$. Rao ir Kramerio nelygybės dešinioji pusė yra $1/(ni(\theta)) = O(1/n)$. Akivaizdu, kad kai n pakankamai dideli, Rao ir Kramerio nelygybė negalioja. Priežastis ta, kad neišpildyta sąlyga a) (sritis $\{\boldsymbol{x} : f(\boldsymbol{x}|\theta) > 0\}$ priklauso nuo θ).

3.4.2. Informacijos kiekio savybės

Paprastosios imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ informacijos apie parametrą $\boldsymbol{\theta}$ kiekį $\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta})$ trumpai žymėsime $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta})$, o vieno stebėjimo informacijos kiekį $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta})$.

Informacijos kiekio savybės:

1. Tegu $X_1, ..., X_n$ yra nepriklausomi a. d., kurių tankiai σ-baigtinio mato μ atžvilgiu yra $f_i(x; \boldsymbol{\theta}),\ i = 1, ..., n,\ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m$. Jeigu $I_i(\boldsymbol{\theta})$ yra atsitiktinio dydžio X_i informacijos apie parametrą $\boldsymbol{\theta}$ kiekis, o $I(\boldsymbol{\theta})$ – vektoriaus $(X_1, ...,\ X_n)^T$ informacijos kiekis, tai

$$I(\boldsymbol{\theta}) = I_1(\boldsymbol{\theta}) + I_2(\boldsymbol{\theta}) + ... + I_n(\boldsymbol{\theta}).$$

Kai imtis paprastoji

$$I(\boldsymbol{\theta}) = nI_1(\boldsymbol{\theta}). \tag{3.4.17}$$

Įrodymas. Žymėkime $l_j(\boldsymbol{\theta}) = \ln f_j(X_j, \boldsymbol{\theta})$. Tada teisingos lygybės

$$I(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E}\sum_{j=1}^n l_j(\boldsymbol{\theta})(\sum_{j=1}^n l_j(\boldsymbol{\theta}))^T = \sum_{i\neq j}\mathbf{E}(l_i(\boldsymbol{\theta})l_j^T(\boldsymbol{\theta})) + \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(l_i(\boldsymbol{\theta})l_i^T(\boldsymbol{\theta}))$$

$$= \sum_{i\neq j}\mathbf{E}(l_i(\boldsymbol{\theta}))\mathbf{E}(l_j^T(\boldsymbol{\theta})) + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{I}_i(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{I}_i(\boldsymbol{\theta}),$$

nes $\mathbf{E}(l_i(\boldsymbol{\theta})) = 0$.

▲

2. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra didumo n imtis, kurios tankis mato μ atžvilgiu yra $f(\boldsymbol{x}; \theta)$, o $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\mathbf{X})$ statistika, kurios tankis $\psi(\boldsymbol{t}; \theta)$ mato ν atžvilgiu taip pat tenkina Rao ir Kramerio sąlygas. Tada

$$I_{\boldsymbol{T}}(\theta) \leq I_{\boldsymbol{X}}(\theta).$$

Jeigu $\boldsymbol{T}$ pakankamoji statistika, tai nelygybė virsta lygybe, t. y., pereinant nuo $\mathbf{X}$ prie pakankamosios statistikos $\boldsymbol{T}$, informacijos kiekis nesumažėja.

Įrodymas. Parodysime, kad

$$\mathbf{E}_\theta\left(\frac{\dot{f}(\mathbf{X}, \theta)}{f(\mathbf{X}, \theta)}|\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}\right) = \frac{\dot{\psi}(\boldsymbol{t}, \theta)}{\psi(\boldsymbol{t}, \theta)}. \tag{3.4.18}$$

Imkime bet kokią mačiąją aibę A statistikos $\boldsymbol{T}$ kitimo srityje ir pažymėkime $\tilde{A} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) \in A\}$. Tada

$$\mathbf{E}_\theta \left(\frac{\dot{f}(\mathbf{X}, \theta)}{f(\mathbf{X}, \theta)} \mathbf{1}_A(\boldsymbol{T}(\mathbf{X})) \right) = \int_{\tilde{A}} \frac{\dot{f}(\boldsymbol{x}, \theta)}{f(\boldsymbol{x}, \theta)} f(\boldsymbol{x}, \theta) d\mu(\boldsymbol{x})$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta} \int_{\tilde{A}} f(\boldsymbol{x}, \theta) d\mu(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial\theta} \mathbf{P}_\theta\{\mathbf{X} \in \tilde{A}\} = \frac{\partial}{\partial\theta} \mathbf{P}_\theta\{\boldsymbol{T} \in A\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta} \int_A \psi(\boldsymbol{t}, \theta) d\nu(\boldsymbol{t}) = \int_A \frac{\dot{\psi}(\boldsymbol{t}, \theta)}{\psi(\boldsymbol{t}, \theta)} \psi(\boldsymbol{t}, \theta) d\nu(\boldsymbol{t}) = \mathbf{E}_\theta \left(\frac{\dot{\psi}(\boldsymbol{T}(\mathbf{X}), \theta)}{\psi(\boldsymbol{T}(\mathbf{X}), \theta)} \mathbf{1}_A(\boldsymbol{T}(\mathbf{X})) \right).$$

Tai ir įrodo (3.4.18) lygybę. Iš čia, remiantis sąlyginio vidurkio savybėmis,

$$\mathbf{E}_\theta \left(\frac{\dot{f}}{f} \frac{\dot{\psi}}{\psi} \right) = \mathbf{E}_\theta \left\{ \frac{\dot{\psi}(\boldsymbol{T}, \theta)}{\psi(\boldsymbol{T}, \theta)} \mathbf{E}_\theta \left(\frac{\dot{f}}{f} | \boldsymbol{T} \right) \right\} = \mathbf{E}_\theta \left(\frac{\dot{\psi}}{\psi} \right)^2 = I_{\boldsymbol{T}}(\theta).$$

Todėl

$$\mathbf{E}_\theta \left(\frac{\dot{f}}{f} - \frac{\dot{\psi}}{\psi} \right)^2 = \mathbf{E}_\theta \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2 + \mathbf{E}_\theta \left(\frac{\dot{\psi}}{\psi} \right)^2 - 2\mathbf{E}_\theta \left(\frac{\dot{f}}{f} \frac{\dot{\psi}}{\psi} \right)$$

$$= I_{\boldsymbol{X}} + I_{\boldsymbol{T}} - 2I_{\boldsymbol{T}} = I_{\boldsymbol{X}} - I_{\boldsymbol{T}} \geq 0.$$

Nelygybė virsta lygybe, kai μ beveik visur $\dot{f}/f = \dot{\psi}/\psi$. Iš čia $\ln f(\mathbf{X}, \theta) = \ln \psi(\boldsymbol{T}, \theta) + H(\mathbf{X})$, todėl

$$f(\mathbf{X}, \theta) = \psi(\boldsymbol{T}, \theta) h(\mathbf{X}).$$

Remiantis faktorizacijos kriterijumi, $\boldsymbol{T}$ yra pakankamoji statistika.

▲

3. Jei tenkinamos a) ir b) Rao ir Kramerio sąlygos, egzistuoja funkcijos $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$ antrosios eilės išvestinės pagal $\boldsymbol{\theta}$ ir

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \ddot{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) d\mu(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) d\mu(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0},$$

tai

$$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbf{E}_\theta \ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}) = \left[-\mathbf{E}_\theta \left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_l \partial\theta_s} \right) \right]_{m \times m}. \tag{3.4.19}$$

Įrodymas. Kadangi $\dot{\ell} = \dot{f}/f$, tai

$$\mathbf{0} = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \ddot{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) d\mu(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\dot{\ell}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) \right) d\mu(\boldsymbol{x}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^n} \ddot{\ell}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) d\mu(\boldsymbol{x}) + \int\limits_{\mathbf{R}^n} \dot{\ell}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) \dot{\ell}^T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) d\mu(\boldsymbol{x}) =$$

$$= \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}} \ddot{\ell}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}} \left(\dot{\ell}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \dot{\ell}^T(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \right).$$

Iš čia gaunamas ieškomasis rezultatas.

▲

3.4.3. Efektyvieji įvertiniai

Tarkime, $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis, gauta stebint a. d. X, kurio tankis $f(x, \theta)$ atžvilgiu σ baigtinio mato μ priklauso nuo vienmačio parametro $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}$. Tada funkcijos $\gamma = \gamma(\theta) \in G \subset \mathbf{R}$ nepaslinktojo įvertinio $\hat{\gamma}$ dispersija, kai galioja suformuluotos reguliarumo sąlygos, tenkina Rao ir Kramerio nelygybę

$$\boldsymbol{V}_\theta(\hat{\gamma}) \geq \frac{[\gamma'(\theta)]^2}{I(\theta)}. \tag{3.4.20}$$

3.4.3 apibrėžimas. Įvertinys $\hat{\gamma}$ vadinamas *efektyviuoju*, jeigu jo dispersija lygi (3.4.20) nelygybės dešinėje esančiam reiškiniui. Nepaslinktojo įvertinio $\tilde{\gamma}$ *efektyvumu* $e = e(\tilde{\gamma})$ vadinamas (3.4.20) nelygybės dešinėje esančio reiškinio ir įvertinio dispersijos santykis:

$$e = \frac{[\gamma'(\theta)]^2}{I(\theta)\boldsymbol{V}_\theta(\tilde{\gamma})} \leq 1. \tag{3.4.21}$$

Jeigu įvertinys $\hat{\gamma}$ efektyvus, tai jo efektyvumas $e = 1$.

3.4.2 pastaba. Toks efektyvumo apibrėžimas turi trūkumų: jei egzistuoja efektyvusis parametro $\gamma = \gamma(\boldsymbol{\theta}) \in \mathcal{G} \subset \mathbf{R}$ įvertinys $\hat{\gamma}$, tai iš visų funkcijų $\gamma^* = h(\gamma(\boldsymbol{\theta}))$, čia h yra diferencijuojama aibėje $\mathcal{G}$ funkcija, tiktai tiesinės funkcijos $\gamma^* = a\gamma + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, turi efektyviuosius įvertinius.

Pavyzdžiui, jei egzistuoja efektyvusis parametro γ įvertinys, tai neegzistuoja efektyvieji $\ln\gamma, \mathrm{e}^\gamma$ ir kt. parametrų įvertiniai.

Įrodymas. Remiantis 2.4.1 teorema, įvertinys $\hat{\gamma}$ tenkina lygybę

$$\hat{\gamma}(\mathbf{X}) = \gamma(\boldsymbol{\theta}) + \dot{\gamma}^T(\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\, \dot{\ell}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}).$$

Tarkime, kad $\hat{\gamma}_n^*$ yra efektyvusis parametro $\gamma^* = h(\gamma(\boldsymbol{\theta}))$ įvertinys. Kaip ir įvertinio $\hat{\gamma}$ atveju,

$$\hat{\gamma}_n^*(\mathbf{X}) = h(\gamma(\boldsymbol{\theta})) + h'(\gamma(\boldsymbol{\theta}))\dot{\gamma}^T(\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\, \dot{\ell}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = h(\gamma(\boldsymbol{\theta})) + h'(\gamma(\boldsymbol{\theta}))(\hat{\gamma}(\mathbf{X}) - \gamma(\boldsymbol{\theta})).$$

Kairiojoje nelygybės pusėje esantis reiškinys nepriklauso nuo $\boldsymbol{\theta}$, todėl egzistuoja tokios konstantos $a, b \in \mathbf{R}$, kad

$$h'(\gamma(\boldsymbol{\theta})) = a, \quad h(\gamma(\boldsymbol{\theta})) - a\gamma(\boldsymbol{\theta}) = b.$$

Iš čia $h(\gamma(\boldsymbol{\theta})) = a\gamma(\boldsymbol{\theta}) + b$.

▲

Taigi, efektyvumas priklauso nuo vertinamos parametro θ funkcijos pavidalo. To paties modelio vienų parametro θ funkcijų efektyvusis įvertinys egzistuoja, o kitų – ne.

3.4.5 pavyzdys. *Puasono skirstinys: efektyvusis parametro $\gamma(\lambda) = \lambda^2$ įvertinys neegzistuoja.* Tarkime, $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis, gauta stebint a.d. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Nagrinėdami 3.4.2 pavyzdį įsitikinome, kad parametro λ NMD įvertinio $\hat{\lambda} = \bar{X}$ dispersija λ/n sutampa su (3.4.20) nelygybės dešinėje esančiu reiškiniu ir šis įvertinys yra efektyvusis. Nagrinėkime funkciją $\gamma(\lambda) = \lambda^2$. Tada (3.4.20) nelygybės dešinėje reiškinys lygus $\dot{\gamma}^2(\lambda) \cdot \lambda/n = 4\lambda^3/n$. Šio modelio $S_n = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$ yra pilnoji ir pakankamoji statistika, todėl parametro λ^2 NMD įvertinys yra:

$$\hat{\lambda}^2 = \bar{X}^2 - \frac{\bar{X}}{n}, \ \mathbf{E}_\lambda(\hat{\lambda}^2) = \lambda^2, \ \boldsymbol{V}_\lambda(\hat{\lambda}^2) = \frac{4\lambda^3}{n} + \frac{2\lambda^2}{n^2}.$$

Matome, kad $\boldsymbol{V}_\lambda \hat{\lambda}^2$ yra didesnė už $4\lambda^3/n$ ir efektyvumas $e < 1$.

3.4.3 pastaba. Kaip matoma iš šio pavyzdžio, gali atsitikti, kad surasto NMD įvertinio dispersija yra didesnė už Rao ir Kramerio nelygybėje nurodomą ribą, t. y. ši nelygybė nėra absoliučiai tiksli.

3.4.4 pastaba. Iš 3.4.5 išvados ir 3.4.2 pastabos išplaukia, kad net kai parametras vienmatis, efektyvieji įvertiniai gana reti. Jie egzistuoja tik eksponentinių dėsnių šeimoms ir net tuo atveju parametrai, turintys efektyviuosius įvertinius, yra beveik vieninteliai (jie yra tiesinės vienas kito funkcijos). Kita vertus, matysime, kad ribiniu atveju, *kai imties didumas $n \to \infty$, labai plačiai modelių klasei galima rasti įvertinius, kurie "asimptotiškai efektyvūs"*. Jei $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ yra asimptotiškai efektyvus kurio nors modelio parametro $\boldsymbol{\theta}$ įvertinys, tai daugumai parametrų $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\theta})$ įvertiniai $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ taip pat yra asimptotiškai efektyvūs.

Yra gauta ir kitokių įvertinio dispersijos ribų iš apačios, kurios kartais patikslina Rao ir Kramerio nelygybę. Matėme, kad Rao ir Kramerio nelygybė virsta lygybe, kai $\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}$ tiesiškai išreiškiama informančių vektoriumi $\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta})$ (žr. (3.4.6) lygybę). Jeigu tokios lygybės nėra, tai kartais $\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}$ galima tiesiškai išreikšti pirmosios ir aukštesniųjų eilių išvestinėmis. Tai leidžia gauti tikslesnes įvertinių kovariacinių matricų ribas iš apačios. Suformuluosime bendriausią tokio tipo rezultatą (žr. [4]).

Tarkime, kad nagrinėjamas statistinis modelis $\mathbf{X} \sim f(x; \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbf{R}^m$, t. y. tariama, kad tikimybiniai matai $P_{\boldsymbol{\theta}}$ absoliučiai tolydūs σ-baigtinio mato μ atžvilgiu. Tegu parametro $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = (\gamma_1(\boldsymbol{\theta}), \ldots, \gamma_k(\boldsymbol{\theta}))^T$ įvertinys $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ yra *nepaslinktasis* ir su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ egzistuoja kovariacinė matrica $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\gamma})$.

3.4.2 teorema. *(*Bolševo*). Tarkime, kad:*

1) aibė $\boldsymbol{\Theta}$ atvira ir sritis $\mathcal{X}^n = \{\boldsymbol{x} : f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) > 0\}$ nepriklauso nuo $\boldsymbol{\theta}$;

2) su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ egzistuoja tankio $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$ dalinės išvestinės iki s-osios eilės imtinai ir galima diferencijuoti po integralo ženklu, t. y.

$$\int \frac{\partial^{i_1 + \cdots + i_m}}{\partial\theta_1^{i_1} \cdots \partial\theta_m^{i_m}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) d\mu(\boldsymbol{x}) = 0, \quad 1 \le i_1 + \cdots + i_m \le s;$$

be to, tegu $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ...Y_N)^T$ yra N-matis atsitiktinis vektorius, kurio koordinatės yra bet kurie a. d.

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^{i_1 + \cdots + i_m}}{\partial\theta_1^{i_1} \cdots \partial\theta_m^{i_m}} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}), \ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}, \ 1 \le i_1 + \cdots + i_m \le s,$$

ir su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ egzistuoja teigiamai apibrėžta kovariacijų matrica $\boldsymbol{J} = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Y}\mathbf{Y}^T)$;

3) su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ ir $j = 1, \ldots, k$ egzistuoja funkcijų $\gamma_j(\boldsymbol{\theta})$ dalinės išvestinės iki s-osios eilės imtinai ir galima diferencijuoti po integralo ženklu, t. y.

$$\int \hat{\gamma}_j(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_m}}{\partial\theta_1^{i_1}\cdots\partial_m^{i_m}} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) d\mu(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_m}}{\partial\theta_1^{i_1}\cdots\partial\theta_m^{i_m}}\, \gamma_j(\boldsymbol{\theta}).$$

Tada su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\gamma}) \geq \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}; \tag{3.4.22}$$

čia $\boldsymbol{\Gamma} = [\Gamma_{ij}]_{N\times k}$ matrica, kurios j-asis stulpelis susideda iš dalinių išvestinių

$$\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_m}}{\partial\theta_1^{i_1}\cdots\partial\theta_m^{i_m}}\, \gamma_j(\boldsymbol{\theta}), \quad 1 \leq i_1 + \cdots + i_m \leq s,$$

išdėstytų ta pačia tvarka kaip ir vektoriaus $\boldsymbol{Y}$ koordinatės. Nelygybė virsta lygybe tada ir tik tada, kai

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{Y}.$$

Įrodymas. Su visais $\boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^k$ nagrinėkime vienmatį a. d.

$$Z = [(\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}) - \boldsymbol{\Gamma}^T\mathbf{J}^{-1}\mathbf{Y}]^T\boldsymbol{z}.$$

Remiantis 2) ir 3) prielaidomis, $\mathbf{E}(\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{Y}^T = \boldsymbol{\Gamma}^T$. Tada

$$0 \leq \mathbf{E}\mathbf{Z}^2 = \boldsymbol{z}^T(\boldsymbol{V}(\hat{\gamma}) - 2\boldsymbol{\Gamma}^T\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\Gamma}^T\mathbf{J}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\Gamma})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^T(\boldsymbol{V}(\hat{\gamma}) - \boldsymbol{\Gamma}^T\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\Gamma})\boldsymbol{z}.$$

Iš čia gaunamos (3.4.22) nelygybės.

▲

3.4.5 pastaba. Jeigu $s = 1$, tai $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)^T = \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\Gamma} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\theta)$. Todėl iš (3.4.22) gauname Rao ir Kramerio (3.4.5) nelygybę.

3.4.6 pastaba. Nelygybės (3.4.22) dešinėje pusėje esantis reiškinys nepriklauso nuo to, kuria tvarka surašytos $\boldsymbol{Y}$ koordinatės.

3.4.7 pastaba. Atmetus vektoriaus $\boldsymbol{Y}$ kurią nors koordinatę ir išbraukus atitinkamą matricos $\boldsymbol{\Gamma}$ stulpelį, naujai gautos matricos $\boldsymbol{\Gamma}_0$ ir $\mathbf{J}_0$ tenkina nelygybę

$$\boldsymbol{\Gamma}^T\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\Gamma} \geq \boldsymbol{\Gamma}_0^T\mathbf{J}_0^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_0.$$

Todėl, didinant dimensiją N, (3.4.22) nelygybės dešinėje reiškinys gali tik padidėti (žr. [4]).

3.4.6 pavyzdys. *Puasono skirstinio parametro λ^2 efektyvusis pagal Bolševą NMD įvertinys.* Tegu paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint Puasono a. d. $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Reikia įvertinti vektorinę funkciją $\boldsymbol{\gamma}(\lambda) = (\gamma_1,\ \gamma_2)^T = (\lambda, \lambda^2)^T$. Turime

$$f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\gamma}) = \lambda^S \mathrm{e}^{-n\lambda} \prod_{i=1}^n \frac{1}{X_i!}, \quad S = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{P}(n\lambda).$$

Parinkime tokias a. v. $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^T$ koordinates:

$$Y_1 = \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{S - n\lambda}{\lambda},\ \ Y_2 = \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = \left(\frac{S}{\lambda}\right)^2 - \frac{S}{\lambda}\left(2n + \frac{1}{\lambda}\right) + n^2.$$

Tada

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_\lambda Y_1 & \mathbf{Cov}\,(Y_1, Y_2) \\ \mathbf{Cov}\,(Y_1, Y_2) & \boldsymbol{V}_\lambda Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{2n^2}{\lambda^2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sudauginę matricas, gauname

$$\boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{n} & \frac{2\lambda^2}{n_2} \\ \frac{2\lambda^2}{n} & \frac{4\lambda^3}{n} + \frac{2\lambda^2}{n^2} \end{pmatrix}.$$

Matome, kad abiejų NMD įvertinių $\hat{\lambda} = \bar{X}$ ir $\hat{\lambda^2} = \bar{X}^2 - \bar{X}/n$ dispersijos sutampa su patikslintos (3.4.22) nelygybės nurodytomis ribomis. Jeigu apibrėždami įvertinių efektyvumą imtume patikslintas (3.4.22) ribas, tai šių abiejų įvertinių efektyvumas būtų lygus 1.

3.4.4. Asimptotiškai efektyvieji įvertiniai

Tarkime, kad nagrinėjamas statistinis modelis $\mathbf{X} \sim f(x; \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbf{R}^m$, t. y. $\mathbf{X}$ skirstinys absoliučiai tolydus σ-baigtinio mato μ atžvilgiu. Nagrinėsime parametro $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = (\gamma_1(\boldsymbol{\theta}), \ldots, \gamma_k(\boldsymbol{\theta}))^T$ įvertinius.

Parodėme, kad efektyvieji įvertiniai (kai Rao ir Kramerio nelygybė virsta lygybe) egzistuoja gana retai. Efektyviųjų įvertinių klasė kur kas platesnė, jeigu efektyvumas nusakomas kaip asimptotinė savybė, kai imties didumas $n \to \infty$.

Jeigu tenkinamos Rao ir Kramerio teoremos sąlygos, tai nelygybėje nurodoma riba yra eilės $1/n$ (kai sąlygos netenkinamos, gali egzistuoti įvertiniai, kurių dispersijos mažėja greičiu $1/n^{1+\delta}$, $\delta > 0$; žr., pvz., 100 pratimą). Kaip matėme nagrinėtame pavyzdyje, Rao ir Kramerio nelygybės pataisos, pateikiamos Bolševo teoremoje (jeigu jų reikia), yra aukštesnės eilės nykstamas dydis, palyginti su pagrindinio nario eile $1/n$. Todėl asimptotiškai jos neturi reikšmės.

Žinome, kad įvertis efektyvusis, jei jo kovariacinė matrica pasiekia apatinę Rao ir Kramerio nelygybės ribą. Reguliariomis sąlygomis statistinio modelio nepaslinktasis įvertinys $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ efektyvusis tada ir tik tada, kai

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = \dot{\boldsymbol{\gamma}}^T(\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\, \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}). \tag{3.4.23}$$

Kai imtis paprastoji $\boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta})/n$ ir dešiniojoje (3.4.23) lygybės pusėje yra $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta})/n$; čia $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta}) = \dot{\boldsymbol{\gamma}}^T(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ nepriklauso nuo n ir $\mathbf{X}$. Bendru atveju, jei $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta})/n \xrightarrow{P} \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta})$, tai dešiniojoje lygybės pusėje yra $(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta}) + \mathrm{o}_P(1))\, \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta})/n$.

Iš čia išplaukia asimptotinio efektyvumo apibrėžimas.

3.4.4 apibrėžimas (Rao). Įvertinių seka $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_n$ vadinama *asimptotiškai efektyviąja*, jeigu egzistuoja tokia matrica $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})$, kad su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

$$\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})\frac{1}{n}\, \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta})\right) \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty. \tag{3.4.24}$$

Net turint labai bendrą (nebūtinai paprastosios imties) modelį, tenkinantį sąlygą $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta})/n \to \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta})$, apibrėžime vietoje matricos $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})$ būtų galima naudoti $\dot{\boldsymbol{\gamma}}^T(\boldsymbol{\theta})$ $\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$, bet kartais matrica $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})$ randama neskaičiuojant $\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$.

3.4.8 pastaba. Jeigu imtis $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ paprastoji ir $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}) > \mathbf{0}$, tai asimptotiškai efektyviųjų įvertinių seka $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n$ yra asimptotiškai normalioji:

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Y} \sim N_k(\mathbf{0},\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})\, i(\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{\theta})). \tag{3.4.25}$$

Jei $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta}) = \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$, gauname

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Y} \sim N_k(\mathbf{0},\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}^T(\boldsymbol{\theta})\, i^{-1}(\boldsymbol{\theta})\, \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\theta})). \tag{3.4.26}$$

Įrodymas. Atsitiktinis vektorius $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}))$ asimptotiškai (kai $n \to \infty$) turi tą patį skirstinį kaip ir atsitiktinis vektorius $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})\frac{1}{n}\,\dot{\ell}_n(\boldsymbol{\theta})\sqrt{n}$. Tačiau $\dot{\ell}_n(\boldsymbol{\theta})$ yra vienodai pasiskirsčiusių nepriklausomų atsitiktinių vektorių su nuliniais vidurkiais ir kovariacinėmis matricomis $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta})$ suma. Remiantis CRT, atsitiktinis vektorius $\dot{\ell}_n/\sqrt{n} \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z} \sim N_m(\mathbf{0},\ i(\boldsymbol{\theta}))$, todėl

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{d} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{Y} \sim N_k(\mathbf{0},\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})\, i(\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{\theta})).$$

▲

3.4.9 pastaba. Jeigu įvertiniai $\tilde{\gamma}$ ir $\hat{\gamma}$ asimptotiškai efektyvieji pagal Rao, tai jie asimptotiškai ekvivalentūs, t. y. su visais $\theta \in \Theta$

$$\sqrt{n}(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_n - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_n) \xrightarrow{P} \mathbf{0}, \quad n \to \infty.$$

3.4.7 pavyzdys. *Puasono skirstinio parametro λ^2 asimptotiškai efektyvusis įvertinys.* Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis iš Puasono skirstinio su parametru λ. Imkime parametro λ^2 įvertinį $\hat{\lambda^2} = \bar{X}^2$. Parodysime, kad šis įvertinys asimptotiškai efektyvusis pagal Rao. Žinome, kad $\dot{\ell}(\lambda) = n(\bar{X} - \lambda)/\lambda$. Asimptotiškai efektyvusis įvertinys turi tenkinti lygybę

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}^2 - \lambda^2 - B(\lambda)\frac{\bar{X} - \lambda}{\lambda}\right) = \sqrt{n}(\bar{X} - \lambda)(\bar{X} + \lambda - \frac{B(\lambda)}{\lambda}) \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty. \tag{3.4.27}$$

Pirmasis daugiklis $\sqrt{n}(\bar{X} - \lambda) \xrightarrow{P} Y \sim N(0, \lambda)$. Antrasis daugiklis pagal tikimybę artėja prie 0, jeigu $B(\lambda) = 2\lambda^2$. Taigi (3.4.27) lygybė tenkinama ir įvertinys $\hat{\lambda^2} = \bar{X}^2$ asimptotiškai efektyvusis pagal Rao.

3.4.5. Asimptotinis įvertinių palyginimas

Tarkime, yra dvi vienmačio parametro $\gamma = \gamma(\boldsymbol{\theta})$ pagristųjų, nepaslinktųjų ir asimptotiškai normaliųjų įvertinių sekos $\hat{\gamma}_{1n}$ ir $\hat{\gamma}_{2n}$.

3.4.5 apibrėžimas. Riba

$$E_{21} = \lim_{n \to \infty} \frac{\boldsymbol{V}(\hat{\gamma}_{1n})}{\boldsymbol{V}(\hat{\gamma}_{2n})} \tag{3.4.28}$$

vadinama įvertinio $\hat{\gamma}_{2n}$ *asimptotiniu santykiniu efektyvumu* (ASE) įvertinio $\hat{\gamma}_{1n}$ atžvilgiu.

Tarkime, kad egzistuoja toks $r > 0$, kad

$$n^r \boldsymbol{V}(\hat{\gamma}_{1n}) \to a_1, \quad n^r \boldsymbol{V}(\hat{\gamma}_{2n}) \to a_2, \quad n \to \infty.$$

Tada $E_{21} = \frac{a_1}{a_2}$ ir, kai imčių didumai n_1 ir n_2 auga, įverčių dispersijos apytikriai lygios, jei $n_1 = n_2 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/r} = n_2 E_{21}^{1/r}$.

Taigi $E_{21} \approx n_1/n_2$. Pavyzdžiui, jei $E_{21} = 0,5$, tai įvertinių $\hat{\gamma}_{1n_1}$ ir $\hat{\gamma}_{2n_2}$ tikslumas apytikriai vienodas, imant $n_2 = 2n_1$. Taigi, norint pasiekti tą patį tikslumą, antrajam įvertiniui reikia turėti du kartus daugiau stebinių.

3.4.10 pastaba. Jeigu įvertiniai yra paslinktieji, tai dešinėje (3.4.28) lygybės pusėje lyginame kvadratinės rizikos funkcijas.

3.4.8 pavyzdys. *Empirinės medianos, kaip normaliojo skirstinio vidurkio įvertinio, asimptotinis efektyvumas empirinio vidurkio atžvilgiu.* Vertindami normaliojo skirstinio vidurkį 3.3.4 ir 3.3.5 skyreliuose, gavome, kad empirinio vidurkio $\bar{X}$ dispersija yra σ^2/n, o empirinės medianos $\tilde{X}$ asimptotinė dispersija – $\pi\sigma^2/2n$. Taigi įvertinio $\tilde{X}$ ASE, palyginti su $\bar{X}$, yra $2/\pi \approx 0,64$. Vadinasi, norint pasiekti tą patį tikslumą ir turint įverčius $\bar{X}$ ir $\tilde{X}$, reikia, pavyzdžiui, imčių, kurių didumas atitinkamai yra 640 ir 1000.

3.5. Įvertinių radimo metodai

Parametrų įvertinių radimo metodus, kai egzistuoja pilnosios ir pakankamosios statistikos, aptarėme 3.4.3 skyrelyje. Tačiau tokios statistikos egzistuoja ne visada. Be to, sąlyginių vidurkių skaičiavimas pakankamųjų statistikų atžvilgiu kartais būna gana sudėtingas. Panagrinėsime įvertinių radimo metodus, kuriuos galima pritaikyti bendresniems modeliams.

3.5.1. Momentų metodas

Tarkime, kad paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. X, kurio pasiskirstymo funkcija yra $F(x, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)^T \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m$, ir egzistuoja momentai

$$\alpha_s = \alpha_s(\boldsymbol{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s dF(x, \boldsymbol{\theta}), \ s = 1, 2, ..., m.$$

Žinome (žr. 3.3.4 ir 3.3.5 skyrelius), kad empirinė pasiskirstymo funkcija $\hat{F}_n(x)$ ir jos pagrindu sudaryti empiriniai momentai

$$a_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s d\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^s, \ s = 1, 2, ..., m,$$

yra nepaslinktieji ir pagrįstieji pasiskirstymo funkcijos $F(x, \boldsymbol{\theta})$ ir teorinių momentų α_s įvertiniai. Todėl parametro $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)^T$ įvertinių ieškosime iš lygčių sistemos

$$\alpha_s(\theta_1, ..., \theta_m) = a_s, \ s = 1, 2, ..., m, \tag{3.5.1}$$

kurioje teoriniai momentai prilyginami atitinkamiems empiriniams momentams.

Jei $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) : \Theta \to \mathbf{R}^s$ yra bijekcija, tai gautoji sistema išsprendžiama parametrų atžvilgiu ir gaunami *momentų metodo įvertiniai*

$$\tilde{\theta}_s = \tilde{\theta}_s(a_1, a_2, ..., a_m), \ , \ s = 1, 2, ..., m, \tag{3.5.2}$$

kurie yra empirinių momentų $a_1, a_2, ..., a_m$ funkcijos.

Tokių funkcijų savybės aptartos 3.3.5 skyrelyje. Pavyzdžiui, jei gautosios funkcijos yra tolydžios ir taško $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ aplinkoje turi tolydžias dalines išvestines savo argumentų atžvilgiu, tai gautieji įvertiniai $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_m)^T$ yra pagrįstieji ir asimptotiškai normalieji:

$$\sqrt{n}(\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Y} \sim N_m \left(\mathbf{0}, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}) \, \boldsymbol{\Sigma} \, (\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}))^T\right); \tag{3.5.3}$$

čia

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}) = [B_{ij}(\boldsymbol{\alpha})]_{m\times m}, \ B_{ij}(\boldsymbol{\alpha}) = \left[\frac{\partial \tilde{\theta}_i(a_1, ..., a_m)}{\partial a_j}\right]_{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\alpha}}, \ \boldsymbol{\Sigma} = [\alpha_{i+j} - \alpha_i \alpha_j]_{m\times m}.$$

3.5.1 pastaba. Jau 3.4.3 skyrelyje įrodėme, kad NMD įvertiniai turi būti pakankamųjų statistikų funkcijos. Jos, suprantama, nebūtinai turi sutapti su empiriniais momentais. Todėl momentų metodu rasti įvertiniai dažnai nebūna asimptotiškai efektyvieji, t. y. jų asimptotinė dispersija gali būti didesnė negu įvertinių, gautų tikslesniais metodais. Nepaisant to, šis metodas gana dažnai naudojamas, nes palyginti paprasta skaičiuoti. Be to, momentų metodu gautus įvertinius galima panaudoti kaip pradinius artinius ieškant įvertinių tikslesniais metodais.

3.5.2 pastaba. Vietoje pradinių momentų kartais patogiau naudoti centrinius momentus ir spręsti lygčių sistemą

$$\alpha_1(\theta_1, ..., \theta_m) = a_1, \quad \mu_s(\theta_1, ..., \theta_m) = m_s, \ s = 2, ..., m. \tag{3.5.4}$$

3.5.3 pastaba. Jeigu stebimų a. d. momentai neegzistuoja, tai vietoje empirinių momentų galima naudotis kitokiomis empirinėmis charakteristikomis. Pavyzdžiui, Koši skirstinio parametrų įvertinius galima gauti prilyginus empirinę medianą ir tarpkvartilinį plotį atitinkamiems teoriniams analogams (žr. 3.3.4 skyrelį).

3.5.1 pavyzdys. *Normaliojo skirstinio parametrų įvertiniai, gauti momentų metodu.* Tarkime, kad paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Kadangi parametrai μ ir σ^2 yra a. d. X vidurkis ir dispersija, tai iš karto gauname

$$\tilde{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j, \ \ \tilde{\sigma}^2 = m_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2.$$

3.5.2 pavyzdys. *Beta skirstinio parametrų įvertiniai, gauti momentų metodu.* Tegu paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim Be(\gamma,\ \eta)$. Parametrams vertinti turime lygčių sistemą

$$\begin{cases} \mathbf{E}X = \frac{\gamma}{\gamma+\eta} = \bar{X} \\ \boldsymbol{V}X = \frac{\gamma\eta}{(\gamma+\eta)^2(\gamma+\eta+1)} = s^2. \end{cases}$$

Išsprendę gauname parametrų γ ir η įvertinius

$$\tilde{\gamma} = \bar{X}\delta,\ \tilde{\eta} = (1-\bar{X})\delta,\ \ \delta = \frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{s^2} - 1.$$

Įvertiniai yra empirinių momentų $\bar{X}$ ir s^2 funkcijos. Pažymėsime, kad egzistuoja parametro $(\gamma,\ \eta)^T$ pakankamoji statistika $\boldsymbol{T} = (\prod_{j=1}^n X_j,\ \prod_{j=1}^n (1-X_j))^T$ ir NMD įvertinių pagal 3.3.2 poskyrio teoremą reikėtų ieškoti funkcijų nuo pakankamosios statistikos $\boldsymbol{T}$ klasėje.

3.5.2. Didžiausiojo tikėtinumo metodas

Tarkime, kad nagrinėjamas statistinis modelis $\mathbf{X} \sim f(x;\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbf{R}^m$, t. y. $\mathbf{X}$ skirstinys absoliučiai tolydus σ-baigtinio mato μ atžvilgiu.

Funkcija $L(\boldsymbol{\theta}) = L_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{X};\boldsymbol{\theta})$ vadinama tikėtinumo funkcija, nes jos reikšmė $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})$ parodo, kiek tikėtina, jog imtis įgis reikšmę $\boldsymbol{x}$ (diskrečiu atveju) arba reikšmę iš $\boldsymbol{x}$ mažos aplinkos $V(\boldsymbol{x})$ (tolydžiu atveju), kai tikroji parametro reikšmė yra $\boldsymbol{\theta}$:

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X} = \boldsymbol{x}) \quad \text{arba} \quad f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) \approx \frac{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X} \in V(\boldsymbol{x}))}{\mu(V(\boldsymbol{x}))}.$$

Taigi labiausiai tikėtinos $\boldsymbol{\theta}$ reikšmės yra tos, kurios maksimizuoja tikėtinumo funkciją.

Turint imties realizaciją $\boldsymbol{x}$ ir norint įvertinti tikrąją parametro $\boldsymbol{\theta}$ reikšmę, ieškoma tos $\boldsymbol{\theta}$ reikšmės, kuri būtent ir maksimizuoja tikimybę, kad imtis įgis reikšmę $\boldsymbol{x}$ arba reikšmę iš $\boldsymbol{x}$ mažos aplinkos.

3.5.1 apibrėžimas. Statistika $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_n = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})$ vadinama parametro $\boldsymbol{\theta}$ *didžiausiojo tikėtinumo* (DT) įvertiniu, jei μ-b.v.

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}} L(\boldsymbol{\theta}). \tag{3.5.5}$$

3.5.4 pastaba. Jei $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\mathbf{X})$ yra pakankamoji statistika, tai iš faktorizacijos kriterijaus $L_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}) = g(\boldsymbol{T}(\mathbf{X}),\boldsymbol{\theta})\ h(\mathbf{X})$ išplaukia, kad DT įvertinys yra $\boldsymbol{T}$ funkcija, nes $\boldsymbol{\theta}$ atžvilgiu funkcija L įgyja maksimumą tame pačiame taške, kaip ir funkcija $g(\boldsymbol{T}(\mathbf{X}),\boldsymbol{\theta})$.

3.5.5 pastaba. Didžiausiojo tikėtinumo įvertiniai turi invariantiškumo savybę: jei $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\theta})$, o $\boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{\Theta} \to \mathbf{R}^m$ yra bijekcija, tai vietoje modelio $\mathbf{X} \sim P_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ gauname jam ekvivalentų kitaip parametrizuotą modelį $\mathbf{X} \sim P^*_{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\Theta})$ ir naują tikėtinimo funkciją $L^*_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\lambda}) = L_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\lambda}))$, maksimizuojamą taške $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_n = \boldsymbol{\lambda}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$; čia $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\lambda})$ yra atvirkštinė funkcijai $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\theta})$.

Tuo atveju, kai $\boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{\Theta} \to \mathbf{R}^k$, $k \le m$, yra mačioji funkcija, atvaizduojanti aibę $\boldsymbol{\Theta}$ į mažesnio matavimo erdvę, statistika $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_n = \boldsymbol{\lambda}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ vadinama parametro $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\theta})$ didžiausiojo tikėtinumo įvertiniu.

Paprastai DT įvertinio ieškoma maksimizuojant $\boldsymbol{\theta}$ atžvilgiu funkciją

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \ell_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}) = \ln L_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}),$$

nes ji pasiekia maksimumą tame pačiame taške kaip ir L, o $\ln L$ pavidalas dažniausiai yra paprastesnis.

Jei funkcija $\ell(\boldsymbol{\theta})$ turi maksimumą ir diferencijuojama $\boldsymbol{\theta}$ atžvilgiu, tai DT įvertiniai tenkina *tikėtinumo lygtis*

$$\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}; \tag{3.5.6}$$

čia

$$\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\ell(\boldsymbol{\theta}), \dots, \frac{\partial}{\partial\theta_m}\ell(\boldsymbol{\theta})\right)^T$$

yra informančių vektorius.

3.5.3 pavyzdys. *Normaliojo skirstinio DT įvertiniai.* Tegu paprastoji atsitiktinė imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X_i \sim N(\mu,\ \sigma^2)$. Tikėtinumo funkcija

$$L(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2\},$$

jos logaritmas

$$\ell(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

Informantės yra:

$$\dot{\ell}_\mu(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu),$$

$$\dot{\ell}_{\sigma^2}(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

Iš čia μ ir σ^2 DT įvertiniai

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \qquad \hat{\sigma}^2 = m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

sutampa su momentų metodu gautais įvertiniais. Įvertinys $(\bar{X},\ m_2)$ maksimizuoja tikėtinumo funkciją, nes

$$\ell(\bar{X},\ m_2) - \ell(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} - \frac{n}{2}\ln\frac{m_2}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

$$= -\frac{n}{2} - \frac{n}{2}\ln\frac{m_2}{\sigma^2} + \frac{n}{2}\frac{m_2}{\sigma^2} + \frac{n}{2\sigma^2}(\bar{X} - \mu)^2 \geq \frac{n}{2}(x - \ln x - 1), \quad x = \frac{m_2}{\sigma^2}.$$

Funkcija $f(x) = x - \ln x - 1$ neneigiama intervale $(0, \infty)$, nes $f'(x) = (x-1)/x, f''(x) = 1/x^2$, todėl jos minimumo taškas šiame intervale yra $x = 1$, o $f(1) = 0$. Taigi $\ell(\bar{X},\ m_2) - \ell(\mu, \sigma^2) \geq 0$.

Fiksavus $p \in (0, 1)$ p kvantilis yra $x(p) = \mu + \sigma z(p)$ pavidalo; čia $z(p)$ yra standartinio normalaus skirstinio p kvantilis. Jo DT įvertinys

$$\hat{x}(p) = \bar{X} + \sqrt{m_2}\, z(p).$$

3.5.4 pavyzdys. *Eksponentinės skirstinių šeimos DT įvertiniai.* Tarkime, kad imties $\mathbf{X}$ skirstinys priklauso eksponentinei skirstinių šeimai (užrašytai kanonine forma po reparametrizavimo):

$$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta}) = h(\boldsymbol{x})\exp\{\boldsymbol{\theta}^T\, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) - B(\boldsymbol{\theta})\}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}.$$

Tada

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \ln h(\mathbf{X}) + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{T}(\mathbf{X}) - B(\boldsymbol{\theta}), \quad \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{T}(\mathbf{X}) - \dot{B}(\boldsymbol{\theta}),$$
$$\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}) = -\ddot{B}(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}) = \ddot{B}(\boldsymbol{\theta}).$$

DT įvertiniai tenkina lygtis

$$\dot{B}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{T}(\mathbf{X}).$$

Žinome, kad $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{T}(\mathbf{X}) = \dot{B}(\boldsymbol{\theta})$. Taigi DT įvertiniai sutampa su momentų įvertiniais, jei vietoje imties $\mathbf{X}$ imama jai ekvivalenti imtis $\boldsymbol{T}$ (primename, kad $\boldsymbol{T}$ yra pakankamoji statistika).

Tikėtinumo funkcijos forma priklauso ir nuo imties struktūros.

3.5.5 pavyzdys. *Paprastosios imties tikėtinumo funkcija.* Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji imtis, $X_i \sim f(x, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m$. Tada

$$L(\boldsymbol{\theta}) = L_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \boldsymbol{\theta}),$$

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(\boldsymbol{\theta}), \quad \ell_i(\boldsymbol{\theta}) = \ln f(X_i, \boldsymbol{\theta}), \quad \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \dot{\ell}_i(\boldsymbol{\theta}). \tag{3.5.7}$$

3.5.6 pavyzdys. *Grupuoti duomenys.* Tarkime, kad $\boldsymbol{Z}_n = (Z_{n1}, \ldots, Z_{nN})^T$ yra atsitiktinis vektorius, turintis polinominį skirstinį $\mathcal{P}_N(n, \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\theta}))$; čia $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\theta}) = (p_1(\boldsymbol{\theta}), \ldots, p_N(\boldsymbol{\theta}))^T$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m$.

Pavyzdžiui, jei nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių $X_i \sim F(x, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m$, $i = 1, \ldots, n$, reikšmių sritis $\mathbf{R}$ padalijama į N intervalų $I_1, \ldots, I_N$, tai Z_{nj} gali būti interpretuojami kaip atsitiktinių dydžių X_i, patenkančių į intervalus I_j, skaičiai: $Z_{nj} = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{I_j}(X_i)$, ir $p_i(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{X_i \in I_j\}$. Taigi

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{Z_{n1} = k_1, \ldots, Z_{nN} = k_N\} = \frac{n!}{k_1! \ldots k_N!} p_1^{k_1}(\boldsymbol{\theta}) p_2^{k_2}(\boldsymbol{\theta}) \ldots p_N^{k_N}(\boldsymbol{\theta}).$$

Tarkime, kad stebimi tik Z_{nj}. Tada tikėtinumo funkcija yra

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n!}{Z_{n1}! \ldots Z_{nN}!}\, p_1^{Z_{n1}}(\boldsymbol{\theta}) p_2^{Z_{n2}}(\boldsymbol{\theta}) \ldots p_N^{Z_{nN}}(\boldsymbol{\theta}).$$

3.5.7 pavyzdys. *Pirmojo tipo cenzūravimas.* Fiksuojamas eksperimento laikas t ir stebima n objektų. Jų funkcionavimo trukmės $T_1, \ldots, T_n$ yra vienodai pasiskirstę nepriklausomi absoliučiai tolydūs atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstymo funkcija yra $F(t, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m$, ir tankis Lebego mato atžvilgiu yra $f(t, \boldsymbol{\theta})$. Atsitiktinio dydžio T_i reikšmė t_i stebima tiktai tada, jei $t_i \leq t$. Pažymėkime

$$X_i = \min(T_i, t), \quad \delta_i = \mathbf{1}_{(0,\ t]}(T_i).$$

Turime imtį

$$(X_1, \delta_1), \ldots, (X_n, \delta_n),$$

kurioje $X_i = T_i, \delta_i = 1$, jei i-asis objektas sugenda momentu $T_i \leq t$, ir $X_i = t, \delta_i = 0$, jei i-asis objektas nemiršta iki momento t. Atsitiktiniai vektoriai (X_i, δ_i) nepriklausomi vienodai pasiskirstę, todėl ieškokime (X_1, δ_1) dėsnio. Turime

$$F_{X_1,\delta_1}(x, 1; \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{X_1 \leq x, \delta_1 = 1\} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T_1 \leq x, T_1 \leq t\}$$
$$= F_{T_1}(\min(x,t)) = \int_0^x f(u, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{1}_{(0,\ t]}(u) du = \int_0^x f^1(u, \boldsymbol{\theta})(1 - F(u, \boldsymbol{\theta}))^0 d(u \wedge t),$$
$$F_{X_1,\delta_1}(x, 0; \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{X_1 \leq x, \delta_1 = 0\} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}(t \leq x, T_1 > t)$$
$$= \mathbf{1}_{(0,\ x]}(t)(1 - F(t, \boldsymbol{\theta})) = \int_0^x f^0(u, \boldsymbol{\theta})(1 - F(u, \boldsymbol{\theta}))^1 d\mathbf{1}_{(0,\ u]}(t).$$

Nagrinėkime matą μ erdvėje $(\mathbf{R}_+ \times \{0, 1\}, \mathcal{B}_+ \times \mathcal{E})$: čia $\mathcal{B}_+$ intervalo $[0, \infty)$ Borelio σ-algebra, $\mathcal{E}$ aibės $\{0,\ 1\}$ visų poaibių sistema. Gauname

$$\mu([0, u] \times \{1\}) = u \wedge t, \quad \mu([0, u] \times \{0\}) = \mathbf{1}_{(0,\ u]}(t).$$

Tada

$$F_{X_1,\delta_1}(x,k;\boldsymbol{\theta}) = \int_0^x f^k(u,\boldsymbol{\theta})[1-F(t,\boldsymbol{\theta})]^{1-k}\mu(du,k)$$

ir (X_1, δ_1) tankis μ atžvilgiu yra

$$p_{X_1,\delta_1}(x_1,k_1;\boldsymbol{\theta}) = f^{k_1}(x_1,\boldsymbol{\theta})[1-F(t,\boldsymbol{\theta})]^{1-k_1}.$$

Taigi tikėtinumo funkcija yra

$$L(X_1,\delta_1,\ldots,X_n,\delta_n;\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f^{\delta_i}(X_i,\boldsymbol{\theta})[1-F(t,\boldsymbol{\theta})]^{1-\delta_i}. \tag{3.5.8}$$

Didžiausiojo tikėtinumo lygčių sistema paprastai per daug sudėtinga, kad ją būtų galima išspręsti išreikštiniu pavidalu. Dažniausiai (3.5.6) lygčių sistema sprendžiama artutiniais iteraciniais metodais.

Išskleiskime funkciją $\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta})$ Teiloro eilute tikrosios parametro reikšmės $\boldsymbol{\theta}_0$ aplinkoje ir apsiribokime tiesiniais nariais:

$$\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}) - \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) \approx \ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0).$$

Jei $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ yra DT įvertinys, tai $\dot{\ell}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0$, todėl

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0 \approx -\ddot{\ell}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0). \tag{3.5.9}$$

Taigi, ieškant DT įvertinio, imamas pradinis artinys $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ ir kitas artinys apibrėžiamas lygybe

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_0 - \ddot{\ell}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)\,\dot{\ell}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0).$$

Tada $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ imamas kaip pradinis artinys, vėl kartojama aprašyta procedūra ir t. t. Iteracinė procedūra

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1} - \ddot{\ell}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1})\,\dot{\ell}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}),\ i = 1, 2, \cdots . \tag{3.5.10}$$

Procesas baigiamas, kai sprendinys stabilizuojamas ir pataisos $\delta_i = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}$ pasidaro mažos.

3.5.6 pastaba. Jeigu (3.5.6) lygties sprendinys $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ yra pagrįstas parametro $\boldsymbol{\theta}$ įvertinys, tai, remiantis (3.5.9) lygtimi, galima daryti išvadą, kad tam tikromis reguliarumo sąlygomis a. v.

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \quad \text{ir} \quad -\sqrt{n}\ddot{\ell}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\,\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) = -(\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)/n)^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\,\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)$$

asimptotiniai skirstiniai turėtų būti vienodi. Jeigu imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji, tai a. v. $\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)$ yra suma vienodai pasiskirsčiusių nepriklausomų a. v., kurių vidurkiai lygūs nuliui o kovariacinės matricos $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta})/n$. Todėl, prisiminus CRT,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Y} \sim N_m(\mathbf{0}, \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)).$$

Iš didžiųjų skaičių dėsnio išplaukia

$$\frac{1}{n}\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ddot{\ell}_1(\boldsymbol{\theta}_0,\, X_i) \xrightarrow{P} -\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0),$$

nes $\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)$ yra n. v. p. atsitiktinių matricų su vidurkiais $-\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)$ suma. Todėl

$$-\sqrt{n}\ddot{\ell}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\,\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Y} \sim N_m(\mathbf{0}, \boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)).$$

Į tokį patį skirstinį turėtų artėti ir $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)$ skirstinys. Kitaip sakant, kai yra tam tikros reguliarumo sąlygos, DT įvertiniai turėtų būti asimptotiškai normalieji ir efektyvieji. Tolesniame skyrelyje nurodomos pakankamos asimptotinio normalumo ir efektyvumo sąlygos.

Reikia pažymėti, kad kai kuriuose matematikos ar matematinės statistikos TPP yra programos vieno ar kelių argumentų funkcijų ekstremumo taškams rasti. Šias programas galima naudoti ir ieškant DT funkcijos ar jos logaritmo maksimumo taškų. Tada nereikia ieškoti išvestinių $\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta})$ ir spręsti (3.5.6) lygčių sistemos. Trumpą tokių SAS programų paketo aprašymą ir jų taikymo pavyzdžius galime rasti [13] knygoje (p. 119–120).

3.5.8 pavyzdys. *Momentų ir DT metodų įvertinių palyginimas.* Atliksime vieno konkretaus modelio skaitinį momentų ir DT metodų įvertinių tikslumo palyginimą.

Tegu $X_1, ..., X_n$ yra paprastoji imtis a. d. $X \sim U(0, \theta)$. Reikia rasti, kokio didumo turėtų būti imtis, kad parametro θ įvertinio santykinės paklaidos modulis neviršytų 0,05 su tikimybe, ne mažesne už 0,95.

1. *Momentų metodas.* A. d. X pirmieji momentai yra $\mathbf{E}(X|\theta) = \theta/2$, $\boldsymbol{V}(X|\theta) = \theta^2/12$. Momentų metodu gauname įvertinį $\hat{\theta} = 2\bar{X}$; $\mathbf{E}(\hat{\theta}|\theta) = \theta$, $\boldsymbol{V}(\hat{\theta}|\theta) = \theta^2/3n$. Taikydami normaliąją aproksimaciją gauname

$$\mathbf{P}\{|\frac{\hat{\theta}-\theta}{\theta}| < 0,05\} \approx 2\Phi(0,05\sqrt{3n}) - 1 \geq 0,95 \quad \Leftrightarrow$$

$$0,05\sqrt{3n} > z_{0,025} \quad \Leftrightarrow n \geq 513.$$

2. *DT metodas.* DT funkcija $L(\theta) = 1/\theta^n$, kai $\theta > X_{(n)}$; $L(\theta) = 0$, kai $\theta \leq X_{(n)}$. Taigi DT įvertinys yra pozicinė statistika $X_{(n)}$. Šis įvertinys yra paslinktasis. Poslinkį galima atitaisyti imant įvertinį $\tilde{\theta} = (n+1)X_{(n)}/n$ (žr 3.4.4 pavyzdį). Šio įvertinio vidurkis $\mathbf{E}(\tilde{\theta}|\theta) = \theta$, o dispersija $\boldsymbol{V}(\tilde{\theta}|\theta) = \theta^2/(n(n+2))$. Imties didumui rasti gauname nelygybę

$$\mathbf{P}\{|\frac{\hat{\theta}-\theta}{\theta}| < 0,05\} = \mathbf{P}\{0,95n\theta/(n+1) < X_{(n)} < 1,05n\theta/(n+1)\} =$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n (1,05^n - 0,95^n) > 0,95 \quad \Leftrightarrow n \geq 22.$$

Matome, kad naudojant DT metodą imtis gali būti 23,3 karto mažesnė. Suprantama, kad kitiems skirstiniams, kai išpildytos Rao ir Kramero reguliarumo sąlygos, skirtumas tarp šių dviejų metodų įvertinių nėra toks didrlis.

3.5.3. Didžiausiojo tikėtinumo įvertinių asimptotinės savybės

Įrodysime, kad gana bendromis sąlygomis didžiausiojo tikėtinumo įvertiniai yra pagrįstieji ir asimptotiškai efektyvieji.

Tarkime, kad turime imtį

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^T, \dots, \mathbf{X}_n^T)^T;$$

čia $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai vektoriai, $\mathbf{X}_i \sim p_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m$, čia $p_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta})$ yra r_i-mačio vektoriaus $\mathbf{X}_i$ tankis σ-baigtinio mato μ atžvilgiu, $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n p_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta})$.

Tikėtinumo funkcija $L(\boldsymbol{\theta})$ ir jos logaritmas yra

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n p_i(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\theta}), \quad \ell(\boldsymbol{\theta}) = \ln L(\boldsymbol{\theta}).$$

Matėme, kad pakankamai bendromis sąlygomis Fišerio informacinė matrica

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\dot{\ell}^T(\boldsymbol{\theta})\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta})) = -\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}).$$

Jei $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę vienodos dimensijos r atsitiktiniai vektoriai (kai $r = 1$, gauname vienmačio a. d. paprastąją imtį), tai

$$p_i = p, \qquad \boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}) = n\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}),$$

čia

$$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\ddot{\ell}_1(\boldsymbol{\theta}), \qquad \ell_1(\boldsymbol{\theta}) = \ell_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}_1) = \ln p(\mathbf{X}_1, \boldsymbol{\theta}).$$

3.5..1 lema. *Su visais $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$*

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\ell(\boldsymbol{\theta}) \le \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\ell(\boldsymbol{\theta}_0).$$

Lygybė teisinga tada ir tik tada, kai $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_0)$ b. v.

Įrodymas. Naudosimės nelygybe

$$\ln x \le 2(\sqrt{x} - 1), \ x \ge 0.$$

Tada

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\ell(\boldsymbol{\theta}) - \ell(\boldsymbol{\theta}_0)) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0} \ln \frac{f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_0)} \le 2\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left(\sqrt{\frac{f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_0)}} - 1\right)$$

$$= \int (2\sqrt{f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_0)} - f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) - f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_0))\mu(d\boldsymbol{x})$$

$$= -\int (\sqrt{f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})} - \sqrt{f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_0)})^2\mu(d\boldsymbol{x}) \le 0.$$

▲

Iš pradžių panagrinėsime vienmačio parametro DT įvertinio asimptotines savybes, kai imtis paprastoji. Minėjome, kad nagrinėjame tik *identifikuojamus* modelius.

3.5.1 teorema. *Tarkime, kad aibė* $\mathbf{\Theta}$ *atvira ir* $\ell(\theta)$ *diferencijuojama tikrosios parametro* θ *reikšmės* θ_0 *aplinkoje. Tada egzistuoja tokia a. d. seka* $\{\hat{\theta}_n\}$*, kad*

$$\mathbf{P}\{\dot{\ell}(\hat{\theta}_n)=0\}\to 1, \quad \hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0. \tag{3.5.11}$$

Įrodymas. Imkime $\delta>0$. Remiantis stipriuoju didžiųjų skaičių dėsniu ir 3.5.1 lema,

$$\frac{1}{n}(\ell(\theta_0\pm\delta)-\ell(\theta_0)) \xrightarrow{b.t.} \mathbf{E}_{\theta_0}\ell_1(\theta_0\pm\delta)-\mathbf{E}_{\theta_0}\ell_1(\theta_0)<0.$$

Todėl su beveik visais elementariais įvykiais ω egzistuoja teigiami skaičiai $N(\omega)$, kad

$$\ell(\theta_0-\delta)-\ell(\theta_0)<0,\ \ell(\theta_0+\delta)-\ell(\theta_0)<0, \quad \text{kai} \quad n>N(\omega).$$

Taigi

$$\mathbf{P}_{\theta_0}\{\ell(\theta_0-\delta)-\ell(\theta_0)<0,\ \ell(\theta_0+\delta)-\ell(\theta_0)<0\}\to 1, \quad \text{kai} \quad n\to\infty. \tag{3.5.12}$$

Kai δ pakankamai mažas, tai funkcija $\ell(\theta)$ diferencijuojama pagal θ intervale $[\theta_0-\delta,\theta_0+\delta]$, todėl iš nelygybių $\ell(\theta_0-\delta)-\ell(\theta_0)<0$, $\ell(\theta_0+\delta)-\ell(\theta_0)<0$ išplaukia, kad egzistuoja toks $\hat{\theta}:|\hat{\theta}-\theta_0|<\delta$, kad $\dot{\ell}(\hat{\theta})=0$. Taigi su visais $\delta>0$

$$h_n(\delta)=\mathbf{P}\{\exists\,\hat{\theta}\in(\theta_0-\delta,\theta_0+\delta):\dot{\ell}(\hat{\theta})=0\}\to 1, \quad \text{kai} \quad n\to\infty.$$

Imant $\delta=\delta_n\downarrow 0$,

$$h_n(\delta_n)=\mathbf{P}\{\exists\,\hat{\theta}_n\in(\theta_0-\delta_n,\theta_0+\delta_n):\dot{\ell}(\hat{\theta}_n)=0\}\to 1.$$

Tiems elementariems įvykiams, su kuriais lygtis $\dot{\ell}(\hat{\theta}_n)=0$ šaknų neturi, apibrėžiame $\hat{\theta}_n=0$. Tada seka $\{\hat{\theta}_n\}$ turi savybes:

$$\mathbf{P}\{\dot{\ell}(\hat{\theta}_n)=0\}\to 1, \quad \hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0. \tag{3.5.13}$$

3.5.7 pastaba. Apskritai kalbant, teoremoje gauta atsitiktinių dydžių seka $\hat{\theta}_n$ priklauso nuo θ_0, taigi formaliai ji gali ir nebūti įvertinių seka. Tačiau naudojantis teorema galima sudaryti pagrįstąją įvertinių seką, tenkinančią (3.5.11) sąryšį. Pirma, jei su kiekvienu n egzistuoja vienintelis lygties $\dot{\ell}(\theta)=0$ sprendinys $\tilde{\theta}_n$, tai $\tilde{\theta}_n=\hat{\theta}_n$ ir yra ieškomoji seka. Antra, jei sprendinių skaičius didesnis už vienetą, bet egzistuoja pagrįstųjų įvertinių seka $\bar{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$ (pvz., momentų metodu gauti įvertiniai), tai imama sprendinių seka $\tilde{\theta}_n$, artimiausia $\bar{\theta}_n$. Kadangi $|\tilde{\theta}_n-\bar{\theta}_n|\le|\hat{\theta}_n-\bar{\theta}_n|\xrightarrow{P}0$, tai $\tilde{\theta}_n-\bar{\theta}_n\xrightarrow{P}0$, kartu $\tilde{\theta}_n\xrightarrow{P}\theta_0$.

3.5.2 teorema. *Tarkime, kad įvertinių seka yra tokia, kad* $\dot{\ell}(\hat{\theta}_n)=0$, $\hat{\theta}_n\xrightarrow{P}\theta_0$, *ir:*

1) aibė Θ *atvira;*

2) beveik su visais $y\in\mathbf{R}$ *parametro* θ *tikrosios reikšmės* θ_0 *aplinkoje* $V_\rho=\{\theta:|\theta-\theta_0|<\rho\}$ *egzistuoja tolydžios išvestinės* $\dot{p}(y,\theta)$, $\ddot{p}(y,\theta)$*;*

3) aplinkoje V_ρ galima du kartus diferencijuoti po integralo ženklu, t. y.

$$\int_{\mathbf{R}} \dot p(y,\theta)dy = \frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathbf{R}} p(y,\theta)dy = 0,$$

$$\int_{\mathbf{R}} \ddot p(y,\theta)dy = \frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathbf{R}} \dot p(y,\theta)dy = 0;$$

4) Fišerio informacinė matrica teigiama taške θ_0, t. y. $\boldsymbol{I}(\theta_0) = n\boldsymbol{i}(\theta_0) > 0$;

5) egzistuoja tokios neneigiamos funkcijos h ir b, kad beveik su visais $y \in \mathbf{R}$ ir visais $\theta \in V_\rho$

$$|\, \ddot\ell_1(y,\theta) - \ddot\ell_1(y,\theta_0) \,| \le h(y)\, b(\theta), \quad \mathbf{E}_{\theta_0}\{h(X_1)\} < \infty, \quad b(\theta_0) = 0,$$

ir funkcija b tolydi taške θ_0.

Tada

$$\sqrt{n}(\hat\theta_n - \theta_0) \xrightarrow{d} Z \sim N(0, \boldsymbol{i}^{-1}(\theta_0)). \tag{3.5.14}$$

3.5.8 pastaba. Sąlyga 5) tenkinama su $b(\theta) = |\theta - \theta_0|$, jei aplinkoje V_ρ egzistuoja $\dddot\ell_1(y,\theta)$ ir beveik su visais $y \in \mathbf{R}$ ir visais $\theta \in V_\rho$

$$|\, \dddot\ell_1(y,\theta) \,| \le h(y), \quad \mathbf{E}_{\theta_0}\{h(X_1)\} < \infty.$$

Iš lygybių $\dot p = \dot\ell p$ ir $\ddot p = \ddot\ell p + \dot\ell^2 p$ išplaukia, kad 3) sąlygos ekvivalenčios sąlygoms

$$\mathbf{E}_\theta(\dot\ell_1) = 0, \quad \mathbf{E}_\theta(\dot\ell_1^2) = -\mathbf{E}_\theta(\ddot\ell_1)$$

su visais $\theta \in V_\rho$.

Įrodymas. Integruodami reiškinius kairiojoje ir dešiniojoje lygybės

$$\frac{\partial}{\partial t}\dot\ell(\theta_0 + t(\hat\theta_n - \theta_0)) = \ddot\ell(\theta_0 + t(\hat\theta_n - \theta_0))(\hat\theta_n - \theta_0)$$

pusėse pagal t intervale $[0,1]$, gauname

$$-\dot\ell(\theta_0) = \int_0^1 \ddot\ell(\theta_0 + t(\hat\theta_n - \theta_0))dt\ (\hat\theta_n - \theta_0). \tag{3.5.15}$$

Parodysime, kad integralas asimptotiškai ekvivalentus $\ddot\ell(\theta_0)$. Iš 5) sąlygos išplaukia

$$\frac{1}{n}\,\Big|\int_0^1 \ddot\ell(\theta_0 + t(\hat\theta_n - \theta_0))dt - \ddot\ell(\theta_0)\,\Big| \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int_0^1 |\, \ddot\ell_i(\theta_0 + t(\hat\theta_n - \theta_0)) - \ddot\ell_i(\theta_0) \,|\, dt$$

$$\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h(X_i)\int_0^1 b(\theta_0 + t(\hat\theta_n - \theta_0))dt. \tag{3.5.16}$$

Pirmasis daugiklis dešinėje yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių baigtinio vidurkio atsitiktinių dydžių empirinis vidurkis, todėl iš didžiųjų skaičių dėsnio išplaukia

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i) \xrightarrow{P} \mathbf{E}_{\theta_0} h(X_1) < \infty. \tag{3.5.17}$$

Parodysime, kad antrasis daugiklis konverguoja pagal tikimybę į 0. Iš funkcijos b tolydumo taške θ_0 ir sąlygos $b(\theta_0) = 0$ gaunama, kad su visais $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $\Delta = \Delta(\varepsilon)$, kad $b(\theta) < \varepsilon$, jei $\mid \theta - \theta_0 \mid < \Delta$. Taigi su visais $t \in [0, 1]$

$$\mid \hat{\theta}_n - \theta_0 \mid < \Delta \Rightarrow \mid \theta_0 + t(\hat{\theta}_n - \theta_0) - \theta_0 \mid = \mid t(\hat{\theta}_n - \theta_0) \mid < \Delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b(\theta_0 + t(\hat{\theta}_n - \theta_0)) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 b(\theta_0 + t(\hat{\theta}_n - \theta_0))dt < \varepsilon.$$

Vadinasi,

$$\mathbf{P}_{\theta_0}\left\{\int_0^1 b(\theta_0 + t(\hat{\theta}_n - \theta_0))dt \geq \varepsilon\right\} \leq \mathbf{P}_{\theta_0}\{\mid \hat{\theta}_n - \theta_0 \mid \geq \Delta\} \to 0, \tag{3.5.18}$$

nes įvertis $\hat{\theta}_n$ pagrįstasis. Iš (3.5.16)–(3.5.18) formulių gauname

$$\frac{1}{n}\int_0^1 \ddot{\ell}(\theta_0 + t(\hat{\theta}_n - \theta_0))dt = \frac{1}{n}\ddot{\ell}(\theta_0) + \mathrm{o}_P(1) = -\boldsymbol{i}(\theta_0) + \mathrm{o}_P(1). \tag{3.5.19}$$

Iš lygybių (3.5.15) ir (3.5.19) išplaukia

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\theta_0) = (\boldsymbol{i}(\theta_0) + \mathrm{o}_P(1)))\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0). \tag{3.5.20}$$

Atsitiktinis dydis $\dot{\ell}(\theta_0, \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} \dot{\ell}_1(\theta_0, X_i)$ yra suma vienodai pasiskirsčiusių nepriklausomų atsitiktinių dydžių, kurių vidurkiai nuliniai ir dispersijos $\boldsymbol{i}(\theta_0)$. Remiantis CRT,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\theta_0) \xrightarrow{d} Y \sim N(0, \boldsymbol{i}(\theta_0)). \tag{3.5.21}$$

Remdamiesi (3.5.20), (3.5.21) lygybėmis ir a. d. sekų konvergavimo faktais ([15], 2c skyrelis), gauname

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) = (\boldsymbol{i}(\theta_0) + \mathrm{o}_P(1))^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\theta_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{i}^{-1}(\theta_0)Y \sim N(0, \boldsymbol{i}^{-1}(\theta_0)). \tag{3.5.22}$$

Pasinaudoję (3.5.22) lygybe, gauname ir įverčių $\hat{\theta}$ asimptotinį efektyvumą:

$$\sqrt{n}[\hat{\theta}_n - \theta_0 - \boldsymbol{i}^{-1}(\theta_0)\frac{1}{n}\dot{\ell}(\theta_0)] = \frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\theta_0)\left[(\boldsymbol{i}(\theta_0) + \mathrm{o}_P(1))^{-1} - \boldsymbol{i}^{-1}(\theta_0)\right] \xrightarrow{P} 0.$$

▲

3.5.9 pavyzdys. *Vienparametrio Koši skirstinio parametro DT įvertinio asimptotinis normalumas ir efektyvumas.* Tegu paprastoji atsitiktinė imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X_i \sim K(\mu,\ 1)$. Turime modelį

$$p(x,\mu) = \frac{1}{\pi}\ \frac{1}{1+(x-\mu)^2}, \quad x \in \mathbf{R},\ \mu \in \mathbf{R}.$$

Šis skirstinys nepriklauso eksponentinei šeimai, taigi baigtiniams n efektyvusis μ įvertinys neegzistuoja. Parodysime, kad DT įvertinys yra asimptotiškai efektyvus. Gauname

$$\dot{\ell}(\mu) = \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(X_i-\mu)}{1+(X_i-\mu)^2}.$$

Lygties $\dot{\ell}(\mu) = 0$ sprendinį $\hat{\mu}$ galime rasti iteracijų metodu. Antroji išvestinė ir Fišerio informacija

$$\ddot{\ell}(\mu) = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+(X_i-\mu)^2} - \frac{2}{(1+(X_i-\mu)^2)^2}\right),$$

$$i(\mu) = -\mathbf{E}_{\mu}\left(\frac{2}{1+(X_i-\mu)^2} - \frac{4}{(1+(X_i-\mu)^2)^2}\right) = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{y^2-1}{(1+y^2)^2}dy =$$

$$\mid \text{keitimas } y = \operatorname{tg} z \mid = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^4 z(\operatorname{tg}^2 z - 1)dz = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1+2\cos 2z + \cos 4z)dz = 1/2.$$

Kadangi μ yra mediana, tai egzistuoja jos pagrįstas įvertinys – empirinė mediana. Remiantis 3.5.8 pastaba, egzistuoja pagrįstoji lygties $\dot{\ell}(\mu) = 0$ sprendinių seka.

Patikrinsime visas teoremos prielaidas:

1) parametro reikšmių aibė $\mathbf{R}$ atvira;
2) su visais $x \in \mathbf{R}$ išvestinės

$$\dot{p}(x,\mu) = \frac{2}{\pi}\ \frac{x-\mu}{(1+(x-\mu)^2)^2}, \quad \ddot{p}(x,\mu) = \frac{2}{\pi}\ \frac{3(x-\mu)^2-1}{(1+(x-\mu)^2)^3}$$

tolydžios pagal μ visoje šio parametro reikšmių srityje $\mathbf{R}$;
3)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\dot{p}(x,\mu)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(1+y^2)^2}dy = 0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\ddot{p}(x,\mu)dx = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{3y^2-1}{(1+y^2)^3}dy = 0.$$

4) $\boldsymbol{i}(\mu) = 0,5 > 0$;
5)

$$\dddot{\ell}_1(x,\mu) = \frac{4(x-\mu)}{(1+(x-\mu)^2)^2} - \frac{16(x-\mu)}{(1+(x-\mu)^2)^3},$$

taigi

$$\mid \dddot{\ell}_1(x,\mu) \mid \le \frac{4\mid x-\mu\mid}{(1+(x-\mu)^2)^2}\left(1+\frac{4}{1+(x-\mu)^2}\right)$$
$$\le \frac{20\mid x-\mu\mid}{(1+(x-\mu)^2)^2} \le \frac{20\mid x-\mu\mid}{1+(x-\mu)^2} \le 10.$$

Remiantis 3.5.7 pastaba, sąlyga 5) tenkinama.

Taigi visos 3.5.2 teoremos prielaidos teisingos ir įvertinys $\hat{\mu}$ asimptotiškai efektyvusis ir normalusis:

$$\sqrt{n}(\hat{\mu}-\mu) \xrightarrow{d} Z \sim N(0,\ 2).$$

Kaip minėta, kitas galimas įvertinys yra empirinė mediana $\tilde{X}$. Jos asimptotinė dispersija (žr. 2.4 skyrelį) yra $\pi^2/4$. Taigi $\tilde{X}$ ASE, palyginti su DT įvertiniu $\hat{\mu}$, yra $E_{21} = 8/\pi^2$.

Pereikime prie daugiamačio parametro. Primename, kad kvadratinės matricos $A = (a_{ij})_{n\times n}$ norma vadinamas skaičius $\| A \| = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)^{1/2}$. Taigi tokių matricų sumos norma $\| A_1 + \ldots A_n \| \le \| A_1 \| + \cdots + \| A_n \|$.

3.5.3 teorema. *Tarkime, kad atsitiktiniai vektoriai $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę vienodos dimensijos r, $\mathbf{X}_i \sim p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$, ir:*

1) aibė $\boldsymbol{\Theta}$ atvira;

2) beveik su visais $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^r$ parametro $\boldsymbol{\theta}$ tikrosios reikšmės $\boldsymbol{\theta}_0$ aplinkoje $V_\rho = \{\boldsymbol{\theta} : ||\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0|| \leq \rho\}$ egzistuoja tolydžios išvestinės

$$\dot{p}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\theta}) = (\frac{\partial}{\partial \theta_1} p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\theta}), \ldots, \frac{\partial}{\partial \theta_m} p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\theta}))^T,$$

$$\ddot{p}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\theta}) \right]_{m \times m};$$

3) aplinkoje V_ρ galima du kartus diferencijuoti po integralo ženklu, t. y.

$$\int_{\mathbf{R}^r} \dot{p}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\theta}) \mu(d\boldsymbol{y}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \int_{\mathbf{R}^r} p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\theta}) \mu(d\boldsymbol{y}) = \mathbf{0},$$

$$\int_{\mathbf{R}^r} \ddot{p}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\theta}) \mu(d\boldsymbol{y}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \int_{\mathbf{R}^r} \dot{p}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\theta}) \mu(d\boldsymbol{y}) = \mathbf{0};$$

4) Fišerio informacinė matrica teigiamai apibrėžta taške $\boldsymbol{\theta}_0$, t. y. $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}_0) = n\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0) > 0$;

5) egzistuoja tokios neneigiamos funkcijos h ir b, kad beveik su visais $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^r$ ir visais $\boldsymbol{\theta} \in V_\rho$

$$|| \, \ddot{\ell}_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\theta}) - \ddot{\ell}_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\theta}_0) \, || \leq h(\boldsymbol{y}) \, b(\boldsymbol{\theta}), \quad \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\{h(\mathbf{X}_1)\} < \infty, \quad b(\boldsymbol{\theta}_0) = 0,$$

o funkcija b tolydi taške $\boldsymbol{\theta}_0$.

Tada egzistuoja tokia a. d. seka $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_n\}$, kad

$$\mathbf{P}(\dot{\ell}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = 0) \to 1, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{\theta}_0 \tag{3.5.23}$$

ir

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z} \sim N_m(0, \boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)). \tag{3.5.24}$$

3.5.9 pastaba. Kai $b(\boldsymbol{\theta}) = || \, \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0 \, ||$, tai teoremos 5) sąlyga tenkinama, jei aplinkoje V_ρ egzistuoja funkcijos $\ell_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\theta})$ trečiosios eilės dalinės išvestinės ir beveik su visais $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}$ ir visais $\boldsymbol{\theta} \in V_\rho$

$$| \, \frac{\partial^3}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} \ell_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\theta}) \, | \leq h(\boldsymbol{y}), \quad \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\{h(\mathbf{X}_1)\} < \infty, \quad i, j, k = 1, \ldots, m.$$

Be to, iš lygybių $\dot{p} = \dot{\ell} p$ ir $\ddot{p} = \ddot{\ell} p + \dot{\ell} \dot{\ell}^T p$ išplaukia, kad 3) sąlygos ekvivalenčios sąlygoms

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\dot{\ell}) = 0, \quad \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\dot{\ell} \dot{\ell}^T) = -\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\ddot{\ell})$$

su visais $\theta \in V_\rho$.

Teoremos įrodymas. 1) *Pagrįstumas.* Imkime seką $c_n = n^\nu$, $0 < \nu < 1/2$ ir $\boldsymbol{\theta}_0$ aplinką

$$B_n(\boldsymbol{\theta}_0) = \{\boldsymbol{\theta} : (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)^T \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) \le \delta_n^2\}, \quad \delta_n = c_n/\sqrt{n}. \tag{3.5.25}$$

Pagal 4) sąlygą matrica $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)$ teigiamai apibrėžta, todėl

$$k = \inf_{\boldsymbol{\theta}:||\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0||=\rho} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)^T \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) > 0.$$

Iš čia išplaukia, kad egzistuoja toks $N = N(\rho) > 0$, kad $c_n^2/n < k$ ir $B_n(\boldsymbol{\theta}_0) \subset V_\rho$, kai $n > N$.

Taigi su dideliais n teoremos sąlygos $B_n(\boldsymbol{\theta}_0)$ aplinkoje yra tenkinamos. Šios aplinkos kraštas yra elipsoidas $C_{\delta_n} = \{\boldsymbol{\theta} : (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)^T \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) = \delta_n^2\}$.

Parodysime, kad

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left\{\sup\nolimits_{\boldsymbol{\theta}\in C_{\delta_n}} \ell(\boldsymbol{\theta}) - \ell(\boldsymbol{\theta}_0) < 0\right\} \to 1, \quad \text{kai} \quad n \to \infty. \tag{3.5.26}$$

Dėl bet kurio $\boldsymbol{\theta} \in C_{\delta_n}$ užrašykime Teiloro formulę:

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) - \ell(\boldsymbol{\theta}_0) = \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)^T(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)^T \ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}^*)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0), \tag{3.5.27}$$

čia $\boldsymbol{\theta}^* = \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})$ yra taškas ant atkarpos tarp $\boldsymbol{\theta}$ ir $\boldsymbol{\theta}_0$.

Iš pradžių parodysime, kad tolygiai aibėje C_{δ_n}

$$\frac{1}{n}\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}^*) = \frac{1}{n}\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathrm{o}_P(\mathbf{1}), \tag{3.5.28}$$

t. y. $\frac{1}{n}\sup_{\{\boldsymbol{\theta}\in C_{\delta_n}\}}(\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}^*) - \ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)) \xrightarrow{P} 0$. Tai matyti iš 5) sąlygos ir normos $||A||$ savybių:

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0} \left|\left| \frac{1}{n}\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}^*) - \frac{1}{n}\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) \right|\right| \le \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0} \left|\left| \ddot{\ell}_1(\boldsymbol{\theta}^*) - \ddot{\ell}_1(\boldsymbol{\theta}_0) \right|\right|$$

$$\le \sup\nolimits_{\boldsymbol{\theta}\in B_n(\boldsymbol{\theta}_0)} b(\boldsymbol{\theta}) \ \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0} h(\mathbf{X}_1) \to b(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0} h(\mathbf{X}_1) = 0.$$

Remiantis didžiųjų skaičių dėsniu

$$\frac{1}{n}\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ddot{\ell}_1(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{X}_i) \xrightarrow{P} -\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0), \tag{3.5.29}$$

nes $\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)$ – suma n. v. p. atsitiktinių vektorių, kurių vidurkiai yra $-\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)$. Iš šio konvergavimo ir (3.5.28) lygybės gauname

$$\frac{1}{n}\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}^*) = -\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathrm{o}_P(1). \tag{3.5.30}$$

Tada, remiantis (3.5.27) formule, tolygiai aibėje C_{δ_n}

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) - \ell(\boldsymbol{\theta}_0) = \dot{\ell}^T(\boldsymbol{\theta}_0)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) - \frac{n}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)^T \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) + \mathrm{o}_P(1)$$

$$= \dot{\ell}^T(\boldsymbol{\theta}_0)(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0) - \frac{c_n^2}{2} + \mathrm{o}_P(1), \qquad (3.5.31)$$

Taigi

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\{\sup_{\boldsymbol{\theta}\in C_{\delta_n}} \ell(\boldsymbol{\theta})-\ell(\boldsymbol{\theta}_0) < 0\} \geq \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\{\sup_{\boldsymbol{\theta}\in C_{\delta_n}} \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)^T(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0) + \mid \mathrm{o}_P(1) \mid < \frac{c_n^2}{2}\}$$

$$\geq \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\{\sup_{\boldsymbol{\theta}\in C_{\delta_n}} \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)^T(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0) < \frac{c_n^2}{4}, \mid \mathrm{o}_P(1) \mid < \frac{c_n^2}{4}\}$$

$$\geq 1 - \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left\{\sup_{\boldsymbol{\theta}\in C_{\delta_n}} \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)^T(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0) \geq \frac{c_n^2}{4}\right\} - \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left\{\mid \mathrm{o}_P(1) \mid \geq \frac{c_n^2}{4}\right\}. \qquad (3.5.32)$$

Kadangi su visais $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^m$

$$\sup_{\boldsymbol{\mu}\in \boldsymbol{R}^m, ||\boldsymbol{\mu}||=1} \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\mu} = || \boldsymbol{a} ||,$$

tai

$$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in C_{\delta_n}} \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)^T(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0) = c_n \sup_{\boldsymbol{\theta}\in C_{\delta_n}} \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \boldsymbol{I}^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{I}^{1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0)/c_n$$

$$\leq c_n \sup_{\boldsymbol{\mu}\in \boldsymbol{R}^m, ||\boldsymbol{\mu}||=1} \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \boldsymbol{I}^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\mu} = c_n \mid\mid \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \boldsymbol{I}^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mid\mid . \qquad (3.5.33)$$

Prisiminus Čebyšovo nelygybę,

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left\{|| \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \boldsymbol{I}^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) || \geq c_n/4\right\} \leq (4/c_n)^2 \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}(|| \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \boldsymbol{I}^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) ||^2)$$

$$= (4/c_n)^2\, \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0} \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)$$

$$= (4/c_n)^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m I_{ij} I^{ij} = (4/c_n)^2 m; \qquad (3.5.34)$$

čia I_{ij} ir I^{ij} yra matricų $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}_0)$ ir $\boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)$ elementai.

Imkime $\delta > 0$. Egzistuoja toks $M = M(\delta) > N > 0$, kad su visais $n > M$ $m(4/c_n)^2 < \delta/2$ ir kartu

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left\{|| \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{\theta}_0}^{-1/2} || \geq c_n/4\right\} < \delta/2. \qquad (3.5.35)$$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left\{\mid \mathrm{o}_P(1) \mid \geq \frac{c_n^2}{4}\right\} < \delta/2. \qquad (3.5.36)$$

Iš (3.5.32), (3.5.33), (3.5.35) ir (3.5.36) formulių išplaukia (3.5.26) konvergavimas.

Iš nelygybės $\sup_{\boldsymbol{\theta}\in C_{\delta_n}} \ell(\boldsymbol{\theta}) - \ell(\boldsymbol{\theta}_0) < 0$ gauname, kad tolydžiai diferencijuojama aibėje $V_\rho \supset B_n(\boldsymbol{\theta}_0)$ funkcija $\ell(\boldsymbol{\theta})$ ant srities $B_n(\boldsymbol{\theta}_0)$ krašto C_{δ_n} įgyja reikšmes, mažesnes už reikšmę taške $\boldsymbol{\theta}_0 \in B_n(\boldsymbol{\theta}_0)$, todėl egzistuoja toks $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \in B_n(\boldsymbol{\theta}_0)$, kad $\dot{\ell}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = 0$. Taigi

$$\mathbf{P}\{\exists\, \hat{\boldsymbol{\theta}}_n : \dot{\ell}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \mathbf{0}, \quad || \hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0 || < \delta_n\} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{\theta}_0.$$

2) *Įvertinių $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ asimptotinis normalumas.* Integruodami reiškinius kairiojoje ir dešiniojoje lygybės

$$\frac{\partial}{\partial t}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0 + t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)) = \ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0 + t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0))(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)$$

pusėse pagal t intervale $[0, 1]$, gauname

$$-\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) = \int_0^1 \ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0 + t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0))dt\ (\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0). \tag{3.5.37}$$

Parodysime, kad integralas asimptotiškai ekvivalentus $\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)$. Iš 5) sąlygos išplaukia

$$\frac{1}{n} \mid\mid \int_0^1 \ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0 + t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0))dt - \ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) \mid\mid \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int_0^1 \mid\mid \ddot{\ell}_i(\boldsymbol{\theta}_0 + t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)) - \ddot{\ell}_i(\boldsymbol{\theta}_0) \mid\mid dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h(\mathbf{X}_i) \int_0^1 b(\boldsymbol{\theta}_0 + t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0))dt. \tag{3.5.38}$$

Pirmas daugiklis nelygybės dešinėje yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių baigtinio vidurkio atsitiktinių dydžių empirinis vidurkis. Todėl, remiantis didžiųjų skaičių dėsniu,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h(\mathbf{X}_i) \xrightarrow{P} \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0} h(\mathbf{X}_1) < \infty. \tag{3.5.39}$$

Parodysime, kad antrasis daugiklis konverguoja pagal tikimybę į 0. Iš funkcijos b tolydumo taške $\boldsymbol{\theta}_0$ ir sąlygos $b(\boldsymbol{\theta}_0) = 0$ gauname, kad su visais $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $\Delta = \Delta(\varepsilon)$, kad $b(\boldsymbol{\theta}) < \varepsilon$, jei $\mid \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0 \mid < \Delta$. Su visais $t \in [0, 1]$

$$\mid \hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0 \mid < \Delta \quad \Rightarrow \quad b(\boldsymbol{\theta}_0 + t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 b(\boldsymbol{\theta}_0 + t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0))dt < \varepsilon.$$

Taigi

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left\{\int_0^1 b(\boldsymbol{\theta}_0 + t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0))dt \geq \varepsilon\right\} \leq \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\{\mid\mid \hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0 \mid\mid \geq \Delta\} \to 0, \tag{3.5.40}$$

nes įvertinys $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ pagrįstas. Iš (3.5.39) ir (3.5.40) konvergavimų ir nelygybės (3.5.38) gauname, kad

$$\frac{1}{n}\int_0^1 \ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0 + t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0))dt = \frac{1}{n}\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) + o_P(1) = -\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0) + o_P(1). \tag{3.5.41}$$

Pasinaudojus (3.5.37) ir (3.5.41)lygybėmis,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) = (\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0) + o_P(1)))\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0). \tag{3.5.42}$$

Atsitiktinis vektorius $\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)=\sum_{i=1}^n \dot{\ell}_i(\boldsymbol{\theta}_0,\mathbf{X}_i)$ yra suma v. p. n. vektorių, kurių vidurkiai nuliniai ir kovariacinė matrica yra $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)$. Remdamiesi CRT,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)\xrightarrow{d}\boldsymbol{Y}\sim N_m(\mathbf{0},\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)). \tag{3.5.43}$$

Iš čia, (3.5.42) lygybės ir a. d. sekų konvergavimo savybių ([15], 2c skyrelis) išplaukia

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n-\boldsymbol{\theta}_0)=(\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)+\mathrm{o}_P(1))^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)\xrightarrow{d}\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{Y}\sim N_m(0,\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)). \tag{3.5.44}$$

Pasinaudoję (3.5.44) lygybe, gauname ir įverčių $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ asimptotinį efektyvumą:

$$\sqrt{n}[\hat{\boldsymbol{\theta}}_n-\boldsymbol{\theta}_0-\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\frac{1}{n}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)]=\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)\left[(\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)+\mathrm{o}_P(1))^{-1}-\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\right]\xrightarrow{P}0.$$

▲

3.5.10 pastaba. Ir daugiamačiam parametrui galioja 3.5.8 pastaba.

3.5.1 išvada. *Jei tenkinamos teoremos sąlygos, tai*

$$-(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n-\boldsymbol{\theta}_0)^T\ddot{\ell}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n-\boldsymbol{\theta}_0)\xrightarrow{d}\chi^2_m. \tag{3.5.45}$$

Įrodymas. Pasinaudoję (3.5.44) lygybe, gauname

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n-\boldsymbol{\theta}_0)^T n\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n-\boldsymbol{\theta}_0)\xrightarrow{d}\chi^2_m. \tag{3.5.46}$$

Iš teoremos 5) sąlygos gauname

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\,||\,\frac{1}{n}(\ddot{\ell}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)-\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0))\,||\le\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\,||\,\ddot{\ell}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)-\ddot{\ell}_1(\boldsymbol{\theta}_0)\,||\le\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}h(\mathbf{X}_1)\,b(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)\to 0,$$

todėl

$$\frac{1}{n}\ddot{\ell}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)=\ddot{\ell}_1(\boldsymbol{\theta}_0)+\mathrm{o}_P(\mathbf{1})=-\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)+\mathrm{o}_P(\mathbf{1}). \tag{3.5.47}$$

Vadinasi, išvada teisinga.

3.5.2 išvada. Jei tenkinamos teoremos sąlygos, tai

$$\dot{\ell}^T(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)\xrightarrow{d}\chi^2_m,\quad -\dot{\ell}^T(\boldsymbol{\theta}_0)\ddot{\ell}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)\xrightarrow{d}\chi^2_m,$$

$$-\dot{\ell}^T(\boldsymbol{\theta}_0)\ddot{\ell}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)\xrightarrow{d}\chi^2_m. \tag{3.5.48}$$

Įrodymas. Konvergavimas išplaukia iš (3.5.43) ir (3.5.47) formulių.

3.5.3 išvada. Jei egzistuoja funkcijos $\boldsymbol{\gamma}:\boldsymbol{\Theta}\to G\subset\mathbf{R}^k$ tolydžios dalinės pirmosios eilės išvestinės, tenkinamos teoremos sąlygos ir $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n=\boldsymbol{\gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$, tai

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n-\boldsymbol{\gamma}_0)\xrightarrow{d}\boldsymbol{Z}\sim N_k(\mathbf{0},\dot{\boldsymbol{\gamma}}^T(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\theta}_0)),$$

čia $\boldsymbol{\gamma}_0$ yra tikroji parametro $\boldsymbol{\gamma}$ reikšmė, ir

$$\dot{\gamma}(\boldsymbol{\theta}_0) = \left[\frac{\partial \gamma_i(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \theta_j}\right]_{m\times k}.$$

Įrodymas. Rezultatas išplaukia iš delta metodo (žr 2.4 skyrelis).

3.5.4 išvada. Jei tenkinamos 3.5.3 išvados sąlygos, tai

$$-(\hat{\gamma}_n - \boldsymbol{\gamma}_0)^T \left\{\dot{\boldsymbol{\gamma}}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)\ddot{\ell}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)\dot{\gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)\right\}^{-1}(\hat{\gamma}_n - \boldsymbol{\gamma}_0) \xrightarrow{d} \chi^2_k.$$

Įrodymas. Iš 3.5.3 išvados gauname, kad

$$\sqrt{n}(\hat{\gamma}_n - \boldsymbol{\gamma}_0)^T \left\{\dot{\boldsymbol{\gamma}}^T(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\dot{\gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)\right\}^{-1}\sqrt{n}(\hat{\gamma}_n - \boldsymbol{\gamma}_0) \xrightarrow{d} \chi^2_k. \tag{3.5.49}$$

Funkcija $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ tolydi, todėl

$$\dot{\gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \dot{\gamma}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathrm{o}_P(\mathbf{1}). \tag{3.5.50}$$

Be to, $\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) = -\ddot{\ell}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)/n + \mathrm{o}_P(\mathbf{1})$. Taigi išvada teisinga.

3.5.5 išvada. Jei tenkinamos teoremos sąlygos ir $1 \le j_1 < \cdots < j_k \le m$, tai

$$(\hat{\theta}_{j_1} - \theta_{j_1 0}, \dots, \hat{\theta}_{j_k} - \theta_{j_k 0})^T A^{-1}_{j_1\dots j_k}(\hat{\theta}_{j_1} - \theta_{j_1 0}, \dots, \hat{\theta}_{j_k} - \theta_{j_k 0}) \xrightarrow{d} \chi^2_k; \tag{3.5.51}$$

čia $A_{j_1\dots j_k}$ yra matricos $-\ddot{\ell}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ dalinė matrica, sudaryta iš elementų, esančių $(j_1,\dots,j_k)$-ųjų eilučių ir $(j_1,\dots,j_k)$-ųjų stulpelių sankirtoje.

Įrodymas. Iš tikrųjų, imkime $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = (\gamma_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,\gamma_k(\boldsymbol{\theta}))^T = (\theta_{j_1},\dots,\theta_{j_k})^T$. Tada $\partial\gamma_i(\boldsymbol{\theta}_0)/\partial\theta_l = 1$, jei $l = j_i$, ir $\partial\gamma_i(\boldsymbol{\theta}_0)/\partial\theta_l = 0$ – kitais atvejais. Taigi

$$-\dot{\boldsymbol{\gamma}}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)\ddot{\ell}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)\dot{\gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = A_{j_1\dots j_k}.$$

3.5.10 pavyzdys. *Veibulo skirstinio parametrų DT įvertinių asimptotinis normalumas ir efektyvumas.* Tegu paprastoji atsitiktinė imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X_i \sim W(\sigma,\ \nu)$. Turime statistinį modelį

$$p(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{\nu}{\sigma^\nu}x^{\nu-1}\exp\{-(x/\sigma)^\nu\}, \quad x \ge 0, \quad \boldsymbol{\theta}^T = (\sigma,\nu) \in (0,\infty)\times(0,\infty).$$

Rasime parametro $\boldsymbol{\theta}$ DT įvertinį. Tikėtinumo funkcija

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\nu}{\sigma}\right)^n \prod_{i=1}^n (X_i/\sigma)^{\nu-1}\exp\{-\sum_{i=1}^n (X_i/\sigma)^\nu\},$$

jos logaritmas

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = n(\ln\nu - \ln\sigma) + (\nu-1)\sum_{i=1}^n(\ln X_i - \ln\sigma) - \sum_{i=1}^n (X_i/\sigma)^\nu.$$

Tada

$$\dot{\ell}_\sigma(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n\nu}{\sigma} + \frac{\nu}{\sigma}\sum_{i=1}^n (X_i/\sigma)^\nu,$$

$$\dot{\ell}_\nu(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n}{\nu} + \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \ln \sigma) - \sum_{i=1}^n (X_i/\sigma)^\nu (\ln X_i - \ln \sigma).$$

Iš čia gauname DT įvertinius:

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{\hat{\nu}} \right)^{1/\hat{\nu}},$$

o $\hat{\nu}$ tenkina lygtį

$$\frac{1}{\hat{\nu}} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i - \sum_{i=1}^n \frac{X_i^{\hat{\nu}} \ln X_i}{\sum\limits_{i=1}^n X_i^{\hat{\nu}}} = 0.$$

Antrosios eilės dalinės išvestinės yra:

$$\ddot{\ell}_{\sigma^2}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n\nu}{\sigma^2} - \frac{\nu(\nu+1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i/\sigma)^\nu,$$

$$\ddot{\ell}_{\sigma\nu}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n ((X_i/\sigma)^\nu - 1) + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n (X_i/\sigma)^\nu \ln(X_i/\sigma)^\nu,$$

$$\ddot{\ell}_{\nu^2}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^n (X_i/\sigma)^\nu \ln^2 (X_i/\sigma)^\nu.$$

Pažymėkime $Y_i = (X_i/\sigma)^\nu$. Atsitiktinis dydis Y_i turi standartinį eksponentinį skirstinį, kurio tankis yra e^{-y} intervale $(0, \infty)$ ir $\mathbf{E}Y_i = 1$. Jei tenkinamos teoremos prielaidos, tai matricos $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}) = [i_{kl}(\boldsymbol{\theta})]_{2\times 2}$ elementai yra tokie:

$$i_{11}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbf{E}\ddot{\ell}_{1\sigma^2}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbf{E}\{\frac{\nu}{\sigma^2} - \frac{\nu(\nu+1)}{\sigma^2} Y_i\} = \frac{\nu^2}{\sigma^2},$$

$$i_{12}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbf{E}\ddot{\ell}_{1\sigma\nu}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbf{E}\{\frac{1}{\sigma}(Y_i - 1) + \frac{1}{\sigma} Y_i \ln Y_i\} = -\frac{1}{\sigma} \int_0^\infty y \ln y \mathrm{e}^{-y} dy = -\frac{\Gamma'(2)}{\sigma},$$

$$i_{22}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbf{E}\ddot{\ell}_{1\nu^2}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbf{E}\{-\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^2} Y_i \ln^2 Y_i\} = \frac{1}{\nu^2}(1 + \Gamma''(2)).$$

Parametrų σ ir ν momentų metodo įvertiniai randami iš lygčių

$$g_1(\sigma, \nu) = \bar{X}, \quad g_2(\sigma, \nu) = \bar{X}^2 + a_2^2;$$

čia

$$g_1(\sigma, \nu) = \sigma\Gamma(1 + \frac{1}{\nu}), \quad g_2(\sigma, \nu) = \sigma^2 \Gamma(1 + \frac{2}{\nu}).$$

Funkcijos g_i tolydžiai diferencijuojamos aibėje $(0, \infty) \times (0, \infty)$. Jakobianas

$$J(\sigma, \nu) = (g_1)'_\sigma (g_2)'_\nu - (g_2)'_\sigma (g_1)'_\nu = \frac{2\sigma^2}{\nu^2} [\Gamma'(1+\beta)\Gamma(1+2\beta) - \Gamma'(1+2\beta)\Gamma(1+\beta)];$$

čia $\beta = 1/\nu$. Parodysime, kad $J(\sigma, \nu) \neq 0$ su visais $\sigma, \nu > 0$.

Tarkime, atvirkščiai, kad $J(\sigma, \nu) = 0$ su kokiu nors $\nu > 0$. Tada su kokiu nors $\beta > 0$

$$\frac{\Gamma'(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta)} = \frac{\Gamma'(1+2\beta)}{\Gamma(1+2\beta)}.$$

Pažymėkime $\psi(u) = \Gamma'(u)/\Gamma(u)$. Iš prielaidos $\psi(1+\beta) = \psi(1+2\beta)$ išplaukia, kad egzistuoja toks $u \in (1+\beta, 1+2\beta)$, su kuriuo

$$\psi'(u) = \frac{\Gamma''(u)\Gamma(u) - (\Gamma'(u))^2}{\Gamma^2(u)} = 0.$$

Tai ekvivalentu lygybei

$$\frac{1}{\Gamma(u)} \int_0^\infty x^{u-1} \ln^2 x \mathrm{e}^{-x} dx - \left(\frac{1}{\Gamma(u)} \int_0^\infty x^{u-1} \ln x \mathrm{e}^{-x} dx \right)^2 = 0.$$

Kairiojoje lygybės pusėje yra teigiama a.d. $\ln X$ dispersija (čia $X \sim G(1,u)$). Gavome prieštarą, todėl prielaida apie jakobiano lygybę nuliui buvo neteisinga.

Remiantis atvirkštinės funkcijos teorema, egzistuoja tokios tolydžiai diferencijuojamos funkcijos h_1 ir h_2, kad momentų įvertiniai yra pavidalo $\tilde\sigma = h_1(\bar X, a_2)$, $\tilde\nu = h_2(\bar X, a_2)$. Empiriniai momentai yra pagrįstieji teorinių momentų įvertiniai, todėl ir $\tilde\sigma$ bei $\tilde\nu$ yra pagrįstieji parametrų σ ir μ įvertiniai.

Patikrinsime visas 3.5.3 teoremos prielaidas.

1) parametro reikšmių aibė $\boldsymbol{\Theta} = (0,\infty)\times(0,\infty)$ atvira.

2) su visais $x \in \mathbf{R}$ išvestinės $\dot p = \dot\ell_1 p$ ir $\ddot p = \ddot\ell_1 p + \dot\ell_1\dot\ell_1^T p$ tolydžios pagal $\boldsymbol{\theta}$ visoje šio parametro reikšmių srityje $\mathbf{R}$.

3) turint omenyje 3.5.9 pastabą, reikia įrodyti, kad $\mathbf{E}_{\boldsymbol\theta}(\dot\ell_1) = 0$, $\mathbf{E}_{\boldsymbol\theta}(\dot\ell_1\dot\ell_1^T) = -\mathbf{E}_{\boldsymbol\theta}(\ddot\ell_1)$. Informančių vidurkiai

$$\mathbf{E}\dot\ell_{1\sigma} = -\frac{\nu}{\sigma} + \frac{\nu}{\sigma}\mathbf{E}Y_i = 0,$$

$$\mathbf{E}\dot\ell_{1\nu} = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu}\mathbf{E}(\ln Y_i) - \frac{1}{\nu}\mathbf{E}(Y_i\ln Y_i) = \frac{1}{\nu}(1 + \int_0^\infty (1-y)\ln y \mathrm{e}^{-y}dy)$$
$$= \frac{1}{\nu}(1 + \int_0^\infty \ln y \, d(y\mathrm{e}^{-y})) = \frac{1}{\nu}(1 - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}dy) = 0.$$

Reikia parodyti, kad $\mathbf{E}(\dot\ell_1\dot\ell_1^T) = -\mathbf{E}\ddot\ell_1$. Vidurkį $-\mathbf{E}\ddot\ell_1 = \boldsymbol{i}(\boldsymbol\theta)$ jau radome. Informančių kovariacijos

$$\mathbf{E}(\dot\ell^2_{1\sigma}) = \frac{\nu^2}{\sigma^2}\mathbf{E}(-1+Y_1)^2 = \frac{\nu^2}{\sigma^2}\boldsymbol{V}(Y_1) = \frac{\nu^2}{\sigma^2} = -\mathbf{E}(\ddot\ell_{1\sigma^2}(\boldsymbol\theta)).$$

$$\mathbf{E}(\dot\ell_{1\sigma}\dot\ell_{1\nu}) = \frac{1}{\sigma}\mathbf{E}\{(-1+Y_1^2)(1+\ln Y_1 - Y_1\ln Y_1) = \frac{1}{\sigma}\int_0^\infty (-1+2y-y^2)\ln y \,\mathrm{e}^{-y}dy$$
$$= \frac{1}{\sigma}(-\int_0^\infty \ln y\,\mathrm{e}^{-y}dy + \int_0^\infty \ln y\, d(y^2\mathrm{e}^{-y})dy) = -\frac{1}{\sigma}\int_0^\infty (\ln y + 1)\,\mathrm{e}^{-y}dy$$
$$= \frac{1}{\sigma}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}d(y\ln y) = -\int_0^\infty y\ln y\,\mathrm{e}^{-y}dy = -\mathbf{E}(\ddot\ell_{1\sigma\nu}(\boldsymbol\theta)).$$

$$\mathbf{E}(\dot\ell^2_{1\nu}) = \frac{1}{\nu^2}\mathbf{E}(1+\ln Y_1 - Y_1\ln Y_1)^2 = \frac{1}{\nu^2}\int_0^\infty ((1-2y+y^2)\ln^2 y + (2-2y)\ln y)\,\mathrm{e}^{-y}dy$$
$$= \frac{1}{\nu^2}\int_0^\infty ((1-2y+y^2)\ln^2 y\,\mathrm{e}^{-y}dy + (1-y)y\,\mathrm{e}^{-y}d\ln^2 y) = -\mathbf{E}(\ddot\ell_{1\nu^2}(\boldsymbol\theta)).$$

4) matrica $\boldsymbol{i}(\boldsymbol\theta)$ teigiamai apibrėžta su visomis $\boldsymbol\theta$ reikšmėmis, nes

$$\det \boldsymbol{i}(\boldsymbol\theta) = i_{11}(\boldsymbol\theta)i_{22}(\boldsymbol\theta) - i_{12}^2(\boldsymbol\theta) = \mathbf{E}\{1 + Y_i\ln^2 Y_i\} - (\mathbf{E}\{Y_i\ln Y_i\})^2.$$

Pasinaudojus Koši nelygybe,

$$(\mathbf{E}\{Y_i\ln Y_i\})^2 = (\mathbf{E}\{\sqrt{Y_i}\sqrt{Y_i}\ln Y_i\})^2 \le \mathbf{E}\{Y_i\}\mathbf{E}\{Y_i\ln^2 Y_i\} < \mathbf{E}\{1 + Y_i\ln^2 Y_i\}.$$

5) visos informantės $\ell_1(x,\boldsymbol\theta)$ trečiosios eilės išvestinės yra tokio pavidalo

$$\sum_{j=0}^4 C_j(\boldsymbol\theta)x^\nu \ln^{j-1}x,$$

kad bet kurioje pakankamai mažoje taško $\boldsymbol\theta_0 \in \boldsymbol\Theta$ aplinkoje $B_\varepsilon(\boldsymbol\theta_0)$ funkcijos C_j tolygiai aprėžtos konstanta, sakykime, K. Jei ν_1 ir ν_2 yra parametro μ reikšmių atitinkamai infimumas ir supremumas, kai parametras $\boldsymbol\theta$ kinta aplinkoje $B_\varepsilon(\boldsymbol\theta_0)$, tai

$$|\sum_{j=0}^4 C_j(\boldsymbol\theta)x^\nu \ln^{j-1}x| \le K\,h(x);$$

čia $h(x) = \sum_{j=0}^4 (x^{\nu_1} + x^{\nu_2})\,|\ln^{j-1}x|$. Aišku, kad $\mathbf{E}_{\boldsymbol\theta_0}h(X_1) < \infty$.

Vadinasi, 5) sąlyga tenkinama.

Iš teoremos išplaukia, kad DT įvertinys asimptotiškai efektyvusis ir

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z} \sim N_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)).$$

3.5.11 pavyzdys. *Eksponentinės skirstinių šeimos DT įvertiniai.* Tarkime, kad imtis $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^T, ..., \mathbf{X}_n^T)^T$ gauta stebint vienodai pasiskirsčiusius atsitiktinius r-mačius vektorius $\mathbf{X}_i$. Kiekvieno vektoriaus skirstinys priklauso k-matei eksponentinių skirstinių šeimai, kurių tikimybinis tankis σ-baigtinio mato μ atžvilgiu yra

$$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta}) = h(\boldsymbol{x}) \exp\{\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) - B(\boldsymbol{\theta})\}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^p, \quad \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m, \tag{3.5.52}$$

čia $\boldsymbol{\Theta}$ atvira erdvės $\mathbf{R}^m$ aibė. Rasime parametro $\boldsymbol{\theta}$ DT įvertinį. Tikėtinumo funkcija turi pavidalą:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} h(\mathbf{X}_i) \exp\{\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{T}^{(n)}(\mathbf{X}) - nB(\boldsymbol{\theta})\};$$

čia

$$\boldsymbol{T}^{(n)}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{T}(\mathbf{X}_i).$$

Tikėtinumo funkcijos logaritmas

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \ln h(\mathbf{X}_i) + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{T}^{(n)}(\mathbf{X}) - nB(\boldsymbol{\theta})$$

ir informančių vektorius

$$\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{T}^{(n)}(\mathbf{X}) - n\dot{B}(\boldsymbol{\theta}).$$

Iš čia gauname, kad DT įvertiniai tenkina lygtis

$$\dot{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \frac{1}{n}\boldsymbol{T}^{(n)}(\mathbf{X}).$$

Antrosios eilės išvestinių matrica

$$\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}) = -n\ddot{B}(\boldsymbol{\theta}).$$

Matrica $\ddot{B}(\boldsymbol{\theta})$ yra neigiamai apibrėžta, nes remiantis 3.3.2 teorema $B(\boldsymbol{\theta})$ yra iškila funkcija. Taigi DT lygčių sistema turi vienintelį sprendinį, todėl lieka patikrinti 3.5.3 teoremos prielaidas.

1) parametro reikšmių aibė $\boldsymbol{\Theta}$ atvira.

Prielaidos 2) ir 3) išplaukia iš 3.3.2. teoremos.

4) matricos $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}) = -\ddot{B}(\boldsymbol{\theta})$ teigiamas apréžtumas išplaukia iš matricos $\ddot{B}(\boldsymbol{\theta})$ neigiamo apibrėžtumo.

5) matrica $\ddot{\ell}_1(y, \boldsymbol{\theta}) = \ddot{B}(\boldsymbol{\theta})$ nepriklauso nuo y,

$$\| \ddot{\ell}_1(y, \boldsymbol{\theta}) - \ddot{\ell}_1(y, \boldsymbol{\theta}_0) \| = \| \ddot{B}(\boldsymbol{\theta}) - \ddot{B}(\boldsymbol{\theta}_0) \| = b(\boldsymbol{\theta})$$

yra tolydi funkcija ir $b(\boldsymbol{\theta}_0) = 0$.

Vadinasi, DT įvertinys asimptotiškai efektyvus ir

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z} \sim N_m(\mathbf{0}, \boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0));$$

čia $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}) = -\ddot{B}(\boldsymbol{\theta})$.

3.5.12 pavyzdys. *Beta skirstinio parametrų DT įvertinių asimptotinis normalumas ir efektyvumas.* Tegu paprastoji atsitiktinė imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a.d. $X \sim B(\gamma,\ \eta)$. Turime statistinį modelį

$$p(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{B(\gamma, \eta)} x^{\gamma-1}(1-x)^{\eta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \boldsymbol{\theta}^T = (\gamma, \eta) \in (0, \infty) \times (0, \infty).$$

Iš analizės kurso žinoma, kad Oilerio beta funkcija $B = B(\gamma, \eta)$ turi tolydžias bet kurios eilės dalines išvestines pagal abu argumentus:

$$B_{rs} = B_{rs}(\gamma, \eta) = \frac{\partial^{r+s}}{\partial^r \gamma \partial^s \eta} B(\gamma, \eta) = \int_0^1 \ln^r x \ln^s(1-x) x^{\gamma-1}(1-x)^{\eta-1} dx.$$

Rasime parametro $\boldsymbol{\theta}$ DT įvertinį. Tikėtinumo funkcija yra

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{B^n(\gamma,\eta)} \prod_{i=1}^n X_i^{\gamma-1}(1-X_i)^{\eta-1},$$

jos logaritmas

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = (\gamma-1)\sum_{i=1}^n \ln X_i + (\eta-1)\sum_{i=1}^n \ln(1-X_i) - n\ln B(\gamma,\eta)$$

ir informančių vektorius

$$\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}) = (\sum_{i=1}^n \ln X_i - n\frac{B_{01}}{B}, \sum_{i=1}^n \ln(1-X_i) - n\frac{B_{10}}{B})^T.$$

Iš čia gauname, kad DT įvertiniai tenkina lygtis:

$$\frac{B_{01}(\gamma,\eta)}{B(\gamma,\eta)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln X_i, \quad \frac{B_{10}(\gamma,\eta)}{B(\gamma,\eta)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(1-X_i).$$

Antrosios eilės dalinių išvestinių matrica

$$\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{B^2}\begin{pmatrix} B_{20}B - B_{10}^2, & B_{11}B - B_{10}B_{01} \\ B_{11}B - B_{10}B_{01}, & B_{02}B - B_{01}^2 \end{pmatrix}.$$

Parametrų γ ir η momentų įvertiniai (žr. 3.5.2 pavyzdį)

$$\tilde{\gamma} = \bar{X}, \quad \tilde{\eta} = (1-\bar{X})\delta, \quad \delta = 1 - \frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{s^2}$$

yra pagrįsti kaip tolydžios empirinių momentų funkcijos.

Patikrinsime visas 3.5.3 teoremos prielaidas:

1) parametro reikšmių aibė $\boldsymbol{\Theta} = (0,\infty)\times(0,\infty)$ atvira.

2) su visais $x \in \mathbf{R}$ išvestinės $\dot{p} = \dot{\ell}_1 p$ ir $\ddot{p} = \ddot{\ell}_1 p + \dot{\ell}_1\dot{\ell}_1^T p$ tolydžios pagal $\boldsymbol{\theta}$ visoje šio parametro reikšmių srityje $\mathbf{R}$.

3) turint omenyje 3.5.9 pastabą, reikia įrodyti, kad $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\dot{\ell}_1) = 0$, $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\dot{\ell}_1\dot{\ell}_1^T) = -\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\ddot{\ell}_1)$. Informančių vidurkiai

$$\mathbf{E}\dot{\ell}_{1\sigma} = (\mathbf{E}\ln X_i - \frac{B_{01}}{B}, \mathbf{E}\ln(1-X_i) - \frac{B_{10}}{B})^T = (0,0)^T,$$

Vidurkius $\mathbf{E}\ddot{\ell}_1$ jau radome. Kadangi

$$\dot{\ell}_1\dot{\ell}_1^T = \begin{pmatrix} (\ln X_i - \frac{B_{01}}{B})^2, & (\ln X_i - \frac{B_{01}}{B})(\ln(1-X_i) - \frac{B_{10}}{B}) \\ (\ln X_i - \frac{B_{01}}{B})(\ln(1-X_i) - \frac{B_{10}}{B}), & (\ln(1-X_i) - \frac{B_{10}}{B})^2 \end{pmatrix},$$

tai informančių kovariacinė matrica $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\dot{\ell}_1\dot{\ell}_1^T) = -\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\ddot{\ell}_1)$.

4) matrica $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta})$ yra a. v. $(\ln X_1, \ln(1-X_1))$ kovariacinė matrica. Atsitiktinio vektoriaus komponentės nėra tiesinės viena kitos funkcijos. Jų koreliacijos koeficiento kvadratas nelygus 1, taigi matrica $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta})$ teigiamai apibrėžta su visomis $\boldsymbol{\theta}$ reikšmėmis.

5) matrica $\ddot{\ell}_1(y,\boldsymbol{\theta})$ nepriklauso nuo y,

$$||\, \ddot{\ell}_1(y,\boldsymbol{\theta}) - \ddot{\ell}_1(y,\boldsymbol{\theta}_0)\, || = ||\, \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)\, || = b(\boldsymbol{\theta})$$

yra tolydi funkcija ir $b(\boldsymbol{\theta}_0) = 0$.

Iš teoremos išplaukia, kad DT įvertinys asimptotiškai efektyvus ir

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z} \sim N_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0));$$

čia $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}) = -\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta})/n$, kurią jau apskaičiavome.

3.5.13 pavyzdys. *Polinominio skirstinio parametro DT įvertinių asimptotinis normalumas.*

Tarkime, imties $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^T, ..., \mathbf{X}_n^T)^T$ nariai yra k-mačiai a. v.

$$\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{ik})^T \sim \mathcal{P}_k(1,\ \boldsymbol{\pi}),\ \ \boldsymbol{\pi} = (\pi_1, ..., \pi_k)^T, \quad 0 < \pi_i < 1,\ \ \sum_{j=1}^{k} \pi_j = 1.$$

Tikėtinumo funkcija

$$L(\boldsymbol{\pi}) = \prod_{i=1}^{n} \pi_1^{X_{i1}} \dots \pi_k^{X_{ik}} = \pi_1^{U_1}\ \dots\ \pi_k^{U_k}; \tag{3.5.53}$$

čia $U_j = \sum_{i=1}^n X_{ij},\ j = 1, \dots, k$. Pakankamoji statistika yra

$$\boldsymbol{U} = (U_1, ..., U_k)^T \sim \mathcal{P}_k(n,\ \boldsymbol{\pi}).$$

Parametro $\boldsymbol{\pi}$ reikšmių sritis $D = \{(\pi_1, ..., \pi_k)\ :\ 0 < \pi_i < 1,\ \ \sum_{j=1}^k \pi_i = 1, \} \subset \mathbf{R}^k$ neturi nė vieno vidinio taško, taigi tiesiogiai 3.5.3 teoremos taikyti negalime. Iš sąryšio $\sum_{j=1}^k \pi_j = 1$ matyti, kad polinominis modelis $\mathcal{P}_k(1,\ \boldsymbol{\pi})$ priklauso nuo $(k-1)$-mačio parametro, pavyzdžiui, nuo $(\pi_1, ..., \pi_{k-1})^T$ (analogiškai binominiam modeliui, kurį nagrinėjame kaip vieno parametro modelį). Tada parametro reikšmių sritis $G = (0, 1)^{k-1} \subset \mathbf{R}^k$ yra atviras kubas.

Tikėtinumo funkcijos logaritmas

$$\ell(\pi_1, ..., \pi_{k-1}) = \sum_{j=1}^{k-1} U_i \ln \pi_j + U_k \ln(1 - \sum_{j=1}^{k-1} \pi_j),$$

todėl

$$\dot{\ell}_j = \frac{U_j}{\pi_j} - \frac{U_k}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \pi_j} = \frac{U_j}{\pi_j} - \frac{U_k}{\pi_k}.$$

Iš čia su visais $j, l = 1, \dots k$

$$U_j \pi_l = U_l \pi_j.$$

Susumavę reiškinius abiejose lygybės pusėse pagal l ir pasinaudoję sąryšiais $\sum_{j=1}^k \pi_j = 1$, $\sum_{j=1}^k U_j = n$, gauname $U_j = n\pi_j$, todėl DT įvertiniai

$$\hat{\pi}_i = \frac{U_i}{n},\ \ i = 1, 2, ..., k$$

(kartu įvertinamas $\pi_k = 1 - \sum_{j=1}^k \pi_j$).

Remiantis 3.3.3 teorema, įvertinio $(\hat{\pi}_1, ..., \hat{\pi}_{k-1})^T$ ribinis skirstinys yra $(k-1)$-matis normalusis. Išspręsime bendresnį uždavinį ir rasime viso vektoriaus $\boldsymbol{\pi}$ įvertinio $\hat{\boldsymbol{\pi}} = (\hat{\pi}_1, ..., \hat{\pi}_k)^T$ ribinį skirstinį, kuriuo naudosimės statistinių hipotezių tikrinimo uždaviniams spręsti.

Atsitiktinis vektorius $\boldsymbol{U} = (U_1, ..., U_k)^T$ yra suma vienodai pasiskirsčiusių n. a. v. $\mathbf{X}_i$, kurių vidurkių vektorius $\boldsymbol{\pi}$ ir kovariacinė matrica $\boldsymbol{D} = [d_{ij}]_{k\times k}$; $d_{ii} = \pi_i(1 - \pi_i)$, $d_{ij} = -\pi_i\pi_j,\ i \neq j$. Todėl galioja daugiamatė CRT:

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\pi}} - \boldsymbol{\pi}) = \frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{U} - n\boldsymbol{\pi}) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z} \sim N_k(\mathbf{0},\ \boldsymbol{D}).$$

3.5.14 pavyzdys. *Vertinimas iš grupuotųjų duomenų.* Tarkime, kad paprastosios imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ nariai X_i, kurių pasiskirstymo funkcija $F(x, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m$, nestebimi. Mus domina tiktai skaičiai $U_1, ..., U_k$ $(k > m + 1)$, $U_1 + \dots + U_k = n$, tų imties narių, kurie patenka į nesikertančius intervalus

$$(a_0,\ a_1],\ (a_1,\ a_2], ..., (a_{k-1},\ a_k),\ \ a_0 = -\infty,\ a_k = \infty.$$

Pažymėkime

$$\pi_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{X_i \in (a_{j-1},\ a_j]\} \tag{3.5.54}$$

bet kurio iš a.d. X_i patekimo į j-ąjį intervalą tikimybę, $\pi_1(\boldsymbol{\theta})+\dots+\pi_k(\boldsymbol{\theta})=1$. Taigi gauname grupuotųjų duomenų imtį

$$\boldsymbol{U}=(U_1,...,U_k)^T, \tag{3.5.55}$$

kuri nėra paprastoji.

Tarkime, kad $\pi_j(\boldsymbol{\theta})\in(0,1)$ su visais j ir $\boldsymbol{\theta}$. Pažymėkime $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta})=(\pi_1(\boldsymbol{\theta}),...,\pi_k(\boldsymbol{\theta}))^T$.

Atsitiktinio vektoriaus $\boldsymbol{U}$ skirstinys polinominis $\mathcal{P}_k(n,\boldsymbol{\pi})$, todėl tikėtinumo funkcija

$$L_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{\pi})=\frac{n!}{U_1!\dots U_k!}\pi_1^{U_1}(\boldsymbol{\theta})\dots\pi_k^{U_k}(\boldsymbol{\theta}). \tag{3.5.56}$$

Jos logaritmas

$$\ell(\boldsymbol{\pi})=c_n+\sum_{j=1}^k U_j\,v_j(\boldsymbol{\theta}),$$

čia $v_j(\boldsymbol{\theta})=\ln\pi_j(\boldsymbol{\theta})$, o c_n nepriklauso nuo $\boldsymbol{\theta}$,

$$\dot{\ell}(\boldsymbol{\pi})=\sum_{j=1}^k U_j\,\dot{v}_j(\boldsymbol{\theta}),\quad \ddot{\ell}(\boldsymbol{\pi})=\sum_{j=1}^k U_j\ddot{v}_j(\boldsymbol{\theta}),\quad \boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta})=-n\sum_{j=1}^k\pi_j(\boldsymbol{\theta})\,\ddot{v}_j(\boldsymbol{\theta}),$$

nes $\mathbf{E}U_j=n\pi_j(\boldsymbol{\theta})$. DT įvertinys $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ yra lygčių sistemos

$$\sum_{j=1}^k U_j\,\dot{v}_j(\boldsymbol{\theta})=\mathbf{0} \tag{3.5.57}$$

sprendinys.

Norėdami pritaikyti 3.5.3 teoremą, pažymėsime, kad a.v. $\boldsymbol{U}$ yra nepriklausomų a.v. suma:

$$\boldsymbol{U}=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{V}_i,\quad \boldsymbol{V}_i=(V_{i1},\dots,V_{ik})^T;$$

čia V_{ij} yra vieno a.d. X_i patekimų į intervalą $(a_{j-1},\ a_j]$ skaičius (0 arba 1).

Atsitiktiniai vektoriai $\boldsymbol{V}_i$ turi polinominį skirstinį $\mathcal{P}_k(1,\boldsymbol{\pi})$. Jeigu vietoje vektoriaus $\boldsymbol{U}$ stebėtume visus vektorius $\boldsymbol{V}_1,\dots,\ \boldsymbol{V}_n$, tai gautume imtį, sudarytą iš k-mačių a.v. Tokia ir nagrinėjama 3.5.3 teoremoje. Bet šios imties DT įvertiniai lygiai tie patys kaip ir imties $\boldsymbol{U}$, nes tikėtinumo funkcija

$$L_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{\pi})=\prod_{i=1}^n\pi_1^{V_{i1}}(\boldsymbol{\theta})\dots\pi_k^{V_{ik}}(\boldsymbol{\theta})=\pi_1^{U_1}(\boldsymbol{\theta})\dots\pi_k^{U_k}(\boldsymbol{\theta}) \tag{3.5.58}$$

skiriasi nuo $L_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{\pi})$ tiktai nepriklausančiu nuo $\boldsymbol{\theta}$ daugikliu.

Jei pradinis modelis $X_i\sim F(x,\boldsymbol{\theta})$ yra toks, kad modelis $\boldsymbol{V}_i\sim\mathcal{P}_k(1,\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}))$ tenkina 3.5.3 teoremos sąlygas, tai

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n-\boldsymbol{\theta}_0)\xrightarrow{d}\boldsymbol{Z}\sim N_m(\mathbf{0},\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0));$$

čia $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta})/n=-\sum_{j=1}^k\pi_j(\boldsymbol{\theta})\,\ddot{v}_j(\boldsymbol{\theta})$.

Apibendrinsime teoremą, kai vektoriai $\mathbf{X}_i$ nebūtinai vienodai pasiskirstę. Tarkime, $\mathbf{X}_1,\ \dots,\ \mathbf{X}_n$ yra n.a.v., $\mathbf{X}_i\sim p_i(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}\subset\mathbf{R}^m$, čia $p_i(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta})$ yra r_i-mačio ($r_i\le r$) vektoriaus $\mathbf{X}_i$ tankis σ-baigtinio mato μ atžvilgiu.

3.5.4 teorema. *Tarkime, kad:*

1) aibė $\boldsymbol{\Theta}$ atvira;

2) su visais i ir $\boldsymbol{x}_i\in\mathbf{R}^{r_i}$ tankis $p_i(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta})$ du kartus tolydžiai diferencijuojamas pagal $\boldsymbol{\theta}$ aplinkoje $V_\rho=\{\boldsymbol{\theta}:\|\ \boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0\ \|<\rho\}$;

3) aplinkoje V_ρ galima du kartus diferencijuoti $\boldsymbol{\theta}$ atžvilgiu po integralų ženklais, t. y.

$$\int_{\mathbf{R}^{r_i}} \dot{p}_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{x}_i = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \int_{\mathbf{R}^{r_i}} p_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{x}_i = \mathbf{0},$$

$$\int_{\mathbf{R}^{r_i}} \ddot{p}_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{x}_i = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \int_{\mathbf{R}^{r_i}} \dot{p}_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{x}_i = \mathbf{0};$$

4) egzistuoja teigiamai apibrėžta ribinė matrica $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}_0) = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)$;

5) egzistuoja tokios neneigiamos funkcijos h_i ir b, kad beveik su visais $\boldsymbol{x}_i \in \mathbf{R}^{r_i}$ ir visais $\boldsymbol{\theta} \in V_\rho$

$$|| \, \ddot{\ell}_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta}) - \ddot{\ell}_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta}_0) \, || \leq h_i(\boldsymbol{x}_i) \, b(\boldsymbol{\theta}), \quad \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\{\mathrm{sup}_i h_i(\mathbf{X}_i)\} < \infty, \quad b(\boldsymbol{\theta}_0) = 0,$$

o funkcija b tolydi taške $\boldsymbol{\theta}_0$.

6) egzistuoja toks $\delta > 0$, kad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0} \, || \, \ddot{\ell}_i(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\theta}_0) \, ||^{1+\delta} = 0.$$

Tada egzistuoja tokia atsitiktinių dydžių seka $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_n\}$, kad

$$\mathbf{P}\{\dot{\ell}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \mathbf{0}\} \to 1, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{\theta}_0. \tag{3.5.59}$$

7) Be to, jei

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0} \mathrm{sup}_i \, || \, \dot{\ell}_i(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\theta}_0) \, ||^{2+\delta} < \infty,$$

tai

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z} \sim N_m(\mathbf{0}, \boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)). \tag{3.5.60}$$

Įrodymas. Imkime $\boldsymbol{\theta}_0$ aplinką $B_n(\boldsymbol{\theta}_0)$, apibrėžtą (3.5.25) formule, ir jos kraštą C_{δ_n}. Kaip ir įrodant 3.5.3, iš 4) sąlygos gaunama, kad $B_n(\boldsymbol{\theta}_0) \subset V_\rho$, jei n didelis.

Su bet kuriuo $\boldsymbol{\theta} \in C_{\delta_n}$ užrašykime (3.5.27) skleidinį. Iš 5) sąlygos išplaukia

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0} \, || \, \frac{1}{n}(\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}^*) - \ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)) \, ||$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0} \, || \, \ddot{\ell}_i(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\theta}^*) - \ddot{\ell}_i(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\theta}_0) \, || \leq \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0} \mathrm{sup}_i h_i(\mathbf{X}_i) \, \mathrm{sup}_{\boldsymbol{\theta} \in B_n(\boldsymbol{\theta}_0)} b(\boldsymbol{\theta}) \to 0,$$

todėl

$$\frac{1}{n}[\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}^*) - \ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)] \xrightarrow{P} 0. \tag{3.5.61}$$

Iš 6) sąlygos ir didžiųjų skaičių dėsnio gaunama

$$-\frac{1}{n}(\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) - \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}_0)) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \{\ddot{\ell}_i(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0} \ddot{\ell}_i(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\theta}_0)\} \xrightarrow{P} 0.$$

Iš šio ir (3.5.61) konvergavimo gauname

$$-\frac{1}{n}\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}^*) = \frac{1}{n}\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathrm{o}_P(\mathbf{1}).$$

Tolesnis pagrįstumo įrodymas toks pat kaip 3.5.3 teoremos.

Įrodysime asimptotinį normalumą. Užrašykime (3.5.37) lygybę. Parodysime, kad integralas asimptotiškai ekvivalentus $\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)$:

$$\frac{1}{n} \mid\mid \int_0^1 \ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0 + t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0))dt - \ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) \mid\mid$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int_0^1 \mid\mid \ddot{\ell}_i(\boldsymbol{\theta}_0 + t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0))dt - \ddot{\ell}_i(\boldsymbol{\theta}_0) \mid\mid dt$$

$$\leq \sup_i h_i(\mathbf{X}_i) \int_0^1 b(\boldsymbol{\theta}_0 + t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0))dt.$$

Naudojantis 5) sąlyga, $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\{\sup_i h_i(\mathbf{X}_i)\} < \infty$. Taip pat, kaip 3.5.3 teoremoje, įrodoma, kad

$$\int_0^1 b(\boldsymbol{\theta}_0 + t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0))dt \xrightarrow{P} 0.$$

Taigi

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) = \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathrm{o}_p(\mathbf{1})\right)\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0). \tag{3.5.62}$$

Pažymėkime $\boldsymbol{Y}_i = \dot{\ell}_i(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\theta}_0)$. Imkime $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^m \backslash \mathbf{0}$. Tada

$$\boldsymbol{a}^T\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{Y}_i, \quad \mathbf{E}(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{Y}_i) = 0, \quad \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\boldsymbol{a}^T\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{a}.$$

Remiantis centrine ribine teorema,

$$\frac{\boldsymbol{a}^T\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)}{(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{a})^{1/2}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1), \tag{3.5.63}$$

jei tenkinama Liapunovo sąlyga [11]

$$\frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{E} \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{Y}_i \mid^{2+\delta}}{(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{a})^{1+\delta/2}} \to 0.$$

Iš nelygybės

$$\mathbf{E} \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{Y}_i \mid^{2+\delta} \leq \mid\mid \boldsymbol{a} \mid\mid^{2+\delta} \mathbf{E}\sup_i \mid\mid \boldsymbol{Y}_i \mid\mid^{2+\delta}$$

išplaukia, kad

$$\frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{E} \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{Y}_i \mid^{2+\delta}}{(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{a})^{1+\delta/2}} \leq n^{-\delta/2}\frac{\mid\mid \boldsymbol{a} \mid\mid^{2+\delta}}{(\boldsymbol{a}^T\frac{1}{n}\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{a})^{1+\delta/2}}\mathbf{E}\sup_i \mid\mid \boldsymbol{Y}_i \mid\mid^{2+\delta} \to 0,$$

nes, remiantis 7) sąlyga, vidurkis dešinėje baigtinis. Matrica $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)$ teigiamai apibrėžta, taigi

$$\boldsymbol{a}^T \frac{1}{n} \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}_0)\, \boldsymbol{a} \to \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)\, \boldsymbol{a} > 0.$$

Iš (3.5.63) konvergavimo gaunama, kad su visais $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^m \backslash \mathbf{0}$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \boldsymbol{a}^T \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} Y \sim N(0, \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0) \boldsymbol{a}),$$

ir todėl

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Y} \sim N_m(\mathbf{0}, \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)), \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{n} \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}_0) \right)^{-1} \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z} \sim N_m(\mathbf{0}, \boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)).$$

Iš (3.5.62) lygybės gauname

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{n} \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathrm{o}_P(\mathbf{1}) \right)^{-1} \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z} \sim N_m(0, \boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)).$$

Teorema įrodyta.

▲

Jei tenkinamos teoremos sąlygos, gaunamos išvados, analogiškos 3.5.1–3.5.5 išvadoms.

3.5.15 pavyzdys. *Logistinė regresija.* Tarkime, kad stebimas įvykis A, kurio įvykimo tikimybė priklauso nuo nepriklausomų kintamųjų (kovariančių) $x_1, ..., x_m$ reikšmių. Apibrėžkime atsitiktinį dydį Y, įgyjantį reikšmes 0 ir 1, tokį, kad $Y = 1$ tada ir tik tada, kai įvyksta įvykis A. Nagrinėkime tikimybę

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}\{Y = 1 | \boldsymbol{x}\} = \mathbf{P}\{A | \boldsymbol{x}\},$$

t. y. įvykio A sąlyginę tikimybę, žinodami, kad kovariantės reikšmė yra $\boldsymbol{x}$.

Logistinės regresijos modelis apibrėžiamas taip:

$$\ln \frac{\pi(\boldsymbol{x})}{1 - \pi(\boldsymbol{x})} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_m x_m = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}. \tag{3.5.64}$$

Vertinant nežinomus regresijos parametrus $\boldsymbol{\beta}$, atliekama n nepriklausomų eksperimentų, iš kurių i-asis eksperimentas atliekamas, kai kovariančių vektorius $\boldsymbol{x}^{(i)} = (x_{i0}, ..., x_{im})^T$, $x_{i0} = 1$.

Kiekvieno eksperimento metu stebimas atsitiktinis dydis

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{jei } i\text{-ojo eksperimento metu įvyksta } A, \\ 0 & \text{priešingu atveju.} \end{cases}$$

Atsitiktiniai dydžiai $Y_1, , ..., Y_n$ yra nevienodai pasiskirstę ir turi sąlyginius Bernulio skirstinius

$$(Y_i | \boldsymbol{x}^{(i)}) \sim B(1, \pi_i(\boldsymbol{\beta})), \quad \pi_i(\boldsymbol{\beta}) = \pi(\boldsymbol{x}^{(i)},\ \boldsymbol{\beta}) = \pi(\boldsymbol{x}^{(i)}).$$

Tikėtinumo funkcija yra

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{n} [\pi_i(\boldsymbol{\beta})]^{Y_i} [1 - \pi_i(\boldsymbol{\beta})]^{1 - Y_i}. \tag{3.5.65}$$

Jos logaritmas

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i \ln \frac{\pi_i(\boldsymbol{\beta})}{1 - \pi_i(\boldsymbol{\beta})} + \ln(1 - \pi_i(\boldsymbol{\beta})) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}^{(i)} - \ln(1 + \mathrm{e}^{\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}^{(i)}})),$$

informančių vektorius

$$\dot{\ell}(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}^{(i)}[Y_i - \pi_i(\boldsymbol{\beta})].$$

Fišerio informacinė matrica

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{X}^T \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{X};$$

čia

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{10} & \dots & x_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n0} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \pi_1(\boldsymbol{\beta})(1-\pi_1(\boldsymbol{\beta})) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \pi_n(\boldsymbol{\beta})(1-\pi_n(\boldsymbol{\beta})) \end{pmatrix}.$$

Patikrinsime visas 3.5.4 teoremos prielaidas.

1) parametro $\boldsymbol{\beta}$ reikšmių aibė $\mathbf{R}^{m+1}$ atvira.

2) su visais $y \in \{0;\ 1\}$ funkcijos

$$p_i(y, \boldsymbol{\beta}) = \frac{\mathrm{e}^{y\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}^{(i)}}}{1 + \mathrm{e}^{\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}^{(i)}}}$$

turi tolydžias pirmosios ir antrosios eilių išvestines pagal parametrą $\boldsymbol{\beta}$ visoje šio parametro reikšmių srityje $\mathbf{R}^{m+1}$.

3) remiantis 3.5.9 pastaba, reikia įrodyti, kad $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\beta}}(\dot{\ell}_i) = 0$, $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\beta}}(\dot{\ell}_i \dot{\ell}_i^T) = -\mathbf{E}_{\boldsymbol{\beta}}(\ddot{\ell}_i)$. Taigi

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\beta}} \dot{\ell}_i = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\beta}} (\boldsymbol{x}^{(i)})^T (Y_i - \pi_i(\boldsymbol{\beta})) = 0,$$

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\beta}}(\dot{\ell}_i \dot{\ell}_i^T) = \boldsymbol{x}^{(i)}(\boldsymbol{x}^{(i)})^T \pi_i(\boldsymbol{\beta})(1-\pi_i(\boldsymbol{\beta}))\mathbf{E}_{\boldsymbol{\beta}}(Y_i - \pi_i(\boldsymbol{\beta}))^2$$
$$= \boldsymbol{x}^{(i)}(\boldsymbol{x}^{(i)})^T \pi_i(\boldsymbol{\beta})(1-\pi_i(\boldsymbol{\beta})) = -\mathbf{E}_{\boldsymbol{\beta}}(\ddot{\ell}_i).$$

4) imant tiesiškai nepriklausomus kovariančių vektorius $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ matricos $\mathbf{I}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{X}^T \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{X}$ rangas yra $m+1$. Teoremos prielaida teisinga, jei egzistuoja to paties rango riba $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\beta}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\beta})$. Pavyzdžiui, jei $m = 1$, o kovariantė yra dichotominė, t. y. $x^{(i)} = (1,1)^T, i = 1, \dots, n_1$, $x^{(i)} = (1,0)^T, i = n_1, \dots, n_1 + n_2 = n$, tai

$$\pi_i(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\mathrm{e}^{\beta_0+\beta_1}}{1+\mathrm{e}^{\beta_0+\beta_1}}, \quad i = 1, \dots, n_1, \quad \pi_i(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\mathrm{e}^{\beta_0}}{1+\mathrm{e}^{\beta_0}}, \quad i = n_1 + 1, \dots, n.$$

Jei $n_1/n \to l_1 \in [0,1], \quad n_2/n \to l_2 \in [0,1]$, tai

$$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\beta}) = \|\ i_{kl}\ \|, \quad i_{11}(\boldsymbol{\beta}) = l_1 \frac{\mathrm{e}^{\beta_0+\beta_1}}{(1+\mathrm{e}^{\beta_0+\beta_1})^2} + l_2 \frac{\mathrm{e}^{\beta_0}}{(1+\mathrm{e}^{\beta_0})^2},$$

$$i_{12}(\boldsymbol{\beta}) = i_{21}(\boldsymbol{\beta}) = i_{22}(\boldsymbol{\beta}) = l_1 \frac{\mathrm{e}^{\beta_0+\beta_1}}{(1+\mathrm{e}^{\beta_0+\beta_1})^2},$$

$$\det \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\beta}) = l_1 l_2 \frac{\mathrm{e}^{\beta_0}\mathrm{e}^{\beta_0+\beta_1}}{(1+\mathrm{e}^{\beta_0})^2(1+\mathrm{e}^{\beta_0+\beta_1})^2}.$$

Taigi šiuo atveju 4) sąlyga tenkinama, jei $l_1 \neq 0,\ 1$, t. y. objektų, stebimų, kai kovariantės reikšmė lygi 1, proporcija turi artėti į skaičių iš intervalo $(0,1)$. Praktiškai teoremą galima taikyti ir dideliems n, jei objektų, stebimų esant vienai kovariantės reikšmei, skaičius nedominuoja tarp visų stebėjimų.

5)

$$\|\ \ddot{\ell}_i(y_i, \boldsymbol{\beta}) - \ddot{\ell}_i(y_i, \boldsymbol{\beta}_0)\ \| \leq b(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{I}(\boldsymbol{\beta}_0) \to 0.$$

6) sąlyga tenkinama, jei

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} \sum_{i=1}^{n} \|\ \boldsymbol{x}^{(i)}(\boldsymbol{x}^{(i)})^T\ \|^{1+\delta}\ \pi_i^{1+\delta}(\boldsymbol{\beta})(1-\pi_i(\boldsymbol{\beta}))^{1+\delta} = 0.$$

Pavyzdžiui, jei $m = 1$, o kovariantė yra dichotominė, tai ši sąlyga užrašoma

$$\frac{1}{n^\delta}\left[\frac{n_1}{n}\left(\frac{2\mathrm{e}^{\beta_0+\beta_1}}{(1+\mathrm{e}^{\beta_0+\beta_1})^2}\right)^{1+\delta} + \frac{n_2}{n}\left(\frac{\mathrm{e}^{\beta_0}}{(1+\mathrm{e}^{\beta_0})^2}\right)^{1+\delta}\right] \to 0, \quad \text{kai} \quad n \to \infty.$$

Ji akivaizdžiai teisinga.

7) sąlyga užrašoma

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\beta}_0}\sup_i \| \dot{\ell}_i(Y_i, \boldsymbol{\beta}_0) \|^{2+\delta} = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\beta}_0}\sup_i \| \boldsymbol{x}^{(i)} \|^{2+\delta} |Y_i - \pi_i(\boldsymbol{\beta})|^{2+\delta} < \infty.$$

Pavyzdžiui, jei $m = 1$, o kovariantė yra dichotominė, tai ši sąlyga akivaizdžiai teisinga, nes tada

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\beta}_0}\sup_i \| \boldsymbol{x}^{(i)} \|^{2+\delta} |Y_i - \pi_i(\boldsymbol{\beta})|^{2+\delta} \leq 2^{1+\delta/2}[\mathbf{E}_{\boldsymbol{\beta}_0}|Y_1 - \mathbf{E}_{\boldsymbol{\beta}_0}(Y_1)|^{2+\delta} + \cdots$$
$$+\mathbf{E}_{\boldsymbol{\beta}_0}|Y_n - \mathbf{E}_{\boldsymbol{\beta}_0}(Y_n)|^{2+\delta}] < \infty.$$

Iš teoremos išplaukia, kad DT įvertinys asimptotiškai efektyvusis ir $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ skirstinys aproksimuojamas normaliuoju dėsniu:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \simeq \boldsymbol{Z} \sim N_{m+1}(\beta, \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\beta})). \tag{3.5.66}$$

3.5.4. Tikėtinumų santykio asimptotinės savybės

Tarkime, kad turime imtį

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^T, \ldots, \mathbf{X}_n^T)^T,$$

$\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ yra n. a. v., $\mathbf{X}_i \sim f_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m$, čia $f_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta})$ yra r_i-mačio vektoriaus $\mathbf{X}_i$ tankis σ-baigtinio mato μ atžvilgiu.

Šiame skyrelyje gautais rezultatais naudosimės sudarydami statistinių hipotezių tikrinimo kriterijus.

Tikrinant paprastąją hipotezę $H : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$, naudinga tokia teorema.

3.5.5 teorema. *Jei tenkinamos 3.5.3 arba 3.5.4 teoremų sąlygos, tai*

$$-2\ln \frac{L(\boldsymbol{\theta}_0)}{L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)} \xrightarrow{d} \chi^2(m). \tag{3.5.67}$$

Įrodymas. Užrašome Teiloro formulę:

$$\ell(\boldsymbol{\theta}_0) - \ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_n)(\boldsymbol{\theta}_0 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_n) + \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)^T \ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}^*)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)^T \frac{1}{n}\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}^*)\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0),$$

čia $\boldsymbol{\theta}^*$ yra taškas atkarpos, jungiančios $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ ir $\boldsymbol{\theta}_0$. Tada

$$\| \boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\theta}_0 \| \leq \| \hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0 \| \xrightarrow{P} 0,$$

taigi $\boldsymbol{\theta}^* \xrightarrow{P} \boldsymbol{\theta}_0$.

Kaip ir 3.5.3 (arba 3.5.4) teoremos įrodyme,

$$\frac{1}{n}\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}^*) - \frac{1}{n}\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{P} 0. \tag{3.5.68}$$

Taigi

$$\frac{1}{n}\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}^*) = \frac{1}{n}\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) + o_P(1) = -\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0) + o_P(1).$$

ir

$$-2(\ell(\boldsymbol{\theta}_0) - \ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)) = \sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)^T \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) + o_P(1). \qquad (3.5.69)$$

Iš konvergavimo

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z} \sim N_m(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0))$$

išplaukia, kad

$$-2(\ell(\boldsymbol{\theta}_0) - \ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z}^T \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{Z} \sim \chi^2(m).$$

Teorema įrodyta.

▲

Teoremą galima pritaikyti, pavyzdžiui, tikrinant hipotezę

$$H_0: \mu = \mu_0, \quad \sigma^2 = \sigma_0^2,$$

jei turima paprastoji imtis iš normaliojo skirstinio $X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \ i = 1, ..., n.$

Dažnai tikrinamos sudėtingesnės hipotezės.

3.5.16 pavyzdys. *Hipotezė dėl dalies daugiamačio parametro komponenčių reikšmių:*

$$H: (\theta_{j_1}, \ldots, \theta_{j_k}) = (\theta_{j_1 0}, \ldots, \theta_{j_k 0}), \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m;$$

čia $\theta_{j_1 0}, \ldots, \theta_{j_k 0}$ žinomi skaičiai.

Pavyzdžiui, jei nagrinėjamas tiesinės regresijos modelis, kuriame kintamojo Y vidurkis užrašomas kovariančių $x_1, \ldots, x_m$ tiesine funkcija

$$\mathbf{E}(Y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m,$$

čia koeficientai $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ nežinomi, tai galima tikrinti hipotezę, kad kai kurios iš kovariančių nedaro įtakos priklausomo kintamojo vidurkiui, t. y. kad kai kurie iš nežinomų koeficientų lygūs nuliui: $H_0: (\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_k}) = (0, \ldots, 0)$.

Tarus, kad $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, galima tikrinti hipotezę $H_1: \mu = \mu_0$.

3.5.17 pavyzdys. *Daugiamačio parametro komponenčių lygybės hipotezė:*

$$H: \theta_1 = \theta_2.$$

Pavyzdžiui, tarkime, kad $X_i = (X_{1i}, X_{2i})^T$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a. v. su nepriklausomomis komponentėmis, $X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Galima tikrinti vidurkių arba dispersijų lygybės hipotezes:

$$H_1: \mu_1 = \mu_2; \quad H_2: \sigma_1 = \sigma_2.$$

3.5.18 pavyzdys. *Skirstinio normalumo hipotezė.* Tarkime, kad V_j yra skaičiai paprastosios imties $X_1, \ldots, X_n$ elementų, patenkančių į nesikertančius intervalus $I_j = [a_{j-1}, a_j)$, $-\infty = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = \infty$. Remiantis imtimi $V_1, \ldots, V_m$, tikrinama hipotezė $H: X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbf{R}$, $\sigma^2 > 0$, kad atsitiktinių dydžių X_i skirstiniai yra normalieji.

Atsitiktinio vektoriaus $(V_1, \ldots, V_m)^T$ skirstinys yra polinominis:

$$(V_1, \ldots, V_m) \sim \mathcal{P}_m(n, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, 1 - \theta_1 - \cdots - \theta_{m-1}),$$

$$\theta_j = F(a_j) - F(a_{j-1}) \quad (j = 1, \ldots, m-1).$$

Hipotezė H gali būti teisinga tik tuo atveju, jei teisinga hipotezė

$$H_0: \theta_i = \Phi\left(\frac{a_i - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - \mu}{\sigma}\right), \quad (\mu, \sigma) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \quad (i = 1, \ldots, m); \qquad (3.5.70)$$

čia $\Phi(x)$ yra standartinio normaliojo skirstinio pasiskirstymo funkcija.

Tarkime, kad parametro $\boldsymbol{\theta}$ dimensija yra m. Reikia pažymėti, kad visos pavyzdžiuose aprašytos hipotezės gali būti užrašomos šitaip

$$H : \boldsymbol{\theta} = \varphi(\boldsymbol{\lambda}), \ \boldsymbol{\lambda} \in G; \tag{3.5.71}$$

čia $\varphi : G \to \boldsymbol{\Theta}$ atvaizduoja mažesnės už m dimensijos sritį G į sritį $\boldsymbol{\Theta}$.

Iš tikro, kai hipotezė $H : (\theta_{j_1}, \ldots, \theta_{j_k}) = (\theta_{j_1 0}, \ldots, \theta_{j_k 0})$ (žr. 3.5.14 pavyzdį) teisinga, yra tik $m-k$ nežinomų parametrų $\theta_{s_1}, \ldots, \theta_{s_{m-k}}$; čia $s_1, \ldots s_{m-k}$ – indeksai, papildantys $\{j_1, \ldots j_k\}$ iki $(1, \ldots, m)$.

Pažymėkime $\boldsymbol{\lambda} = (\theta_{s_1}, \ldots, \theta_{s_{m-k}})^T$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)^T$,

$$\varphi_i(\boldsymbol{\lambda}) = \theta_{i0}, \quad \text{kai} \quad i = j_1, \ldots, j_k, \quad \varphi_i(\boldsymbol{\lambda}) = \theta_i, \quad \text{kai} \quad i = s_1, \ldots, s_{m-k}.$$

Tada hipotezė H užrašoma (3.5.71) forma.

Kai hipotezė $H : \theta_1 = \theta_2$ (žr. 3.5.15 pavyzdį) teisinga, yra $m-1$ nežinomas parametras $\theta_2, \ldots, \theta_m$. Pažymėkime $\boldsymbol{\lambda} = (\theta_2, \ldots, \theta_m)^T$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$,

$$\varphi_1(\boldsymbol{\lambda}) = \theta_2, \quad \varphi_j(\boldsymbol{\lambda}) = \theta_j, \quad \text{kai} \quad j = 2, \ldots, m.$$

Tada hipotezė H užrašoma (3.5.71) pavidalu.

Kai hipotezė H_0, kuri apibrėžiama 3.5.70 forma, teisinga, yra tik du nežinomi parametrai μ ir σ. Pažymėkime $\boldsymbol{\lambda} = (\mu, \sigma)^T$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)^T$,

$$\varphi_j(\boldsymbol{\lambda}) = \Phi\left(\frac{a_j - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a_{j-1} - \mu}{\sigma}\right), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Tada hipotezė H užrašoma (3.5.71) pavidalu.

Šioms hipotezėms tikrinti naudinga tokia teorema.

3.5.6 teorema. *Tarkime, kad tenkinamos 3.5.3 ar 3.5.4 teoremos sąlygos,* $\mathbf{X} \sim f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m$, *ir*

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = \{\boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\theta} = \varphi(\boldsymbol{\lambda}), \ \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{G}\}, \quad \boldsymbol{G} \subset \mathbf{R}^{m-k}, \quad k < m;$$

čia $\varphi : \boldsymbol{G} \to \Theta$ *yra tolydžiai diferencijuojamas atvaizdis. Jei* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \boldsymbol{\Theta}_0$, *tai*

$$R = -2 \ln \frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0} L(\boldsymbol{\theta})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}} L(\boldsymbol{\theta})} \xrightarrow{d} \chi^2(k), \quad n \to \infty.$$

Įrodymas. Teisingos lygybės

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0} L(\boldsymbol{\theta}) = \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{G}} L(\varphi(\boldsymbol{\lambda})) = \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{G}} L^*(\boldsymbol{\lambda});$$

čia $L^*(\boldsymbol{\lambda}) = L(\varphi(\boldsymbol{\lambda}))$. Atsitiktinis dydis $L^*(\boldsymbol{\lambda})$ yra statistinio modelio

$$X_i \sim f^*(x, \boldsymbol{\lambda}), \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{G}, \tag{3.5.72}$$

čia $f^*(x, \boldsymbol{\lambda}) = f(x, \varphi(\boldsymbol{\lambda}))$, tikėtinumo funkcija.

Iš (3.5.62) lygybės išplaukia, kad

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) = \boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathrm{o}_P(1). \tag{3.5.73}$$

Iš čia ir (3.5.69) lygybės gauname

$$\begin{aligned} 2(\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) - \ell(\boldsymbol{\theta}_0)) &= \sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)^T \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) + \mathrm{o}_P(1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathrm{o}_P(1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathrm{o}_P(1). \end{aligned} \tag{3.5.74}$$

Analogiškai pažymėję $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n$ (3.5.72) modelio parametro $\boldsymbol{\lambda}$ DT įvertį ir $\ell^* = \ln L^*$, gauname

$$2(\ell^*(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n) - \ell^*(\boldsymbol{\lambda}_0)) = \frac{1}{\sqrt{n}}(\dot{\ell}^*(\boldsymbol{\lambda}_0))^T(\boldsymbol{i}^*(\boldsymbol{\lambda}_0))^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}^*(\boldsymbol{\lambda}_0) + \mathrm{o}_P(1). \tag{3.5.75}$$

Informančių vektorius

$$\dot{\ell}^*(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial \ell^*(\boldsymbol{\lambda})}{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\partial \ell(\varphi(\boldsymbol{\lambda}))}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{\lambda})\dot{\ell}(\varphi(\boldsymbol{\lambda}));$$

čia $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\lambda}) = \dot{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})$. Taške $\boldsymbol{\lambda}_0 : \boldsymbol{\theta}_0 = \varphi(\boldsymbol{\lambda}_0)$

$$\dot{\ell}^*(\boldsymbol{\lambda}_0) = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{\lambda}_0)\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0). \tag{3.5.76}$$

Iš (3.5.74)–(3.5.76) lygybių išplaukia

$$2(\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) - \ell^*(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n)) = \frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}^T(\boldsymbol{\theta}_0)\{\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)$$

$$-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\lambda}_0)(\boldsymbol{i}^*)^{-1}(\boldsymbol{\lambda}_0)\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{\lambda}_0)\}\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathrm{o}_P(1).$$

Fišerio informacinės matricos $\boldsymbol{i}^*$ reikšmė taške $\boldsymbol{\lambda}_0$ lygi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}^*(\boldsymbol{\lambda}_0) &= \mathbf{E}_{\boldsymbol{\lambda}_0}\dot{\ell}^*(\boldsymbol{\lambda}_0)(\dot{\ell}^*)^T(\boldsymbol{\lambda}_0) = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{\lambda}_0)\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)\dot{\ell}^T(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\lambda}_0) \\ &= \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{\lambda}_0)\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\lambda}_0). \end{aligned} \tag{3.5.77}$$

Iš konvergavimo

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)) \tag{3.5.78}$$

gaunamaa, kad

$$2(\ell(\mathbf{X}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_n) - \ell^*(\mathbf{X}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n)) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z}^T\{\boldsymbol{i}^{-1} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^T\}\boldsymbol{Z}. \tag{3.5.79}$$

Ribinis atsitiktinis dydis yra normaliųjų atsitiktinių dydžių kvadratinė forma. Pasinaudosime tikimybių teorijos rezultatu, kad jei $\boldsymbol{Y} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ ir $\boldsymbol{B\Sigma B} = \boldsymbol{B}$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{B\Sigma}) = k$, tai $\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{BY} \sim \chi^2_k$. Nagrinėjamu atveju

$$(\boldsymbol{i}^{-1} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{i}(\boldsymbol{i}^{-1} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^T) = \boldsymbol{i}^{-1} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^T$$

$$+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{i}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{i}^{-1} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^T,$$

nes, remiantis (3.5.77) lygybe, $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{i}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}^*$. Pažymėkime $\mathbf{E}_k$ vienetinę $k \times k$ matricą. Rangas

$$\mathrm{tr}((\boldsymbol{i}^{-1} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{i}) = \mathrm{tr}(\mathbf{E}_m - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{i}) =$$

$$= m - \mathrm{tr}((\boldsymbol{i}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{i}\boldsymbol{A}) = m - \mathrm{tr}(\mathbf{E}_{m-k}) = k.$$

Iš čia gaunamas teoremos rezultatas.

▲

3.5.6 išvada Jei tenkinamos teoremos sąlygos, tai

$$-\dot{\ell}^T(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)\ddot{\ell}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)\dot{\ell}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n) \xrightarrow{d} \chi^2_k, \tag{3.5.80}$$

čia $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n = \varphi(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n)$. Taigi $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n$ yra įvertinys, maksimizuojantis tikėtinumo funkciją $L_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}_n)$ pagal $\boldsymbol{\theta}$ aibėje $\boldsymbol{\Theta}_0$:

$$L_{\boldsymbol{X}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n) = \sup\nolimits_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_0} L_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}) = \sup\nolimits_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{G}} L_{\boldsymbol{X}}(\varphi(\boldsymbol{\lambda})).$$

Įrodymas. Kadangi $\varphi(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n) \xrightarrow{P} \varphi(\boldsymbol{\lambda}_0) = \boldsymbol{\theta}_0$, tai

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\varphi(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n)) = \frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathrm{o}_P(\mathbf{1}), \tag{3.5.81}$$

$$n\ddot{\ell}^{-1}(\varphi(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n)) = -\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathrm{o}_P(\mathbf{1}). \tag{3.5.82}$$

Iš šių lygybių, sąlygos $\dot{\ell}^*(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n) = \mathbf{0}$ ir (3.5.79) konvergavimo gaunama, kad

$$\dot{\ell}^T(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)\ddot{\ell}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)\dot{\ell}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n) = \dot{\ell}^T(\varphi(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n))\ddot{\ell}_n^{-1}(\varphi(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n))\dot{\ell}(\varphi(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n))$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}^T(\varphi(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n))\boldsymbol{i}^{-1}(\varphi(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n))\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\varphi(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n)) - \frac{1}{\sqrt{n}}(\dot{\ell}^*)^T(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n)(\boldsymbol{i}^*)^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n)\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}^*(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n)$$

$$+\mathrm{o}_P(\mathbf{1}) = -\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}^T(\varphi(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n))\{\boldsymbol{i}^{-1}(\varphi(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n)) - \boldsymbol{A}^T(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n)(\boldsymbol{i}^*)^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n)\boldsymbol{A}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n)\}\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\varphi(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_n))$$

$$+\mathrm{o}_P(\mathbf{1}) = -\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}^T(\boldsymbol{\theta}_0)\{\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\lambda}_0)(\boldsymbol{i}^*)^{-1}(\boldsymbol{\lambda}_0)\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{\lambda}_0)\}\frac{1}{\sqrt{n}}\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathrm{o}_P(\mathbf{1})$$

$$\xrightarrow{d} \boldsymbol{Z}^T\{\boldsymbol{i}^{-1} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^T\}\boldsymbol{Z}.$$

Teoremoje įrodyta, kad ribinis atsitiktinis dydis $\boldsymbol{Z}^T\{\boldsymbol{I}_1^{-1} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^T\}\boldsymbol{Z} \sim \chi^2_k$

▲

3.5.11 pastaba. Panagrinėsime svarbų (3.5.80) konvergavimo atvejį, kai $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n$ randamas iš sąlygos

$$L_{\boldsymbol{X}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \sup_{\boldsymbol{\theta}:\boldsymbol{\theta}^{(1)}=\boldsymbol{\theta}_0^{(1)}} L_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta});$$

čia $\boldsymbol{\theta}^{(1)} = (\theta_{j_1}, \ldots, \theta_{j_k})^T$, o $\{j_1, \ldots j_k\}$ yra indeksų aibės $\{1, \ldots m\}$ poaibis, $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m$ (žr. 3.5.14 pavyzdį). Pažymėję $A_{j_1 \ldots j_k}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)$ dalinę $-\ddot{\ell}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)$ matricą, esančią $(j_1, \ldots, j_k)$-ųjų eilučių ir $(j_1, \ldots, j_k)$-ųjų stulpelių sankirtoje, gauname

$$(\dot{\ell}_{j_1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n), \ldots, \dot{\ell}_{j_k}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n))^T A_{j_1 \ldots j_k}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)(\dot{\ell}_{j_1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n), \ldots, \dot{\ell}_{j_k}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)) \xrightarrow{d} \chi^2_k$$

Įrodymas. Pažymėkime $s_1, \ldots s_{m-k}$ indeksus, papildančius $\{j_1, \ldots j_k\}$ iki $(1, \ldots, m)$. Šiuo atveju $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\theta}^{(2)} = (\theta_{s_1}, \ldots, \theta_{s_{m-k}})^T$, $\varphi_i(\boldsymbol{\lambda}) = \theta_{i0}$, kai $i = j_1, \ldots, j_k$, $\varphi_i(\boldsymbol{\lambda}) = \theta_i$, kai $i = s_1, \ldots, s_{m-k}$. Tada

$$\dot{\ell}_i(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\ell(\boldsymbol{\theta}) \quad (i = 1 \ldots, m), \quad \dot{\ell}^*_i(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\ell(\boldsymbol{\theta}_0^{(1)}, \boldsymbol{\theta}^{(2)}) \quad (i = s_1, \ldots, s_{n-k}).$$

Kadangi $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n = (\boldsymbol{\theta}_0^{(1)}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{(2)})$ ir su visais $i = s_1, \ldots, s_{n-k}$

$$\dot{\ell}_i(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n) = \dot{\ell}^*_i(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{(2)}) = 0,$$

tai

$$\dot{\ell}^T(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)\ddot{\ell}_n^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)\dot{\ell}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n) = (\dot{\ell}_{j_1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n), \ldots, \dot{\ell}_{j_k}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n))^T A_{j_1 \ldots j_k}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)(\dot{\ell}_{j_1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n), \ldots, \dot{\ell}_{j_k}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)). \tag{3.5.83}$$

Iš čia gaunamas ieškomas rezultatas.

▲

3.6. Intervaliniai parametrų įvertiniai

3.6.1. Pasikliovimo sritys ir intervalai

Tarkime, kad turime imtį $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$, $\mathbf{X} \sim \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m$ ir sprendžiame parametro $\boldsymbol{\theta}$ funkcijos $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}) \in G \subset \mathbf{R}^k$ vertinimo uždavinį.

3.6.1 apibrėžimas. Parametro $\boldsymbol{\gamma}$ pasikliovimo lygmens Q *pasikliovimo sritimi* vadinama atsitiktinė aibė $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}(\mathbf{X})$, priklausanti nuo imties $\mathbf{X}$, kurios reikšmės $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ yra aibės G Borelio poaibiai, tokia, kad su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{C}(\mathbf{X})\} \geq Q. \tag{3.6.1}$$

Dažniausiai naudojamos artimos 1 Q reikšmės $0,9$; $0,95$, $0,99$ ir pan.

3.6.1 pastaba. Atsitiktinė sritis $\boldsymbol{C}(\mathbf{X})$, apibrėžta imtimi $\mathbf{X}$, su didele tikimybe padengia tikrąją parametro $\boldsymbol{\gamma}$ reikšmę. Praktiškai pasikliovimo sritį galima paaiškinti taip. Įsivaizduokime hipotetinę situaciją, kad, nagrinėdami vieną modelį, turime labai daug imčių $\mathbf{X}_1 = (X_{11}, \ldots, X_{1n})^T, \ldots, \mathbf{X}_N = (X_{N1}, \ldots, X_{Nn})^T$ ir pagal kiekvieną iš jų sudarome pasikliovimo sritį $\boldsymbol{C}(\mathbf{X}_i)$, $i = 1, ..., N$, pasirinkę pasikliovimo lygmenį $Q = 0,95$. Tada pasikliovimo sričių realizacijų $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}_1), \ldots, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}_N)$, uždengiančių tikrąją parametro reikšmę $\boldsymbol{\gamma}$, dalis artės prie skaičiaus, ne mažesnio už $0,95$, kai $N \to \infty$. Taigi klaida daroma (realizacija $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}_i)$ nedengia tikrosios reikšmės) mažiau negu 5 procentų atvejų.

Konkrečią sritį $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ galime interpretuoti tiktai kaip atsitiktinės srities $\boldsymbol{C}(\mathbf{X})$, dengiančios tikrąją parametro $\boldsymbol{\gamma}$ reikšmę su tikimybe, ne mažesne už Q, realizaciją. Taigi galima tikėtis, kad neatsitiktinė sritis $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ uždengs parametrą $\boldsymbol{\gamma}$, nes ne mažiau kaip $100\,Q$ procentų $\boldsymbol{C}(\mathbf{X})$ realizacijų jį padengia.

Kai γ vienmatis, pasikliovimo sritis dažniausiai yra intervalas $(\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$; čia $\underline{\gamma} = \underline{\gamma}(\mathbf{X})$, $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(\mathbf{X})$ yra statistikos $\underline{\gamma} \leq \bar{\gamma}$, kurių reikšmės yra aibėje $\overline{G} \subset \mathbf{R}$.

3.6.2 apibrėžimas. Parametro $\gamma = \gamma(\boldsymbol{\theta}) \in G \subset \mathbf{R}$ pasikliovimo lygmens Q *pasikliovimo intervalu*, vadinamas toks atsitiktinis intervalas $(\underline{\gamma}, \bar{\gamma}) = (\underline{\gamma}(\mathbf{X}), \bar{\gamma}(\mathbf{X}))$, kad su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\gamma(\boldsymbol{\theta}) \in (\underline{\gamma}(\mathbf{X}), \bar{\gamma}(\mathbf{X}))\} \geq Q. \tag{3.6.2}$$

Statistikos $\underline{\gamma}$ ir $\bar{\gamma}$ vadinamos pasikliovimo intervalo apatiniu ir viršutiniu pasikliovimo rėžiais. Kartais tikslinga nagrinėti vienpusius pasikliovimo intervalus $(-\infty,\ \bar{\gamma})$ arba $(\underline{\gamma},\ \infty)$.

3.6.3 apibrėžimas. Statistika $\underline{\gamma}$ $(\bar{\gamma})$ vadinama parametro γ lygmens Q_1 (Q_2) *apatiniu (viršutiniu) pasikliovimo rėžiu*, jei su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\underline{\gamma} < \gamma\} \geq Q_1 \quad (\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\gamma < \bar{\gamma}\} \geq Q_2). \tag{3.6.3}$$

Intervalas $(-\infty,\ \bar{\gamma})$ vadinamas *apatiniu*, o $(\underline{\gamma},\ \infty)$ – *viršutiniu* pasikliovimo intervalu.

3.6.2 pastaba. Jeigu $\underline{\gamma}$ ir $\bar{\gamma}$ yra apatinis ir viršutinis pasikliovimo rėžiai, kai pasikliovimo lygmenys yra Q_1 ir Q_2, tai $(\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$ yra pasikliovimo intervalas, kai pasikliovimo lygmuo $Q = Q_1 + Q_2 - 1$. Dažniausiai naudojami simetriniai intervalai, kai $Q_1 = Q_2$. Tada $Q = 2Q_1 - 1$.

Taigi sudarant pasikliovimo intervalą, kurio pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - \alpha$, reikia imti apatinį ir viršutinį pasikliovimo rėžius, kai pasikliovimo lygmuo $(1 + Q)/2 = 1 - \alpha/2$.

3.6.2. Pasikliovimo sričių (intervalų) klasifikavimas

Kai yra tas pats imties didumas ir pasikliovimo lygmuo, galima sudaryti daug pasikliovimo sričių. Todėl reikia kriterijų, kuriais remdamiesi iš šių sričių galėtume išskirti tam tikru požiūriu geresnes sritis.

3.6.4 apibrėžimas. Parametro $\boldsymbol{\theta}$ pasikliovimo lygmens Q pasikliovimo sritis $\boldsymbol{C}(\mathbf{X})$, vadinama *nepaslinktąja*, jei

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\boldsymbol{\theta}_1 \in \boldsymbol{C}(\mathbf{X})\} \leq Q,\ \ \forall\, \boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{\theta}_1 \in \boldsymbol{\Theta}; \tag{3.6.4}$$

čia $\boldsymbol{\theta}$ tikroji parametro reikšmė, o $\boldsymbol{\theta}_1$ – bet kuris aibės $\boldsymbol{\Theta}$ taškas, nelygus $\boldsymbol{\theta}$.

3.6.5 apibrėžimas. Parametro $\boldsymbol{\theta}$ pasikliovimo lygmens Q pasikliovimo sritis $\boldsymbol{C}(\mathbf{X})$, vadinama *tolygiai tiksliausia*, jeigu su bet kuria kita to paties pasikliovimo lygmens sritimi $\tilde{\boldsymbol{C}}(\mathbf{X})$ yra teisinga nelygybė

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\boldsymbol{\theta}_1 \in \boldsymbol{C}(\mathbf{X})\} \le \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\boldsymbol{\theta}_1 \in \tilde{\boldsymbol{C}}(\mathbf{X})\}, \ \ \forall\, \boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{\theta}_1 \in \boldsymbol{\Theta}, \tag{3.6.5}$$

t. y. tikimybė, kad bet kurią netikrą parametro reikšmę uždengs sritis $\boldsymbol{C}$, yra ne didesnė nei kad tikimybė, kad tą parametro reikšmę uždengs bet kuri kita to paties pasikliovimo lygmens sritis $\tilde{\boldsymbol{C}}(\mathbf{X})$.

3.6.3 pastaba. Šie klasifikavimo kriterijai glaudžiai susiję su tais, kuriais remdamiesi klasifikuojame parametrinių hipotezių tikrinimo taisykles. Parametrinių hipotezių tikrinimo ir pasikliovimo sričių sudarymo uždavinių sąsajos nagrinėjamos 4.5.5 skyrelyje.

3.6.3. Bolševo metodas pasikliovimo rėžiams sudaryti

Tarkime, kad imtis $\mathbf{X} = (X_1, ...X_n)^T$, $\mathbf{X} \sim \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m$, o $\gamma = \gamma(\boldsymbol{\theta}) \in G \subset \mathbf{R}$ yra vienamatis parametras.

Pateiksime L. N. Bolševo pasiūlytą [4] apibendrintąjį pasikliovimo rėžių sudarymo metodą.

Tegu T yra vienmatė statistika, kurios pasiskirstymo funkcija $F(t,\ \gamma)$ yra absoliučiai tolydi ir priklauso tik nuo parametro γ. Tada atsitiktinis dydis $Y = F(T,\ \gamma)$, kuris gaunamas įrašant absoliučiai tolydųjį atsitiktinį dydį į jo pasiskirstymo funkciją, turi tolygųjį skirstinį $Y \sim U(0,\ 1)$, t. y. su bet kuriuo $y \in (0,\ 1)$

$$I(y,\ \gamma) = \mathbf{P}\{F(T,\ \gamma) \le y\} = y, \ \ \gamma \in G. \tag{3.6.6}$$

Fiksuokime statistiką T ir nagrinėkime $F(T,\ \gamma)$ kaip parametro $\gamma \in G$ funkciją. Tarkime, kad $F(T,\ \gamma)$ yra tolydi ir monotoniškai mažėjanti γ atžvilgiu. Tada išsprendę γ atžvilgiu lygtis

$$F(T,\ \gamma) = Q_1,\ F(T,\ \gamma) = 1 - Q_2, \tag{3.6.7}$$

gauname šaknis

$$\underline{\gamma} = \underline{\gamma}(T) = F_T^{-1}(Q_1), \ \ \overline{\gamma} = \overline{\gamma}(T) = F_T^{-1}(1 - Q_2), \tag{3.6.8}$$

kurias galime traktuoti kaip parametro γ apatinį ir viršutinį pasikliovimo rėžius, nes

$$\mathbf{P}\{\underline{\gamma}(T) \le \gamma | \gamma\} = Q_1, \ \ \mathbf{P}\{\overline{\gamma}(T) \le \gamma | \gamma\} = 1 - Q_2. \tag{3.6.9}$$

3.6.1 pavyzdys. *Eksponentinio skirstinio parametro pasikliovimo rėžiai.* Tarkime, a. d. X turi eksponentinį skirstinį $X \sim \mathcal{E}(1/\theta)$, $0 < \theta < \infty$. Jo pasiskirstymo funkcija yra $F(x,\ \theta) = 1 - \exp\{-x/\theta\}$. Todėl atsitiktinis dydis $Y = 1 - \exp\{-X/\theta\} \sim U(0,\ 1)$. Išsprendę (3.6.7) nelygybes, gauname parametro θ apatinį ir viršutinį pasikliovimo rėžius:

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X) = -X \ln(1 - Q_1), \qquad \overline{\theta} = \overline{\theta}(X) = -X \ln Q_2.$$

Kad nagrinėjamą metodą būtų galima naudotiti platesnei skirstinių klasei, iš pradžių suformuluosime pagalbinį rezultatą apie bet kokio atsitiktinio dydžio T pasiskirstymo funkciją $F(t) = \mathbf{P}\{T \leq t\}$. Šis rezultatas yra (3.6.6) lygybės apibendrinimas.

3.6.1 lema. *Su bet kuriuo* $z \in [0,\ 1]$

$$\mathbf{P}\{F(T) \leq z\} \leq z \leq \mathbf{P}\{F(T-0) < z\}. \tag{3.6.10}$$

Jeigu T *yra absoliučiai tolydus, tai*

$$\mathbf{P}\{F(T) \leq z\} = z, \ \ 0 \leq z \leq 1.$$

Įrodymas. Iš pradžių parodysime, kad

$$\mathbf{P}\{F(T) \leq z\} \leq z, \ \ 0 \leq z \leq 1. \tag{3.6.11}$$

Jei $z = 1$, tai $\mathbf{P}\{F(T) \leq 1\} \leq 1$. Fiksuokime $z \in [0,\ 1)$ ir nagrinėkime įvairius atvejus.

1) Lygties $F(y) = z$ sprendinys egzistuoja. Pažymėkime

$$y_0 = \sup\{y : F(y) = z\}.$$

Jei $F(y_0) = z$, tai

$$\mathbf{P}\{F(T) \leq z\} = \mathbf{P}\{F(T) \leq F(y_0)\} \leq \mathbf{P}\{T \leq y_0\} = F(y_0) = z.$$

Jei $F(y_0) > z$, tai

$$\mathbf{P}\{F(T) \leq z\} \leq \mathbf{P}\{F(T) < F(y_0)\} \leq \mathbf{P}\{T < y_0\} = F(y_0 - 0) \leq z.$$

2) Lygties $F(y) = z$ sprendinys neegzistuoja. Bet tada egzistuoja toks y, kad

$$F(y-0) < z \ \text{ ir } \ F(y) > z.$$

Iš čia išplaukia

$$\mathbf{P}\{F(T) \leq z\} \leq \mathbf{P}\{F(T) < F(y)\} \leq \mathbf{P}\{T < y\} = F(y_0 - 0) < z.$$

Taigi (3.6.10) nelygybė įrodyta.

Įrodysime antrąją iš (3.6.9) nelygybių:

$$z \leq \mathbf{P}\{F(T-0) < z\}, \ \ 0 \leq z \leq 1. \tag{3.6.12}$$

Nagrinėkime statistiką $-T$. Jos pasiskirstymo funkcija yra

$$F^{-}(y) = \mathbf{P}\{-T \leq y\} = \mathbf{P}\{T \geq -y\} = 1 - F(-y-0).$$

Pritaikysime (3.6.10) nelygybę pakeitę atitinkamai $T,\ z,\ F$ į $-T,\ 1-z,\ F^{-}$:

$$\mathbf{P}\{F^{-}(-T) \leq 1-z\} \leq 1-z \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{P}\{F(T-0) \geq z\} \leq 1-z$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{P}\{F(T-0) < z\} \geq z, \ \ 0 \leq z \leq 1.$$

Jeigu F tolydi, tai $F(t-0) = F(t)$ ir iš (3.6.9) nelygybių išplaukia, kad $\mathbf{P}\{F(T) \leq z\} = z$ su visais $z \in [0\ 1]$.

Lema įrodyta.

▲

3.6.1 teorema. *(*Bolševo [4]*). Tarkime, kad:*

a) aibė G atvira;

b) egzistuoja mačioji funkcija $T = T(\mathbf{X},\ \gamma)$, priklausanti nuo imties $\mathbf{X}$ ir nuo nežinomo parametro γ, kad su visais $\boldsymbol{\theta}$ ir $t \in \mathbf{R}$ a. d. T pasiskirstymo funkcija

$$F(t, \gamma) = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T(\mathbf{X},\ \gamma) \leq t\}$$

priklauso tik nuo parametro γ;

c) su bet kuriuo fiksuotu $\boldsymbol{x}$, $\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, funkcijos

$$I_i(\gamma,\ \boldsymbol{x}) = F(T(\boldsymbol{x}, \gamma) - 0, \gamma), \ \ I_s(\gamma,\ \boldsymbol{x}) = F(T(\boldsymbol{x}, \gamma), \gamma)$$

yra monotoniškai mažėjančios ir tolydžios pagal γ.

Tada

1) statistika

$$\underline{\gamma} = \underline{\gamma}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \sup\{\gamma : I_i(\gamma,\ \mathbf{X}) \geq Q_1\}, & \textit{jei supremumas egzistuoja}, \\ \inf G, & \textit{jei supremumas neegzistuoja}, \end{cases} \tag{3.6.13}$$

yra parametro γ apatinis pasikliovimo rėžis, kai pasikliovimo lygmuo yra Q_1.

2) statistika

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \inf\{\gamma : I_s(\gamma,\ \mathbf{X}) \leq 1 - Q_2\}, & \textit{jei infimumas egzistuoja}, \\ \sup G, & \textit{jei infimumas neegzistuoja}, \end{cases} \tag{3.6.14}$$

yra parametro γ viršutinis pasikliovimo rėžis, kai pasikliovimo lygmuo yra Q_2.

Įrodymas. 1) Pažymėkime $Q = Q_1$, o $D = D(\mathbf{X})$ – įvykį

$$D = \{\text{egzistuoja } \gamma \ \text{ toks, kad } I_i(\gamma,\ \mathbf{X}) \geq Q\}.$$

Tada turime

$$\mathbf{P}\{\underline{\gamma} < \gamma\} = \mathbf{P}\{\{\underline{\gamma} < \gamma\} \cap D\} + \mathbf{P}\{\{\underline{\gamma} < \gamma\} \cap \bar{D}\}$$

$$= \mathbf{P}\{\{\{\sup \gamma^* : I_i(\gamma^*,\ \mathbf{X}) \geq Q\} < \gamma\} \cap D\} + \mathbf{P}\{\{\inf G < \gamma\} \cap \bar{D}\}$$

$$= \mathbf{P}\{\{I_i(\gamma,\ \mathbf{X}) < Q\} \cap D\} + \mathbf{P}\{\bar{D}\} \geq \mathbf{P}\{\{I_i(\gamma,\ \mathbf{X}) < Q\} \cap D\}$$

$$+\mathbf{P}\{\{I_i(\gamma,\ \mathbf{X}) < Q\} \cap \bar{D}\} = \mathbf{P}\{I_i(\gamma,\ \mathbf{X}) < Q\} = \mathbf{P}\{F(T-0, \gamma) < Q\}.$$

Pritaikę (3.6.10) nelygybę, gauname

$$\mathbf{P}\{F(T-0,\ \gamma) < Q\} \geq Q.$$

2) Įrodoma analogiškai.

▲

3.6.1 išvada. Jei tenkinamos teoremos sąlygos ir $\boldsymbol{x}$ yra tokia $\mathbf{X}$ reikšmė, kad funkcijos $I_i(\gamma,\ \boldsymbol{x})$ ir $I_s(\gamma,\ \boldsymbol{x})$ griežtai mažėja pagal γ, tai $\underline{\gamma}(\boldsymbol{x})$ ir $\bar{\gamma}(\boldsymbol{x})$ yra lygčių

$$I_i(\underline{\gamma}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}) = Q_1, \quad I_s(\bar{\gamma}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}) = 1 - Q_2 \tag{3.6.15}$$

šaknys.

3.6.2 išvada. Jeigu tenkinamos teoremos a) ir b) sąlygos, o sąlygoje c) nurodytos funkcijos $I_i(\gamma,\ \boldsymbol{x})$ ir $I_s(\gamma,\ \boldsymbol{x})$ yra didėjančios pagal γ, tai (3.6.13) ir (3.6.14) apatinį ir viršutinį rėžius reikia sukeisti vietomis.

3.6.3 išvada. Jeigu teoremoje nagrinėjamo a. d. $T(\mathbf{X}, \gamma)$ skirstinys yra absoliučiai tolydusis, nepriklauso nuo nežinomo parametro γ ir pasiskirstymo funkcija $F(t)$ griežtai didėja, tai $I_i(\gamma,\ \mathbf{X}) = I_s(\gamma,\ \mathbf{X}) = F(T(\mathbf{X}, \gamma))$.

Taigi, jei $T(\mathbf{X}, \gamma)$ yra tolydi ir griežtai mažėjanti pagal γ, tai remiantis 4.6.1 išvada $\underline{\gamma}$ ir $\bar{\gamma}$ tenkina lygtis

$$T(\mathbf{X},\ \underline{\gamma}) = t(Q_1), \quad T(\mathbf{X},\ \bar{\gamma}) = t(1 - Q_2); \tag{3.6.16}$$

čia $t(P)$ yra a. d. $T(\mathbf{X},\ \gamma)$ P kvantilis.

Jeigu $T(\mathbf{X},\ \gamma)$ yra tolydi ir griežtai didėjanti pagal γ, tai $\underline{\gamma}$ ir $\bar{\gamma}$ tenkina lygtis

$$T(\mathbf{X},\ \underline{\gamma}) = t(1 - Q_1), \quad T(\mathbf{X},\ \bar{\gamma}) = t(Q_2). \tag{3.6.17}$$

3.6.4 pastaba. Jei θ vienamatis ir egzistuoja vienmatė pakankama statistika T (kurios skirstinys priklauso tiktai nuo γ), tai ji gali būti naudojama kaip statistika, apibrėžta Bolševo teoremoje.

3.6.5 pastaba. Jei θ vienamatis ir pasiskirstymo funkcija $F(x;\theta)$ yra tolydi ir griežtai didėja (mažėja) pagal θ, tai egzistuoja 3.6.3 išvadoje minėtas a. d. $T(\mathbf{X},\ \theta)$, kurio skirstinys nepriklauso nuo nežinomo parametro. Pavyzdžiui, galima naudoti statistiką

$$T(\mathbf{X};\theta) = -2\sum_{i=1}^{n} \ln\,(1 - F(X_i;\theta)),$$

Kadangi $1 - F(X_i;\theta)$ turi tolygųjį skirstinį $U(0;1)$, tai $-2\ln(1 - F(X_i;\theta)) \sim \chi^2_2$, $i = 1, \ldots, n$, ir $T(\mathbf{X};\theta) \sim \chi^2(2n)$.

3.6.6 pastaba. Jei turime paprastąją imtį $\mathbf{X}$ iš skirstinio, priklausančio tiktai nuo mastelio ir postūmio parametrų, t. y.

$$X_i \sim f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad x \in \mathbf{R}, \quad \boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma)^T \in \mathbf{R} \times (0, \infty),$$

čia f žinoma, o $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma})^T$ yra parametro $\boldsymbol{\theta}$ DT įvertinys, tai a. d. $T_1(\mathbf{X}, \sigma) = \hat{\sigma}/\sigma$ ir $T_2(\mathbf{X}, \sigma) = (\hat{\mu} - \mu)/\hat{\sigma}$ ir bet kokios funkcijos $T = g(T_1, T_2)$ skirstiniai nepriklauso nuo nežinomų parametrų. Tai gali būti panaudota parametrų μ ir σ bei kai kurių jų funkcijų, pavyzdžiui, p kvantilio $x(p) = \sigma F^{-1}(p) + \mu$, pasikliovimo intervalams rasti; čia $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$.

Iš tikrųjų tikėtinumo funkcija

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma^n} \prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right),$$

jos logaritmas

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = -n \ln \sigma + \sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right);$$

čia $g = \ln f$. Informantės

$$\dot{\ell}_\mu(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} g'\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right),$$

$$\dot{\ell}_\sigma(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} X_i\, g'\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right). \tag{3.6.18}$$

Pažymėkime $Y_i = (X_i - \mu)/\sigma$. Atsitiktinių dydžių $Y_i \sim f(x)$ skirstiniai nepriklauso nuo nežinomų parametrų. Kadangi $X_i = \sigma Y_i + \mu$ ir $(X_i - \hat{\mu})/\hat{\sigma} = Y_i/T_1 - T_2$, tai iš (3.6.18) lygybės ir DT įvertinių apibrėžimo išplaukia, kad a. d. T_1 ir T_2 tenkina lygtis

$$\sum_{i=1}^{n} g'\left(Y_i/T_1 - T_2\right) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i g'\left(Y_i/T_1 - T_2\right) + nT_1 = 0. \tag{3.6.19}$$

Todėl jų skirstiniai nepriklauso nuo nežinomų parametrų. Pažymėkime $\hat{x}(p) = \hat{\sigma} F^{-1}(p) + \hat{\mu}$ kvantilio $x(p) = \sigma F^{-1}(p) + \mu$ įvertinį. Statistikos

$$T_p = \frac{\hat{x}(p) - x(p)}{\hat{\sigma}} = T_2 + (1 - 1/T_1)F^{-1}(p) \tag{3.6.20}$$

skirstinys taip pat nepriklauso nuo nežinomų parametrų. Taigi parametrų μ, σ, $x(p)$ pasikliovimo intervalams rasti galima pasinaudoti 3.6.3 išvadoje nurodytu metodu.

Reikia pažymėti, kad kai kurių skirstinių atveju statistikų T_1, T_2 ir T_p kvantilius pavyksta rasti tiktai artutiniais metodais. Imtis $Y_1, \ldots, Y_n$ generuojama iš skirstinio, kurio tikimybinis tankis yra $f(x)$ (jis nepriklauso nuo nežinomų parametrų). Tada, pasinaudojus (3.6.18) lygtimis, (3.6.19) ir (3.6.20) lygybėmis, generuojamos statistikų T_1, T_2 ir T_p realizacijos.

3.6.7 pastaba. Jeigu $h(\gamma)$ yra tolydi ir didėjanti parametro γ funkcija, tai jos pasikliovimo rėžiai yra

$$\underline{h} = h(\underline{\gamma}), \quad \bar{h} = h(\bar{\gamma}), \tag{3.6.21}$$

o jeigu h mažėjanti, tai

$$\underline{h} = h(\bar{\gamma}), \quad \bar{h} = h(\underline{\gamma}). \tag{3.6.22}$$

Iš tikrųjų, įvykis $\{\underline{\gamma} < \gamma\}$ ekvivalentus įvykiui $\{h(\underline{\gamma}) < h(\gamma)\}$, jeigu funkcija h didėjanti; jeigu funkcija mažėjanti, tai nelygybės pasikeis priešingomis. Atkreipsime dėmesį, kad tai skiriasi nuo taškinių įvertinių: jeigu $\hat{\gamma}$ yra nepaslinktasis taškinis γ įvertinys, tai $h(\hat{\gamma})$ dažniausiai nebus $h(\gamma)$ nepaslinktasis įvertinys.

3.6.8 pastaba. Kuriant daugiamačio parametro $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}) \in G \subset \mathbf{R}^k$ pasikliovimo sritis, metodą galima modifikuoti.

Tarkime, kad pasisekė parinkti tokį mačiųjų funkcijų rinkinį $T_1(\mathbf{X},\ \boldsymbol{\gamma}), ...,$ $T_r(\mathbf{X},\ \boldsymbol{\gamma})$, kurio r-matis skirstinys nepriklauso nuo nežinomo parametro. Tada imant bet kurią mačiąją aibę $B \subset \mathbf{R}^r$, dėl kurios

$$\mathbf{P}\{(T_1, ..., T_r) \in B\} \geq Q, \tag{3.6.23}$$

egzistuoja tokia aibė

$$C_k = \{\boldsymbol{\gamma} : (T_1(\mathbf{X},\ \boldsymbol{\gamma}), \cdots, T_r(\mathbf{X},\ \boldsymbol{\gamma})) \in B\} \subset G, \tag{3.6.24}$$

kurią galima traktuoti kaip parametro $\boldsymbol{\gamma}$ pasikliovimo lygmens Q pasikliovimo sritį.

3.6.2 pavyzdys. *Normaliojo skirstinio vidurkio pasikliovimo rėžiai.* Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ...,$ $X_n)^T$ yra paprastoji imtis a. d. $X \sim N(\mu,\ 1)$, $-\infty < \mu < \infty$. Pilnosios ir pakankamosios statistikos $T = \bar{X}$ pasiskirstymo funkcija $F(x|\mu,\ 1/n) = \Phi((x-\mu)\sqrt{n})$ su kiekvienu $x \in \mathbf{R}$ monotoniškai mažėja pagal μ. Pagal (3.6.7) pasikliovimo rėžiai $\underline{\mu}$ ir $\overline{\mu}$ gaunami sprendžiant lygtis

$$F(\bar{X}|\underline{\mu},\ \frac{1}{n}) = Q_1, \ \ F(\bar{X}|\overline{\mu},\ \frac{1}{n}) = 1 - Q_2,$$

iš kurių gauname

$$\underline{\mu} = \bar{X} - z_{1-Q_1}\frac{1}{\sqrt{n}}, \ \ \overline{\mu} = \bar{X} + z_{1-Q_2}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Pasikliovimo rėžiams rasti buvo galima pasinaudoti 3.6.3 išvada. Funkcijos $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu) \sim$ $N(0,\ 1)$ skirstinys absoliučiai tolydusis, nepriklauso nuo nežinomo parametro ir ši funkcija monotoniškai mažėjanti pagal μ, todėl pasikliovimo rėžius galima rasti pagal (3.6.16) formules, t. y. sprendžiant lygtis

$$\sqrt{n}(\bar{X}-\mu) = z_{1-Q_1}, \ \ \sqrt{n}(\bar{X}-\mu) = z_{Q_2} = -z_{1-Q_2}.$$

3.6.3 pavyzdys. *Puasono skirstinio parametro pasikliovimo rėžiai.* Tegu paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint Puasono a. d. $X \sim \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Pakankamosios statistikos $T = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$ pasiskirstymo funkcija (žr. 2.5.2 skyrelį) yra

$$F(k,\lambda) = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n\lambda)^j}{j!} \mathrm{e}^{-n\lambda} = \mathbf{P}\{\chi^2_{2k+2} > 2n\lambda\} = \mathcal{P}(2n\lambda,\ 2k+2);$$

čia

$$\mathcal{P}(x,n) = \mathbf{P}\{\chi^2_n \geq x\}.$$

Be to,

$$F(k-0,\lambda) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(n\lambda)^j}{j!} \mathrm{e}^{-n\lambda} = \mathcal{P}(2n\lambda,\ 2k), \quad (k = 1, 2, ...),$$

$$F_T(k-0,\lambda) = 0, \ \text{jei}\ k = 0.$$

Bolševo teoremoje minimos funkcijos I_i ir I_s yra tokios:

$$I_i(\lambda,\ \mathbf{X}) = \begin{cases} \mathcal{P}(2n\lambda,\ 2T), \text{ jei } T > 0, \\ 0, \text{ jei } T = 0; \end{cases}$$

$$I_s(\lambda,\ \mathbf{X}) = \mathcal{P}(2n\lambda,\ 2T+2).$$

Šios funkcijos yra griežtai mažėjančios pagal λ, jei $T > 0$. Remiantis Bolševo teorema, parametro λ pasikliovimo rėžiai randami iš lygčių

$$\mathcal{P}(2n\underline{\lambda},\ 2T) = Q_1, \ \ \mathcal{P}(2n\bar{\lambda},\ 2T+2) = 1 - Q_2.$$

Taigi

$$\underline{\lambda} = \frac{1}{2n}\chi^2_{Q_1}(2T), \ \ \bar{\lambda} = \frac{1}{2n}\chi^2_{1-Q_2}(2T+2). \tag{3.6.25}$$

Jeigu $T = 0$, tai $I_i(\lambda,\ \mathbf{X}) = 0$, t. y. nėra tokio λ, kad $I_i(\lambda,\ \mathbf{X}) \geq Q_1$. Tada iš Bolševo teoremos išplaukia $\underline{\lambda} = \inf_{\lambda>0}\lambda = 0$.

Jeigu $Q_1 = Q_2$, tai $(\underline{\lambda},\ \bar{\lambda})$ yra parametro λ pasikliovimo intervalas, kai pasikliovimo lygmuo yra $Q = 2Q_1 - 1$.

3.6.4. Asimptotiniai pasikliovimo intervalai

Palyginti retai statistikų skirstinius pavyksta išreikšti žinomomis funkcijomis. Dažnai kur kas lengviau apskaičiuoti jų asimptotinius skirstinius, kai imties didumas $n \to \infty$. Nežinodami funkcijos $T(\mathbf{X},\ \theta)$ skirstinio, negalime rasti kvantilių $t(Q)$ ir pasikliovimo intervalo $(\underline{\theta},\ \bar{\theta})$. Tačiau pasinaudoję asimptotiniu funkcijos $T(\mathbf{X},\ \theta)$ skirstiniu galime rasti apytikslį pasikliovimo intervalą.

Visų pirma aptarsime vienmačio parametro atvejį.

1. Tarkime, kad turime paprastąją imtį

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T, \quad X_i \sim f(x;\boldsymbol{\theta}),\ \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)^T \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m.$$

Jei egzistuoja funkcijos $\gamma : \boldsymbol{\Theta} \to G \subset \mathbf{R}$ tolydžios pirmosios eilės dalinės išvestinės, tenkinamos 3.5.3 (arba 3.5.4) teoremos prielaidos, $\hat{\gamma}_n = \gamma(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ yra parametro $\gamma = \gamma(\boldsymbol{\theta})$ DT įvertinys, tai, remiantis (3.5.3) (ar analogiška) išvada,

$$\sqrt{n}(\hat{\gamma}_n - \gamma) \xrightarrow{d} Y \sim N(0, \sigma^2_\gamma); \tag{3.6.26}$$

čia $\sigma^2_\gamma = \dot{\gamma}^T(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\dot{\gamma}(\boldsymbol{\theta})$, o $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta})$ yra a. d. X_1 Fišerio informacinė matrica. Parametro σ^2_γ pagrįstasis įvertinys yra

$$\hat{\sigma}^2_\gamma = -n\dot{\gamma}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}})\ddot{\ell}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\dot{\gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}),$$

taigi

$$\sqrt{n}(\hat{\gamma}_n - \gamma)/\hat{\sigma}_\gamma \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1). \tag{3.6.27}$$

Atsitiktinio dydžio $(\hat{\gamma}_n - \gamma)/\hat{\sigma}_\gamma$ skirstinys aproksimuojamas standartiniu normaliuoju skirstiniu. Jei n yra didelis, šis a. d. mažėja pagal γ. Taigi iš 3.6.3 išvados išplaukia, kad apytiksliai apatinis Q_1 ir viršutinis Q_2 parametro γ pasikliovimo rėžiai tenkina lygtis (žr. (3.6.16) formules)

$$\sqrt{n}(\hat{\gamma}_n - \underline{\gamma})/\hat{\sigma}_\gamma = z_{1-Q_1}, \quad \sqrt{n}(\hat{\gamma}_n - \overline{\gamma})/\hat{\sigma}_\gamma = z_{Q_2}.$$

Iš čia gauname

$$\underline{\gamma} = \hat{\gamma}_n - \frac{\hat{\sigma}_\gamma}{\sqrt{n}} z_{1-Q_1}, \quad \overline{\gamma} = \hat{\gamma}_n + \frac{\hat{\sigma}_\gamma}{\sqrt{n}} z_{1-Q_2}; \tag{3.6.28}$$

čia z_P yra standartinio normaliojo skirstinio P-oji kritinė reikšmė.

Intervalas

$$\left(\hat{\gamma}_n - \frac{\hat{\sigma}_\gamma}{\sqrt{n}} z_\alpha, \quad \hat{\gamma}_n + \frac{\hat{\sigma}_\gamma}{\sqrt{n}} z_\alpha\right) \tag{3.6.29}$$

yra parametro γ aproksimacinis pasikliovimo intervalas, kai pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - 2\alpha$.

Kai ieškoma parametro $\boldsymbol{\theta}$ atskiros koordinatės $\gamma = \theta_i$ pasikliovimo intervalo, $\dot{\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$; čia vienetas yra i-ojoje pozicijoje. Todėl visose formulėse imame $\hat{\sigma}_\gamma^2 = \hat{I}^{ii}$; čia $\hat{I}^{ii}$ yra matricos $\hat{\boldsymbol{I}} = -n\ddot{\ell}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ i-asis įstrižainės elementas.

2. Kitas asimptotinių intervalų sudarymo būdas grindžiamas (3.6.26) rezultatu. Tačiau, užuot paketus σ_γ^2 jos pagrįstuoju įvertiniu, γ atžvilgiu sprendžiama nelygybė

$$n\frac{(\hat{\gamma}_n - \gamma)^2}{\sigma_\gamma^2} < z_\alpha^2.$$

Jeigu šios nelygybės sprendinys yra intervalas $(a(\hat{\gamma}_n); b(\hat{\gamma}_n))$, tai lygmens $Q = 1 - 2\alpha$ asimptotinis pasikliovimo intervalas yra

$$(\underline{\gamma}; \overline{\gamma}) = (a(\hat{\gamma}_n); b(\hat{\gamma}_n)). \tag{3.6.30}$$

3. Trečias asimptotinio pasikliovimo intervalo radimo būdas taip pat grindžiamas (3.6.26) rezultatu. Tačiau, užuot ribinę dispersiją σ_γ^2 pakeitus jos pagrįstuoju įvertiniu, ieškoma tokia monotoninė *dispersiją stabilizuojanti transformacija* $\lambda = \lambda(\gamma)$, kad parametro λ DT įvertinio $\hat{\lambda} = \lambda(\hat{\gamma})$ ribinė dispersija būtų lygi 1. Tada kuriant parametro λ, o dėl transformacijos monotiniškumo ir γ, asimptotinį pasikliovimo intervalą nereikia vertinti ribinės dispersijos.

Tai galima padaryti, jei a. d. sekos $\sqrt{n}(\hat{\gamma}_n - \gamma)$ ribinė dispersija priklauso tiktai nuo parametro γ:

$$\sqrt{n}(\hat{\gamma}_n - \gamma) \xrightarrow{d} Y \sim N(0, \sigma^2(\gamma)). \tag{3.6.31}$$

Tada

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow{d} V \sim N(0, \dot{\lambda}^2(\gamma)\sigma^2(\gamma)). \tag{3.6.32}$$

Ribinė dispersija lygi 1, jei $\dot{\lambda}^2(\gamma)\sigma^2(\gamma) = 1$. Integruodami gauname, kad dispersiją stabilizuojanti transformacija yra pavidalo

$$\lambda(\gamma) = \int \frac{d\gamma}{\sigma(\gamma)}. \tag{3.6.33}$$

Kadangi a. d. $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda)$ skirstinys aproksimuojamas standartiniu normaliuoju skirstiniu, tai lygiai taip pat kaip ir pirmu atveju intervalas

$$(\underline{\lambda}, \bar{\lambda}) = \left(\hat{\lambda}_n - z_\alpha \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \hat{\lambda}_n + z_\alpha \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

yra parametro λ pasikliovimo lygmens $Q = 1 - 2\alpha$ aproksimacinis pasikliovimo intervalas.

Jei funkcija $\lambda = \lambda(\gamma)$ didėja, tai jos atvirkštinę funkciją pažymėję φ, gauname, kad

$$(\underline{\gamma}, \bar{\gamma}) = (\varphi(\underline{\lambda}),\ \varphi(\bar{\lambda})) \tag{3.6.34}$$

yra parametro γ pasikliovimo lygmens $Q = 1 - 2\alpha$ aproksimacinis pasikliovimo intervalas.

3.6.4 pavyzdys. *Puasono skirstinio parametro asimptotiniai intervalai.* Per 10 darbo dienų, kurių trukmė 7 valandos, firmoje užregistruoti tokie klientų telefono skambučių skaičiai: 25; 30; 18; 39; 14; 21; 27; 40; 28; 16. Tarkime, kad skambučių srautas yra puasoninis su intensyvumu λ(skambučių/per valandą). Rasime parametro λ lygmens $Q = 0,95$ asimptotinius pasikliovimo intervalus.

Gautus stebėjimus traktuosime kaip didumo $n = 10$ paprastosios imties, gautos stebint a. d. $X \sim \mathcal{P}(\Lambda)$, $\Lambda = k\lambda$, $k = 7$, realizaciją. Parametro $\lambda = \Lambda/k$ DT įvertinys yra $\hat{\lambda} = \hat{\Lambda}/k = S_n/(nk)$; čia $S_n = X_1 + ... + X_n$. Vieno stebėjimo informacijos apie Puasono skirstinio parametrą kiekis yra $1/\Lambda$. Taigi $\sigma^2_{\hat{\lambda}} = (1/k)\Lambda(1/k) = \lambda/k$. Gauname (3.6.26) konvergavimą

$$\sqrt{n}(\hat{\gamma}_n - \gamma) \xrightarrow{d} Y \sim N(0, \lambda/k)$$

ir pasikliovimo intervalo (3.6.29) realizaciją

$$(\hat{\lambda}(1 - z_\alpha/\sqrt{nk}); \hat{\lambda}(1 + z_\alpha/\sqrt{nk})) = (2,822;\ 4,549).$$

Spręsdami nelygybę

$$nk(\hat{\lambda} - \lambda)^2/\lambda^2 < z_\alpha^2$$

gauname pasikliovimo intervalo (3.6.30) realizaciją

$$(\hat{\lambda}/(1 + z_\alpha/\sqrt{nk});\ \hat{\lambda}/(1 - z_\alpha/\sqrt{nk})) = (2,986;\ 4,814).$$

Dispersiją stabilizuojanti transformacija yra $2\sqrt{\hat{\lambda}}$. Gauname pasikliovimo intervalo (3.6.34) realizaciją

$$((\hat{\lambda} - z_\alpha/(2\sqrt{nk}))^2; (\hat{\lambda} + z_\alpha/(2\sqrt{nk}))^2) = (3,613;\ 4,557).$$

Šis pavyzdys yra iliustracinis, norint parodyti (3.6.29), (3.6.30), (3.6.34) formulių taikymą.

Tikslus Puasono pasikliovimo intervalas pateiktas 3.6.3 pavyzdyje. Gauname tikslaus reikšmingumo lygmens $Q = 0,95$ pasikliovimo intervalo realizaciją

$$(\underline{\lambda}; \bar{\lambda}) = (\frac{1}{2nk}\chi^2_{0,975}(570);\ \frac{1}{2nk}\chi^2_{0,025}(572)) = (3,612;\ 4,573).$$

Matome, kad aproksimacinis intervalas, gautas taikant dispersiją stabilizuojančią transformaciją, yra kur kas artimesnis tiksliam intervalui.

3.6.9 pastaba. Pirmasis būdas apibendrinamas daugiamačio parametro atvejui: jei $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n = \boldsymbol{\gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ yra k-mačio parametro $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta})$ DT įvertinys ir tenkinamos 3.5.4 išvados sąlygos, tai

$$H = -(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n - \boldsymbol{\gamma})^T \left\{\dot{\boldsymbol{\gamma}}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)\ddot{\ell}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)\right\}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n - \boldsymbol{\gamma}) \xrightarrow{d} \chi^2_k.$$

Taigi aibė

$$\boldsymbol{C}(\mathbf{X}) = \{\boldsymbol{\gamma} : H < \chi^2_{1-Q}(k)\} \tag{3.6.35}$$

yra apytikslė pasikliovimo lygmens Q parametro $\boldsymbol{\gamma}$ pasikliovimo sritis.

3.7. Parametrų įvertinių pavyzdžiai

Pateiksime dažniausiai taikomų skirstinių parametrų taškinius ir intervalinius įvertinius.

3.7.1. Vienamatis normalusis skirstinys

Tegu paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$, $-\infty < \mu < \infty,\ \sigma > 0$. Statistika $(\bar{X},\ s^2)^T$, čia

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$

yra pilnoji ir pakankamoji (žr. 3.4.3 skyrelį). Kadangi $\mathbf{E}_\mu \bar{X} = \mu,\ \ \mathbf{E}_{\sigma^2} s^2 = \sigma^2$, tai $(\bar{X},\ s^2)^T$ yra parametro $(\mu,\ \sigma^2)^T$ NMD įvertinys, turintis šias savybes (žr. 2.5.2 skyrelį):

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0,\ 1), \ \frac{s^2(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \ \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{s} \sim S(n-1). \quad (3.7.1)$$

Pasinaudoję 3.6.3 išvada, gauname parametrų μ ir σ pasikliovimo intervalus:

$$(\underline{\mu},\ \overline{\mu}) = (\bar{X} - t_\alpha(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_\alpha(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}),$$

$$(\underline{\sigma^2},\ \overline{\sigma^2}) = \left(\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)},\ \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_\alpha(n-1)}\right), \quad (3.7.2)$$

kai pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - 2\alpha$.

3.7.1 pastaba. Jeigu dispersija σ^2 žinoma, tai parametro μ NMD įvertinys yra $\bar{X}$. Pasinaudoję pirmąja (3.7.1) lygybe, gauname parametro μ pasikliovimo intervalą

$$(\underline{\mu},\ \overline{\mu}) = (\bar{X} - z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}). \quad (3.7.3)$$

3.7.2 pastaba. Jeigu vidurkis μ žinomas, tai parametro σ^2 NMD įvertinys yra

$$s_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2, \ \ \frac{s_0^2 n}{\sigma^2} \sim \chi^2(n). \quad (3.7.4)$$

Palyginę šias ir (3.7.1) formules, matome, kad parametro σ^2 pasikliovimo intervalas skirsis nuo (3.7.2) tik tuo, kad s^2 reikia pakeisti į s_0^2, o vietoje $n-1$ įrašyti n.

3.7.3 pastaba. Vidutinio kvadratinio nuokrypio σ pasikliovimo intervalas (žr. 3.6.7 pastabą) yra

$$(\underline{\sigma},\ \overline{\sigma}) = (\sqrt{\underline{\sigma^2}},\ \sqrt{\overline{\sigma^2}}). \quad (3.7.5)$$

Taškiniai parametro σ įvertiniai s arba s_0 yra paslinktieji. Nepaslinktuosius (ir NMD) įvertinius gauname įvedę pataisas

$$\widehat{\sigma} = \frac{s}{M_{n-1}}, \quad \widehat{\sigma} = \frac{s_0}{M_n};$$

čia

$$M_\nu = \sqrt{\frac{2}{\nu}}\frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)}.$$

3.7.1 pavyzdys. *Normaliojo skirstinio parametrų taškiniai ir intervaliniai įverčiai.* Pamatuota 25 atsitiktinai atrinktų Panevėžio gamyklos "Ekranas" kineskopų vieno spindulio srovės stiprumas X:

6,31; 6,43; 6,46; 6,39; 6,30; 6,49; 6,32; 6,25; 6,29; 6,43; 6,62; 6,43; 6,41; 6,22; 6,38; 6,22; 6,37; 6,27; 6,18; 6,26; 6,20; 6,41; 6,20; 6,25; 6,25

Tardami, kad buvo stebėtas normalusis a. d., rasime parametrų μ, σ^2, σ taškinių ir intervalinių ($Q = 0,95$) įvertinių realizacijas.

Parametrų NMD taškinių įvertinių realizacijos yra

$$\hat{\mu} = \bar{X} = 6,3336; \quad \hat{\sigma}^2 = s^2 = 0,0120; \quad \hat{\sigma} = s/M_{24} = 0,1107.$$

Pagal (3.7.3), pasinaudoję 2 priedo 2.P.4 lentele, gauname

$$(\underline{\mu}; \overline{\mu}) = (6,3336 - 2,0639\sqrt{0,0120}/5; 6,3336 + 2,0639\sqrt{0,0120}/5) = (6,2884; 6,3788).$$

Remdamiesi (3.7.2) ir pasinaudoję 2 priedo 2.P.3 lentele, gauname

$$(\underline{\sigma^2}; \overline{\sigma^2}) = \left(\frac{24 \cdot 0,0120}{39,364}; \frac{24 \cdot 0,0120}{12,401}\right) = (0,0073; 0,0232);$$

$$(\underline{\sigma}; \overline{\sigma}) = (\sqrt{\underline{\sigma^2}}; \sqrt{\overline{\sigma^2}}) = (0,0855; 0,1524).$$

3.7.2. Dviejų normaliųjų imčių uždaviniai

Tarkime, $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_m)^T$ ir $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^T$ yra paprastosios imtys, gautos stebint n. a. d. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ir $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$; $-\infty < \mu_1, \mu_2 < +\infty$, $0 < \sigma_1, \sigma_2 < +\infty$. Atsitiktinio vektoriaus $(\mathbf{X}^T, \boldsymbol{Y}^T)^T$ skirstinys priklauso keturparametrei eksponentinių skirstinių šeimai su pilnąja ir pakankamąja statistika $\boldsymbol{T} = (\sum_i X_i, \sum_i Y_i, \sum_i X_i^2, \sum_i Y_i^2)^T$. Todėl bet kurios $\boldsymbol{T}$ funkcijos yra savo vidurkio NMD įvertiniai. Pavyzdžiui, parametrų $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ NMD įvertiniai yra

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i, \quad \hat{\mu}_2 = \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i;$$

$$\hat{\sigma}_1^2 = s_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2, \quad \hat{\sigma}_2^2 = s_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2.$$

Parametrų $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ pasikliovimo intervalai randami naudojant 3.7.1 skyrelio formules.

Aptarsime kitų parametrų įvertinius.

1. Tegu $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, $0 < \sigma < \infty$. Tada parametro σ^2 NMD įvertinys yra

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n-2}, \quad \frac{s^2(m+n-2)}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2). \tag{3.7.6}$$

Palyginę su (3.7.1) formulėmis sudarome parametro σ^2 pasikliovimo intervalą, analogišką (3.7.2) intervalui (tereikia pakeisti $n-1$ į $m+n-2$ ir naudoti įvertinį (3.7.6)).

2. Parametro $\theta = \mu_1 - \mu_2$ taškinis NMD įvertinys yra

$$\hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\theta,\ \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}\right);$$

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - \theta}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \sim N(0,\ 1). \tag{3.7.7}$$

Jeigu dispersijos σ_1^2 ir σ_2^2 būtų žinomos, tai galėtume sudaryti parametro θ pasikliovimo intervalą, analogišką (3.7.3) intervalui:

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}, \bar{X} - \bar{Y} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}\right).$$

Jeigu yra žinomas dispersijų santykis $k = \sigma_1^2/\sigma_2^2$, tai parametro θ pasikliovimo intervalą gauname remdamiesi tuo, kad a. d.

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - \theta}{\sqrt{s_1^2(m-1) + ks_2^2(n-1)}}\sqrt{\frac{kmn(m+n-2)}{kn+m}} \sim S(m+n-2)$$

yra pasiskirstęs pagal Stjudento dėsnį su $m+n-2$ laisvės laipsnių. Pasikliovimo intervalo, kai pasikliovimo lygmenuo $Q = 1 - 2\alpha$, rėžiai yra

$$\underline{\theta} = \hat{\theta} - t_\alpha(m+n-2)\,\sigma_{\hat{\theta}},\ \overline{\theta} = \hat{\theta} + t_\alpha(m+n-2)\,\sigma_{\hat{\theta}},$$

$$\sigma_{\hat{\theta}} = \left(\frac{(s_1^2(m-1) + ks_2^2(n-1))(kn+m)}{kmn(m+n-2)}\right)^{1/2}. \tag{3.7.8}$$

Jeigu nežinomas ir dispersijų santykis, tai statistikos $\boldsymbol{T}$ ir parametro θ funkcija, kurios skirstinys nepriklauso nuo nežinomų parametrų, neegzistuoja. Todėl šiuo atveju tenka apsiriboti apytiksliais pasikliovimo intervalais.

3. Parametro $\beta = \sigma_1^2/\sigma_2^2$ pasikliovimo intervalą randame, remdamiesi tuo, kad funkcija

$$\frac{\beta s_2^2}{s_1^2} \sim F(n-1,\ m-1)$$

yra monotoninė β atžvilgiu, o jos skirstinys nepriklauso nuo nežinomų parametrų. Remdamiesi 3.6.3 išvada, gauname pasikliovimo intervalo, kai pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - 2\alpha$, rėžius

$$\underline{\beta} = \frac{s_1^2}{s_2^2}F_{1-\alpha}(n-1,\ m-1),\ \ \overline{\beta} = \frac{s_1^2}{s_2^2}F_\alpha(n-1,\ m-1); \tag{3.7.9}$$

čia $F_\alpha(m,\ n)$ – Fišerio skirstinio su m ir n laisvės laipsnių α kritinė reikšmė.

3.7.2 pavyzdys. (**3.7.1** pavyzdžio tęsinys). *Dviejų normaliųjų skirstinių palyginimas.* Buvo pamatuotas tas pats parametras kaip ir 3.7.1 pavyzdyje, 15 atsitiktinai atrinktų kineskopų, pagamintų kitu laikotarpiu:

6,11; 6,22; 6,20; 6,35; 6,30; 6,25; 6,36; 6,16; 6,14; 6,07; 6,29; 6,44; 6,39; 6,28; 6,33.

Tarę, kad šios dvi imtys gautos stebint nepriklausomus normaliuosius a. d., rasime parametrų $\beta = \sigma_1^2/\sigma_2^2$ ir $\theta = \mu_1 - \mu_2$ taškinių ir intervalinių įvertinių realizacijas.

Pagal šio pratimo duomenis gauname parametrų μ_2 ir σ_2^2 įverčius

$$\hat{\mu}_2 = \bar{Y} = 6,2593, \quad \hat{\sigma}_2^2 = s_2^2 = 0,0117.$$

Parametrų μ_1 ir σ_1^2 įverčiai surasti 3.7.1 pavyzdyje: $\hat{\mu}_1 = 6,3336$; $s_1^2 = 0,0120$.

Parametro β taškinis įvertis $\hat{\beta} = s_1^2/s_2^2 = 1,0256$. Naudodami 2 priedo 2.P.5 lentelę gauname pasikliovimo lygmens $Q = 0,9$ parametro β pasikliovimo intervalą (3.7.9):

$$\underline{\beta} = \frac{s_1^2}{s_2^2}F_{0,95}(14,\ 24) = \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{0,05}(24,\ 14)} = 0,4815; \quad \overline{\beta} = \frac{s_1^2}{s_2^2}F_{0,05}(14,\ 24) = 1,3465.$$

Kadangi šis intervalas uždengia 1, tai tarsime, kad dispersijos σ_1^2 ir σ_2^2 yra vienodos. Tada parametro θ pasikliovimo lygmens $Q = 0,9$ pasikliovimo intervalą randame pagal (3.7.8):

$$\sigma_{\hat{\theta}} = 0,0924; \quad \underline{\theta} = \bar{X} - \bar{Y} - \sigma_{\hat{\theta}}t_{0,05}(38) = -0,0815, \quad \overline{\theta} = \bar{X} - \bar{Y} + \sigma_{\hat{\theta}}t_{0,05}(38) = 0,2650.$$

3.7.3. Dvimatis normalusis skirstinys

Tarkime, paprastoji imtis $(X_i,\ Y_i)^T,\ i = 1, ..., n$, gauta stebint dvimatį a. v. $(X,\ Y)^T \sim N_2(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\ \mu_2)^T$, $-\infty < \mu_1,\ \mu_2 < +\infty$; $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]_{2\times 2}$, $\sigma_{11} = \sigma_1^2$, $\sigma_{22} = \sigma_2^2$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \varrho\sigma_1\sigma_2$, $0 < \sigma_1,\ \sigma_2 < +\infty$, $-1 < \varrho < 1$.

Atsitiktinio vektoriaus $(X,\ Y)^T$ skirstinys priklauso penkių parametrų $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \varrho$ eksponentinių skirstinių šeimai. Pilnoji ir pakankamoji statistika yra $\boldsymbol{T} = (\sum_i X_i,\ \sum_i Y_i,\ \sum_i X_i^2,\ \sum_i Y_i^2,\ \sum_i X_iY_i)^T$. Kiekviena $\boldsymbol{T}$ funkcija yra savojo vidurkio NMD įvertinys. Taigi parametrų $\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2$ taškiniai ir intervaliniai įvertiniai randami analogiškai kaip ir stebint vienmatį normalųjį a. d.

Koreliacijos koeficiento ϱ taškiniu įvertiniu paprastai imamas jo empirinis analogas

$$\hat{\varrho} = r = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_i (X_i - \bar{X})^2 \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2}}. \tag{3.7.10}$$

Statistikos r tankio funkcija pateikta šio vadovėlio IV dalies 4.1 skyrelyje. Statistikos r pasiskirstymo funkcija $F(x,\ \varrho)$ yra monotoniškai didėjanti pagal ϱ, todėl, remiantis Bolševo teorema, pasikliovimo intervalo $(\underline{\varrho},\ \overline{\varrho})$, kai pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - 2\alpha$, rėžiai randami iš lygčių

$$F(r,\ \underline{\varrho}) = 1 - \alpha,\ F(r,\ \overline{\varrho}) = \alpha. \tag{3.7.11}$$

Išspręsti (3.7.11) lygtis $\underline{\varrho}$ ir $\overline{\varrho}$ atžvilgiu gana sunku, todėl dažniau naudojami apytiksliai pasikliovimo intervalai. Statistika r asimptotiškai $(n \to \infty)$ pasiskirsčiusi pagal normalųjį dėsnį (žr. 2.28 pratimą)

$$\sqrt{n}\frac{r - \varrho}{1 - \varrho^2} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,\ 1),$$

tačiau konvergavimas į normalųjį skirstinį gana lėtas, ypač kai ϱ artimas ± 1 ir r skirstinys yra labai asimetriškas. Todėl rekomenduojama taikyti Fišerio pasiūlytą aproksimaciją, pagal kurią atliekama dispersiją stabilizuojanti transformacija (žr. 3.6.4 skyrelį)

$$V = V(r) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \tag{3.7.12}$$

ir gaunamas konvergavimas

$$\sqrt{n-3}\,(V(r) - V(\varrho)) \xrightarrow{d} Z \sim N(0,\ 1).$$

Pritaikę šią aproksimaciją ir pasinaudoję 3.6.7 pastaba, gauname apytikslį pasikliovimo intervalą, kurio rėžiai yra

$$\underline{\varrho} = \frac{\mathrm{e}^{2V_1} - 1}{\mathrm{e}^{2V_1} + 1}, \quad \overline{\varrho} = \frac{\mathrm{e}^{2V_2} - 1}{\mathrm{e}^{2V_2} + 1}, \tag{3.7.13}$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} - z_\alpha \frac{1}{\sqrt{n-3}}, \ V_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} + z_\alpha \frac{1}{\sqrt{n-3}}.$$

3.7.4 pastaba. Jeigu paprastoji imtis gauta stebint a. v. $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T \sim N_k(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma})$, $k > 2$, tai koordinačių X_i irX_j koreliacijos koeficiento įvertinys r_{ij} priklauso tik nuo koordinačių X_i ir X_j stebėjimų. Todėl įvertinio r_{ij} savybės analogiškos gautoms dvimačio normaliojo skirstinio atveju.

Parametro $\theta = \mu_1 - \mu_2$ taškinis NMD įvertinys yra $\hat\theta = \bar X - \bar Y$. Pasikliovimo intervalą galima sudaryti remiantis tuo, kad $Z = X - Y \sim N(\theta, \sigma^2)$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$. Įvertinę dispersiją

$$\hat\sigma^2 = s_Z^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar Z)^2$$

gauname lygmens $Q = 1 - \alpha$ pasikliovimo intervalą

$$(\underline{\theta};\ \overline{\theta}) = (\hat\theta - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s_Z}{\sqrt{n}};\ \ \hat\theta + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s_Z}{\sqrt{n}}).$$

3.7.3 pavyzdys. (**3.7.1** pavyzdžio tęsinys). *Dvimačio normaliojo skirstinio parametrų įverčiai.* Buvo pamatuota tų pačių 25 kineskopų, kaip ir 3.7.1 pavyzdyje, kito spindulio srovės stiprumas Y:

6,46; 6,31; 6,37; 6,29; 6,25; 6,38; 6,23; 6,20; 6,26; 6,26; 6,58; 6,57; 6,31; 6,24; 6,20; 6,14; 6,25; 6,24; 6,02; 6,27; 6,21; 6,36; 6,15; 6,29; 6,12.

Sujungę šių pratimų duomenis ir tarę, kad buvo stebėtas dvimatis normalusis vektorius $(X, Y)^T$, rasime parametrų θ, ρ taškinių ir intervalinių ($Q = 0,95$) įvertinių realizacijas. Randame

$$\hat\theta = \bar X - \bar Y = \bar Z = 6,3336 - 6,2734 = 0,0552.$$

Imdami skirtumus $Z_i = X_i - Y_i,\ \ i = 1, ..., 25$ įvertiname dispersiją

$$\hat\sigma^2 = s_Z^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar Z)^2 = 0,007034, \quad s_Z = 0,0839.$$

ir gauname pasikliovimo intervalą

$$(\underline{\theta};\ \overline{\theta}) = (0,0552 - 2,0639 \cdot 0,0839/5;\ 0,0552 + 2,0639 \cdot 0,0839/5) = (0,0206;\ 0,0898).$$

Pagal turimus duomenis parametro ρ taškinio įvertinio (3.7.10) realizacija yra $r = 0,7590$. Apskaičiuojame

$$V_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} - z_\alpha\frac{1}{\sqrt{n-3}} = 0,5760, \quad V_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} + z_\alpha\frac{1}{\sqrt{n-3}} = 1,4117$$

ir, naudodami Fišerio aproksimaciją, gauname apytikslį pasikliovimo intervalą (3.7.13)

$$(\underline{\rho};\ \overline{\rho}) = (0,5197;\ \ 0,8879).$$

3.7.4. Skirstiniai, susiję su normaliuoju skirstiniu

1. Tarkime, $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis, gauta stebint a. d. X, kurio skirstinys yra *lognormalusis*, t. y. $X \sim LN(\mu,\ \sigma), -\infty < \mu < +\infty,\ \sigma > 0$.

Kadangi $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^T$, $Y_i = \ln X_i$ yra paprastoji imtis, gauta stebint a. d. $Y \sim N(\mu,\ \sigma^2)$, tai, vertinant parametrus $\mu,\ \sigma^2$ ar jų funkcijas, naudojami 3.7.1 skyrelio metodai, jeigu prieš skaičiavimus atliekama transformacija $Y_i = \ln X_i,\ \ i = 1, ..., n$.

2. Tarkime, $\mathbf{X} = (X_i, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis, gauta stebint a. d. X, turintį *pusiau normalųjį skirstinį*, kurio parametras $\sigma > 0$ (žr. 1.P.2 lentelę). Parametro σ^2 NMD įvertinys yra

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \quad \frac{\hat{\sigma}^2 n}{\sigma^2} \sim \chi^2(n). \tag{3.7.14}$$

Pasikliovimo intervalą gauname analogišką (3.7.2) intervalui.

3. Tarkime, $\mathbf{X} = (X_i, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis, gauta stebint a. d. X, turintį *Relėjaus skirstinį*, kurio parametras $\sigma > 0$ (žr. 1.P.2 lentelę). Parametro σ^2 NMD įvertinys

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \quad \frac{2n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2n). \tag{3.7.15}$$

Pasikliovimo intervalą gauname analogiškai (3.7.2) intervalui.

3.7.4 pavyzdys. *Relėjaus skirstinio parametro taškinis ir intervalinis įverčiai.* Šaudant į taikinį yra išmatuotas atstumas nuo pataikymo vietos iki taikinio centro. Atlikus 20 šūvių, gauti tokie rezultatai:

3,56; 0,61; 1,88; 1,02; 2,03; 1,69; 0,57; 3,02; 4,11; 3,62; 1,27; 2,15; 1,91; 3,99; 2,78; 2,60; 2,41; 2,60; 2,31; 2,21.

Tardami, kad turimi duomenys yra paprastosios imties, gautos stebint a. d. turintį Relėjaus skirstinį, realizacija, rasime parametro σ^2 taškinio ir intervalinio ($Q = 0,95$) įvertinio realizacijas.

Randame

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \frac{127,1196}{40} = 3,1780.$$

Pasinaudoję 2 priedo 2.P.3 lentele gauname pasikliovimo intervalo rėžius:

$$\underline{\sigma^2} = \frac{40\hat{\sigma}^2}{59,342} = 2,142, \quad \overline{\sigma^2} = \frac{40\hat{\sigma}^2}{24,433} = 5,203.$$

4. Tarkime, $\mathbf{X} = (X_i, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis, gauta stebint a. d. X, turintį *Maksvelo skirstinį*, kurio parametras $\sigma > 0$ (žr. 1.P.2 lentelę). Parametro σ^2 NMD įvertinys yra

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \quad \frac{3n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(3n). \tag{3.7.16}$$

Pasikliovimo intervalą gauname analogiškai (3.7.2) intervalui.

5. Tarkime, $\mathbf{X} = (X_i, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis, gauta stebint a. d. X, turintį *Koši skirstinį*, kurio parametrai $-\infty < \mu < +\infty$, $\sigma > 0$ (žr. 1.P.2 lentelę). Net pirmasis šio skirstinio momentas neegzistuoja. Parametras μ yra skirstinio mediana, σ – mastelio parametras.

Parametro μ taškiniu įvertiniu imkime empirinę medianą $\hat{\mu} = \hat{x}_{0,5} = X_{([n/2]+1)}$. Asimptotiškai ($n \to \infty$) šis įvertinys yra normalusis (žr. 3.3.4 skyrelį):

$$\sqrt{n}(\hat{x}_{0,5} - \mu) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ \pi^2\sigma^2/4). \tag{3.7.17}$$

Parametro σ įvertinys

$$\hat{\sigma} = (\hat{x}_{0,25} - \hat{x}_{0,75})/2,$$

asimptotiškai ($n \to \infty$) yra normalusis (žr. 3.3.4 skyrelį):

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma} - \sigma) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ \pi^2\sigma^2/4). \tag{3.7.18}$$

Jeigu parametrus μ ir σ vertintume DT metodu, tai gautieji įvertiniai $\widetilde{\mu}$ ir $\widetilde{\sigma}$ būtų asimptotiškai normalieji ir efektyvieji. Įvertinių $\widetilde{\mu}$ ir $\widetilde{\sigma}$ asimptotinės dispersijos lygios $2\sigma^2/n$ (žr. 3.5.9 pavyzdį). Taigi įvertinių $\hat{\mu}$ ir $\hat{\sigma}$ ASE, palyginti su DT įvertiniais $\widetilde{\mu}$ ir $\widetilde{\sigma}$, yra $8/\pi^2 \approx 0,81$. Tai yra naudojant DT metodą, reikia apie 19 procentų mažiau stebinių tam pačiam tikslumui pasiekti. DT įvertinius galima rasti iteracijų metodu (žr. 3.5.2 skyrelį). Pirmuoju artiniu galime imti (3.7.17) ir (3.7.18) įvertinius.

Apytikslius parametrų pasikliovimo intervalus galima rasti naudojantis taškinių įvertinių asimptotiniais skirstiniais.

3.7.5 pavyzdys. *Koši skirstinio parametro įverčiai.* Stebint a.d $X \sim K(\mu,\ 1)$ gauta tokia didumo $n = 21$ paprastosios imties realizacija:

13,30; 1,78; -2,15; 6,88; 4,42; 3,51; 12,00; 4,64; 6,73; 4,98; 4,55; 7,23; 5,51; 3,22; 3,18; 5,40; 14,23; 5,42; 4,17; 4,00; 8,29.

Rasime parametro μ taškinį ir intervalinį ($Q = 0,95$) įverčius.

Momentų metodu (žr. 3.5.3 pastabą) parametro μ taškinis įvertinys yra empirinė mediana $\hat{x}(1/2)$. Pagal turimus duomenis šio įvertinio realizacija yra $\hat{\mu} = X_{(11)} = 4,98$. Apytikslį pasikliovimo intervalą gauname aproksimuodami normaliuoju skirstiniu su dispersija $\pi^2/(4n)$. Apytikslio pasikliovimo intervalo rėžiai:

$$\underline{\mu} = \hat{\mu} - \pi z_{0,025}/(2\sqrt{n}) = 4,3082, \quad \overline{\mu} = \hat{\mu} + \pi z_{0,025}/(2\sqrt{n}) = 5,6518.$$

Remiantis DT metodu (žr. 3.5.9 pavyzdį), parametro μ įverčiui rasti reikia spręsti lygtį

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{1 + (X_i - \mu)^2} = 0.$$

Išsprendę gauname taškinį įvertį $\tilde{\mu} = 4,7535$. Apytikslį pasikliovimo intervalą gauname aproksimuodami normaliuoju skirstiniu su dispersija $2/n$. Apytikslio pasikliovimo intervalo rėžiai:

$$\underline{\mu} = \tilde{\mu} - z_{0,025}\sqrt{2/n} = 4,1486, \quad \overline{\mu} = \tilde{\mu} + z_{0,025}\sqrt{2/n} = 5,3584.$$

3.7.5. Puasono skirstinys

1. Tarkime, paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $0 < \lambda < \infty$. Parametro λ pilnoji ir pakankamoji statistika yra $T = n\bar{X} = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$, todėl $\bar{X}$ yra parametro λ NMD įvertinys (žr. 3.2.1 ir 3.3.1 pavyzdžius).

Parametro λ pasikliovimo intervalas $(\underline{\lambda},\ \overline{\lambda})$, kai pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - 2\alpha$, surastas 3.6.1 pavyzdyje:

$$\underline{\lambda} = \frac{1}{2n}\chi^2_{1-\alpha}(2T), \quad \overline{\lambda} = \frac{1}{2n}\chi^2_{\alpha}(2T+2) \tag{3.7.19}$$

ir $\underline{\lambda} = 0$, kai $T = 0$.

2. Tarkime, $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_m)^T$ ir $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^T$ yra dvi paprastosios imtys, gautos stebint n. a. d. $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ ir $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, $0 < \lambda_1,\ \lambda_2 < \infty$. Statistika $\boldsymbol{T} = (T_1,\ T_2)^T$, $T_1 = X_1 + ... + X_m \sim \mathcal{P}(m\lambda_1)$, $T_2 = Y_1 + ... + Y_n \sim \mathcal{P}(n\lambda_2)$, yra pilnoji ir pakankamoji parametro $(\lambda_1,\ \lambda_2)^T$ statistika. Santykio $\beta = \lambda_1/\lambda_2$ pasikliovimo intervalas randamas remiantis tuo, kad a. d. T_1, kai suma $T_1 + T_2$ fiksuota, turi binominį skirstinį (žr. 4.4.2 skyrelį):

$$(T_1 | T_1 + T_2 = N) \sim B(N,\ p), \quad p = \frac{m\lambda_1}{m\lambda_1 + n\lambda_2}.$$

Suradę parametro p pasikliovimo intervalą $(\underline{p},\ \overline{p})$ (žr. 3.7.6 skyrelį), randame ir parametro β pasikliovimo intervalą, kurio rėžiai yra

$$\underline{\beta} = \frac{n}{m}\frac{\underline{p}}{1-\underline{p}}, \quad \overline{\beta} = \frac{n}{m}\frac{\overline{p}}{1-\overline{p}}. \tag{3.7.20}$$

3.7.6 pavyzdys. *Puasono skirstinių parametrų įverčiai.* Mieste per savaitę įvyko 15 autoavarijų. Kitais metais tame pačiame mieste per keturias savaites buvo užregistruotos 45 autoavarijos. Tardami, kad avarijų skaičiai per dieną yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a. d., turintys Puasono skirstinius su parametru λ_1 pirmuoju laikotarpiu ir parametru λ_2 antruoju laikotarpiu, rasime parametrų λ_1, λ_2, $\beta = \lambda_1/\lambda_2$ taškinius ir intervalinius $(Q = 0,95)$ įverčius.

Kadangi imties elementų suma yra pilnoji ir pakankamoji statistika, tai, darant išvadas apie parametrus, individualūs avarijų skaičiai kiekvieną dieną nėra reikalingi, o pakanka turėti tik pirmojo ir antrojo laikotarpio sumas S_1 ir S_2.

Parametrų λ_1 ir λ_2 NMD įvertinių realizacijos yra $\hat{\lambda}_1 = S_1/7 = 15/7 = 2,143$ ir $\hat{\lambda}_2 = S_2/28 = 45/28 = 1,607$. Parametro β nepaslinktasis įvertinys neegzistuoja (žr. 3.1.1 pavyzdį). Jeigu parametro β įvertiniu imsime $\hat{\beta} = nS_1/(m(S_2+1))$, tai $\mathbf{E}\hat{\beta} = \beta(1 - e^{-28\lambda_2}) \approx \beta$. Įvertinio realizacija $\hat{\beta} = 60/46 = 1,304$.

Parametrų λ_1 ir λ_2 pasikliovimo intervalus gauname pagal (3.7.19) pasinaudoję 2 priedo 2.P.3 lentele:

$$\underline{\lambda}_1 = \frac{1}{14}\chi^2_{0,975}(30) = 1,1994; \quad \overline{\lambda}_1 = \frac{1}{14}\chi^2_{0,025}(32) = 3,5343;$$

$$\underline{\lambda}_2 = \frac{1}{56}\chi^2_{0,975}(90) = 1,1772; \quad \overline{\lambda}_2 = \frac{1}{56}\chi^2_{0,025}(92) = 2,1505.$$

Parametro β pasikliovimo intervalą randame pagal (3.7.20). Tikimybės $p = 7\lambda_1/(7\lambda_1 + 28\lambda_2)$ pasikliovimo intervalas yra $(\underline{p};\ \overline{p}) = (0,147;\ 0,379)$ (žr.,pvz., [10], VIII lentelė). Tada

$$\underline{\beta} = \frac{28}{7}\frac{\underline{p}}{1-\underline{p}} = 0,689; \quad \overline{\beta} = \frac{28}{7}\frac{\overline{p}}{1-\overline{p}} = 2,441.$$

3.7.6. Binominis skirstinys

Tarkime, kad turime imtį $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^{\mathrm{T}}$, kurioje koordinatės yra nepriklausomos ir $X_i \sim B(m_i, p),\ i = 1, ..., n,\ 0 < p < 1$.

Statistika $T = X_1 + \cdots + X_n \sim B(m, p),\ m = m_1 + ... + m_n$ yra pilnoji ir pakankamoji. Statistikos T pasiskirstymo funkcija išreiškiama beta skirstinio tankio integralu:

$$F_T(k;p) = \sum_{i=0}^{k} C_m^i p^i (1-p)^{m-i} = I_{1-p}(m-k, k+1)$$

$$= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-k)\Gamma(k+1)} \int_0^{1-p} x^{m-k-1}(1-x)^k dx, \quad k = 0, 1, ..., m-1,$$

$$F_T(k;p) = 1, \text{ kai } k = m;$$

$$F_T(k-0;p) = \sum_{i=0}^{k-1} C_m^i p^i (1-p)^{m-i} = I_{1-p}(m-k+1, k),\ k = 1, 2, ..., m,$$

$$F_T(k-0;p) = 0, \text{ jei } k = 0.$$

Funkcijos I_i ir I_s yra tokios:

$$I_i(p;\mathbf{X}) = \begin{cases} I_{1-p}(m-T+1, T), & \text{jei } T = 1, \dots, m, \\ 0, & \text{jei } T = 0, \end{cases}$$

$$I_s(p;\mathbf{X}) = \begin{cases} I_{1-p}(m-T, T+1), & \text{jei } T = 0, \dots, m-1, \\ 1, & \text{jei } T = m. \end{cases}$$

Statistika $I_s(p;\mathbf{X})$ griežtai mažėja pagal p, jei $T<m$, o statistika $I_i(p;\mathbf{X})$ griežtai mažėja pagal p, jei $T>0$. Taigi parametro p apatinis $(1-\alpha_1)$ pasikliovimo rėžis $\underline{p}$ ir viršutinis $(1-\alpha_2)$ pasikliovimo rėžis $\overline{p}$ randami iš lygčių:

$$I_{1-\underline{p}}(m-T+1,T)=1-\alpha_1, \quad \text{jei} \quad k=1,2,...,m,$$

$$\underline{p}=\inf_{p\in(0,1)}p=0, \quad \text{jei} \quad T=0,$$

$$I_{1-\overline{p}}(m-T,T+1)=\alpha_2, \quad \text{jei} \quad T=0,\dots,m-1,$$

ir

$$\overline{p}=\sup_{p\in(0,1)}p=1, \quad \text{jei} \quad T=m.$$

Taigi

$$\underline{p}=\begin{cases} 1-\beta_{\alpha_1}(m-T+1,T), & \text{jei } T=1,\dots,m \\ 0, & \text{jei } T=0, \end{cases}$$

$$\overline{p}=\begin{cases} 1-\beta_{1-\alpha_2}(m-T,T+1), & \text{jei } T=0,\dots,m-1 \\ 1, & \text{jei } T=m; \end{cases} \tag{3.7.21}$$

čia $\beta_\alpha(a,b)$ yra beta skirstinio su parametrais a ir b lygmens α kritinė reikšmė.

Intervalas $(\underline{p},\overline{p})$ yra parametro p lygmens $(1-\alpha_1-\alpha_2)$-pasikliovimo intervalas.

3.7.5 pastaba. Jeigu n kartų realizuojami Bernulio eksperimentai, t. y. turime paprastąją imtį $\mathbf{X}=(X_1,...,X_n)^T$, gautą stebint a. d. $X\sim B(1,\ p)$, tai pateikiamose formulėse m reikia pakeisti imties didumu n.

3.7.7 pavyzdys. *Binominio skirstinio tikimybės taškinis ir intervalinis įverčiai.* Atliekant produkcijos kontrolę tam tikru kartotinumu atsitiktinai atrenkamos partijos po 5 gaminius ir užfiksuojamas defektinių gaminių skaičius X. Iš 100 patikrintų partijų 75 partijose defektinių gaminių nerasta; 22 partijose buvo po 1 defektinį; 2 partijose rasta po 2 defektinius ir 1 partijoje rasta 3 defektiniai gaminiai.

Tarkime, kad defektinio gaminio pagaminimo tikimybė p yra pastovi, o gero ar defektinio gaminio pasirodymas nepriklauso nuo kitų gaminių gerumo ar defektiškumo (Bernulio schema). Rasime tikimybės p taškinį ir intervalinį įverčius.

Tikimybės p NMD įvertinys yra įvykio pasirodymo santykinis dažnis $\hat{p}=S_n/n$; čia S_n yra defektinių gaminių skaičius, n bendras patikrintų gaminių skaičius. Šio įvertinio realizacija

$$\hat{p}=\frac{0\cdot 75+1\cdot 22+2\cdot 2+3\cdot 1}{500}=\frac{29}{500}=0,058.$$

Intervalinį įvertį gauname pagal (3.7.21);

$$\underline{p}=1-\beta_{0,025}(472;\ 29)=0,0392; \quad \overline{p}=\beta_{0,975}(471;\ 30)=0,0822.$$

Beta skirstinio kritines reikšmes galime rasti kompiuteriu netgi nenaudodami specialių matematinės statistikos programų paketų. Pavyzdžiui, naudojant visuotinai paplitusią programų sistemą EXCEL, pakanka aktyvinti funkciją "BETAINV".

Jeigu nėra galimybės pasinaudoti kompiuteriu, tai apytikslius pasikliovimo intervalus galime rasti naudodami kokias nors aproksimacijas. Pavyzdžiui, naudodami Muavro–Laplaso CRT gausime tokį apytikslį pasikliovimo intervalą

$$\underline{p}\approx\hat{p}-z_{0,025}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}=0,0375; \quad \overline{p}\approx\hat{p}+z_{0,025}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}=0,0785.$$

Jeigu iš anksto žinome, kad tikimybė p turėtų būti maža, tai galima naudoti aproksimaciją Puasono skirstiniu. Gauname tokį intervalą:

$$\underline{p}\approx\frac{1}{2n}\chi^2_{0,975}(58)=0,0388; \quad \overline{p}\approx\frac{1}{2n}\chi^2_{0,025}(60)=0,0833.$$

Matome, kad šiame pavyzdyje aproksimacija Puasono skirstiniu leidžia gauti tikslesnę pasikliovimo intervalo aproksimaciją. Keletą kitokių tikslesnių tikimybės pasikliovimo intervalų aproksimacijų galima rasti [5], [10].

3.7.7. Paskalio skirstinys

Tarkime, kad turime imtį $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$, kurioje koordinatės yra nepriklausomos ir $X_i \sim B^-(m_i,\ p),\ i = 1, ..., n,\ 0 < p < 1$. Sveikieji teigiamieji skaičiai $m_i,\ i = 1, ..., n$, yra žinomi.

Statistika $T = X_1 + \cdots + X_n \sim B^-(m, p),\ m = m_1 + \cdots + m_n$, yra pilnoji ir pakankamoji.

DT ir momentų metodais gauname tą patį įvertinį

$$\hat{p} = \frac{m}{m + T},$$

kuris yra paslinktasis. Asimptotiškai, kai $m \to \infty$, šis įvertinys yra normalusis kaip ir nepasliktasis įvertinys

$$\widetilde{p} = \frac{m-1}{m-1+T}, \quad \mathbf{E}_p(\widetilde{p}) = p, \tag{3.7.22}$$

$$\sqrt{m}(\widetilde{p} - p) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ p^2(1-p)).$$

Statistikos T pasiskirstymo funkcija išreiškiama beta skirstinio tankio integralu:

$$F_T(k; p) = \sum_{i=0}^{k} C_{m+i-1}^{m-1} p^m (1-p)^i = I_p(m, k+1) =$$

$$\frac{\Gamma(m+k+1)}{\Gamma(m)\Gamma(k+1)} \int_0^p x^{m-1}(1-x)^k dx, \quad k = 0, 1, ...,$$

$$F_T(k-0; p) = \sum_{i=0}^{k} C_{m+i-1}^{m-1} p^m (1-p)^i = I_p(m, k),\ k = 1, 2, ...,$$

$$F_T(0-0; p) = 0.$$

Bolševo teoremoje apibrėžtos funkcijos yra

$$I_i(p; \mathbf{X}) = \begin{cases} I_p(m, T), & \text{jei } T = 1, 2, ..., \\ 0, & \text{jei } T = 0, \end{cases}$$

$$I_s(p; \mathbf{X}) = I_p(m, T+1), \quad \text{kai} \quad T = 0, 1, ...$$

Reikia pažymėti, kad funkcija $I_s(p; \mathbf{X})$ yra griežtai didėjanti pagal p, jei $T \geq 0$, $I_i(p; \mathbf{X})$ yra griežtai didėjanti pagal p, jei $T \geq 1$. Taigi simetrinio parametro p pasikliovimo intervalo, kai pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - 2\alpha$, rėžiai yra

$$\underline{p} = \beta_{1-\alpha}(m, T+1), \quad T \geq 0,$$

$$\overline{p} = \begin{cases} \beta_\alpha(m, T), & \text{jei } T \geq 1, \\ 0, & \text{jei } T = 0. \end{cases} \tag{3.7.23}$$

3.7.6 pastaba. Jeigu turime paprastąją imtį $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^T$, gautą stebint geometrinį a. d. su parametru $0 < p < 1$, tai a. d. $X_i = Y_i - 1 \sim B^-(1,\ p)$. Taigi pirmesnėse formulėse statistika $T = (Y_1 - 1) + \cdots + (Y_n - 1)$, o m reikia pakeisti imties didumu n.

3.7.8. Neigiamasis binominis skirstinys

Tarkime, paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^{\mathrm{T}}$ gauta stebint a. d. $X \sim B^-(k,\ p)$, $0 < k < \infty,\ 0 < p < 1$. Skirtingai nuo Paskalio skirstinio, šiuo atveju dažnai būna nežinomi abu parametrai k ir p. Čia $k > 0$ nebūtinai sveikasis skaičius.

Momentų metodu gauname gana paprastą lygčių sistemą, iš kurios randame įvertinius

$$\hat{p} = \frac{\bar{X}}{s^2},\quad \hat{k} = \frac{\bar{X}^2}{(s^2 - \bar{X})}, \tag{3.7.24}$$

čia $\bar{X}$ ir s^2 empiriniai vidurkio ir dispersijos analogai.

Remiantis 2.5.5 teorema šie įvertiniai asimptotiškai ($n \to \infty$) nepaslinktieji ir normalieji

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z} \sim N_2(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\Sigma}),\quad \boldsymbol{\theta} = (p,\ k)^T,$$

čia $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]_{2\times 2}$; $\sigma_{11} = [p^2(1-p) + 2(1+k)]/k$, $\sigma_{22} = 2k(1+k)/(1-p)^2$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2p(1+k)/(1-p)$.

DT metodu gauname sudėtingesnę lygčių sistemą

$$\begin{cases} \widetilde{k} - \widetilde{p}(\widetilde{k} + \bar{X}) = 0, \\ \ln \widetilde{p} + \bar{Z} = 0; \end{cases} \tag{3.7.25}$$

čia

$$\bar{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i,\quad Z_i = \frac{\partial}{\partial \widetilde{k}} \ln \frac{\Gamma(\widetilde{k} + X_i)}{\Gamma(\widetilde{k})}.$$

DT lygčių sistemą galima išspręsti artutiniais metodais. Pradinis artinys gali būti apibrėžtas, pavyzdžiui, (3.7.24) formulėmis.

DT įvertinio $\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = (\widetilde{k},\ \widetilde{p})^T$ asimptotinį ($n \to \infty$) skirstinį gauname remdamiesi 3.5.3 teorema. Patikrinsime, ar tenkinamos teoremos sąlygos.

1) ir 2) sąlygos akivaizdžiai tenkinamos.

3) tikėtinumo funkcijos logaritmas (žymėsime $X = X_1$)

$$\ell_1 = \ell_1(\boldsymbol{\theta}) = \ln\Gamma(k + X) - \ln\Gamma(k) + X\ln q + k\ln p,$$

$$\dot{\ell}_{1p} = -\frac{X}{q} + \frac{k}{p},\quad \mathbf{E}(\dot{\ell}_{1p}|k, p) = 0,$$

$$\dot{\ell}_{1k} = \frac{\Gamma'(k+X)}{\Gamma(k+X)} - \frac{\Gamma'(k)}{\Gamma(k)} + \ln p.$$

Gauname

$$\mathbf{E}\left(\frac{\Gamma'(k+X)}{\Gamma(k+X)}|k, p\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma'(k+m)}{\Gamma(k+m)} \frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(k)m!} q^m p^k$$

$$= \frac{p^k}{\Gamma(k)} \int_0^{\infty} x^{k-1} \mathrm{e}^{-x} \ln x \sum_{m=0}^{\infty} x^m \frac{q^m}{m!} dx$$

$$= \frac{p^k}{\Gamma(k)} \int_0^\infty x^{k-1} \mathrm{e}^{-xp} \ln x dx = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty t^{k-1} \mathrm{e}^{-t} (\ln t - \ln p) dt$$

$$= \frac{\Gamma'(k)}{\Gamma(k)} - \ln p \Rightarrow \mathbf{E}(\dot{\ell}_{1k}|k, p) = 0.$$

Randame antrąsias išvestines:

$$\ddot{\ell}_{1p^2} = -\frac{X}{q^2} - \frac{k}{p^2}, \; i_{11} = -\mathbf{E}\ddot{\ell}_{1p^2} = \frac{k}{qp^2} = \mathbf{E}\dot{\ell}^2_{1p},$$

$$\ddot{\ell}_{1k^2} = \frac{\Gamma''(k+X)}{\Gamma(k+X)} - \left(\frac{\Gamma'(k+X)}{\Gamma(k+X)}\right)^2 - \frac{\Gamma''(k)}{\Gamma(k)} + \left(\frac{\Gamma'(k)}{\Gamma(k)}\right)^2.$$

Kadangi

$$\mathbf{E}\left(\frac{\Gamma''(k+X)}{\Gamma(k+X)}\right) = \frac{\Gamma''(k)}{\Gamma(k)} - 2\frac{\Gamma'(k)}{\Gamma(k)} \ln p + (\ln p)^2,$$

tai

$$i_{22} = -\mathbf{E}\ddot{\ell}_{1k^2} = \mathbf{E}\left(\frac{\Gamma'(k+X)}{\Gamma(k+X)}\right)^2 - \left(\frac{\Gamma'(k)}{\Gamma(k)} + \ln p\right)^2$$

$$= \boldsymbol{V}\left(\frac{\Gamma'(k+X)}{\Gamma(k+X)}\right) = \mathbf{E}(\dot{\ell}_{1k})^2,$$

$$\ddot{\ell}_{1pk} = \frac{1}{p}, \quad i_{12} = -\frac{1}{p} = \mathbf{E}(\dot{\ell}_{1p}\dot{\ell}_{1k}).$$

4) informacinė matrica

$$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}) = [i_{rs}]_{2\times 2}$$

teigiamai apibrėžta, nes tai kovariacinė matrica a. v. $(-X/q)$, $\Gamma'(k+X)/\Gamma(k+X)^T$, kurio koordinatės nėra tiesiškai išreiškiamos viena per kitą.

5) įvertiname iš viršaus trečiosios eilės išvestines:

$$|\dddot{\ell}_{1p^3}| = |\frac{2X}{q^3} + \frac{2k}{p^3}| \le (\frac{2}{q^3} + \frac{2k}{p^3})(1+X), \; \dddot{\ell}_{1p^2k} = \frac{2}{p^3};$$

$$\dddot{\ell}_{1pk^2} = 0; \; \dddot{\ell}_{1k^3} = (\ln\Gamma(k+X))'''_k - (\ln\Gamma(k))'''_k$$

$$= (\ln k + \cdots + \ln(k+X-1))'''_k \le \frac{2}{k^3}X.$$

Visais atvejais šios išvestinės yra parametro $\boldsymbol{\theta}$ funkcijų, kurios aprėžtos taško $\boldsymbol{\theta}_0$ aplinkoje, ir funkcijų nuo X, kurių vidurkis baigtinis, sandaugos.

Taigi pasinaudoję 3.5.3 teorema gauname, kad DT įvertinys asimptotiškai efektyvusis ir

$$\sqrt{n}(\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Y} \sim N_2(\mathbf{0}, \; \boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)). \tag{3.7.26}$$

3.7.9. Logaritminis skirstinys

Tegu paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_i, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. X, kurio skirstinys yra *logaritminis* (žr. 1.P.1 lentelę) ir priklauso nuo parametro $0 < p < 1$. Parametro p pakankamoji statistika yra $T = X_1 + \cdots + X_n$. Momentų ir DT metodais gaunami taškiniai įvertiniai $\hat{p}$ sutampa. Jie yra lygties

$$-\frac{1-p}{p \ln p} = \bar{X}$$

sprendinys p atžvilgiu. Tas įvertinys asimptotiškai ($n \to \infty$) efektyvusis ir normalusis:

$$\sqrt{n}(\hat{p} - p) \xrightarrow{d} Y \sim N\left(0,\ -\frac{qp^2 \ln^2 p}{q + \ln p}\right). \tag{3.7.27}$$

Iš čia galima gauti apytikslį pasikliovimo intervalą.

3.7.10. Hipergeometrinis skirstinys

Turime didumo N gaminių partiją, kurioje yra nežinomas skaičius M defektinių gaminių. Atsitiktinai negrąžinant imama n gaminių. Tegu X_i įgyja reikšmę 1, jeigu i-ame bandyme pateks defektinis gaminys, ir reikšmę 0 – priešingu atveju. Imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ elementai yra priklausomi, todėl imtis nėra paprastoji. Partijos didumas N ir imties didumas n paprastai yra žinomi, o defektinių gaminių skaičius M, $M = 0, 1, ..., N$ yra nežinomas parametras.

Parametro M pilnoji ir pakankamoji statistika yra $T = X_1 + \cdots + X_n \sim H(N, M, n)$.

Parametro $p = M/N$ NMD įvertinys yra

$$\hat{p} = \bar{X} = \frac{T}{n}; \quad \mathbf{E}(\hat{p}|M) = p, \quad \boldsymbol{V}(\hat{p}|M) = \frac{N-n}{n(N-1)} p(1-p). \tag{3.7.28}$$

Kartais prireikia įvertinti dispersiją $\boldsymbol{V}(\hat{p}|M)$. Nesunku patikrinti, kad įvertinys

$$\hat{\boldsymbol{V}}(\hat{p}|M) = \frac{N-n}{N(n-1)} \hat{p}(1-\hat{p})$$

tenkina lygybę

$$\mathbf{E}(\hat{\boldsymbol{V}}(\hat{p}|M)) = \boldsymbol{V}(\hat{p}|M).$$

Statistikos T pasiskirstymo funkcija

$$F(k,\ M) = \sum_{i=0}^{k} \frac{C_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n} = \sum_{i=0}^{k} h(i|N, M, n) = H(k|N, M, n),$$

$$F(k-0\ \ M) = H(k-1|N, M, n),$$

yra monotoniškai mažėjanti pagal M.

Parametro M apatinis $(1-\alpha)$ lygmens pasikliovimo rėžis $\underline{M}$ apibrėžiamas kaip didžiausias sveikasis skaičius, tenkinantis nelygybę

$$F(T-1,\ \underline{M}) \geq 1-\alpha, \tag{3.7.29}$$

o viršutinis $(1-\alpha)$ lygmens pasikliovimo rėžis $\overline{M}$ yra mažiausias sveikasis skaičius, tenkinantis nelygybę

$$F(T,\ \overline{M}) \leq \alpha. \tag{3.7.30}$$

3.7.8 pavyzdys. *Hipergeometrinio skirstinio parametro įverčiai.* Į atrankinę kontrolę pateko didumo $N=300$ gaminių partija, kurioje yra nežinomas skaičius M defektinių gaminių. Kontrolės metu atsitiktinai, negrąžinant atrinkta ir patikrinta $n=50$ gaminių ir tarp jų surasta 6 defektiniai gaminiai. Rasime parametro M taškinį ir intervalinį $(Q=0,95)$ įverčius.

Parametro M NMD įvertinys $\hat{M}=NX/n$; čia X yra a. d., žymintis defektinių gaminių skaičių tarp atrinktųjų. Šiame pavyzdyje įvertinio $\hat{M}$ realizacija yra $\hat{M}=300\cdot 6/50=36$.

Pasikliovimo intervalo rėžiams rasti reikia išspręsti (3.7.29) ir (3.7.30) nelygybes. Gauname

$$H(5|300,\ M,\ 50)\geq 0,95 \quad\Leftrightarrow\quad M\leq 13, \quad H(6|300,\ M,\ 50)\leq 0,05 \quad\Leftrightarrow\quad M\geq 58.$$

Taigi pasikliovimo intervalo rėžiai yra $\underline{M}=13$, $\overline{M}=58$.

3.7.11. Gama skirstinys

1. Iš pradžių nagrinėsime gama skirstinį, priklausantį nuo vieno nežinomo parametro. Tarkime, imties $\mathbf{X}=(X_1,...,X_n)^T$ koordinatės yra n. a. d. ir $X_i\sim G(\lambda,\ \eta_i),\ i=1,...,n,\ 0<\lambda<\infty$. Parametrai $\eta_1,...,\eta_n$ yra žinomi.

Parametro λ pilnoji ir pakankamoji statistika yra $T=X_1+\cdots+X_n\sim G(\lambda,\ \eta),\ \eta=\eta_1+\cdots+\eta_n$. Parametro λ NMD įvertinys yra

$$\hat{\lambda}=\frac{\eta-1}{T}, \quad \mathbf{E}_\lambda(\hat{\lambda})=\lambda, \quad \boldsymbol{V}_\lambda(\hat{\lambda})=\frac{\lambda^2}{\eta-2}. \tag{3.7.31}$$

Ieškodami pasikliovimo intervalo, remiamės tuo, kad a. d. (žr. 1.P.3 lentelę)

$$Y=2\lambda T\sim\chi^2(2\eta).$$

Gauname pasikliovimo intervalą, kai pasikliovimo lygmuo $Q=1-2\alpha$, rėžius

$$\underline{\lambda}=\frac{\chi^2_{1-\alpha}(2\eta)}{2T}, \qquad \overline{\lambda}=\frac{\chi^2_{\alpha}(2\eta)}{2T}. \tag{3.7.32}$$

3.7.7 pastaba. Parametras η dažnai būna žinomas, kai turime eksponentinį skirstinį $(\eta=1)$ arba Erlango skirstinį (η – sveikasis teigiamasis skaičius). Primename, kad, turint kokių nors įvykių (signalų, gedimo momentų ir pan.) puasoninį srautą, atstumas tarp dviejų gretimų taškų yra eksponentinis a. d., o atstumas tarp k gretimų taškų (k – nepriklausomų eksponentinių a. d. suma) yra Erlango skirstinys, kurio antrasis parametras $\eta=k$.

3.7.8 pastaba. Kartais eksponentinis arba Erlango skirstinys apibrėžiamas naudojant parametrą $\theta = 1/\lambda$. Suprantama, kad θ pasikliovimo intervalas tiesiogiai gaunamas iš (3.7.32) formulių:

$$\underline{\theta} = \frac{1}{\overline{\lambda}}, \quad \overline{\theta} = \frac{1}{\underline{\lambda}}. \tag{3.7.33}$$

Parametro θ NMD įvertinys yra

$$\hat{\theta} = \frac{T}{\eta}, \quad \boldsymbol{V}_\theta(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{\eta}.$$

3.7.9 pavyzdys. *Eksponentinio skirstinio parametro taškinis ir intervalinis įverčiai.* Atliekant patikimumo bandymus buvo išbandyta 50 gaminių ir užregistruotas jų darbo laikas iki gedimo:

4,14; 0,58; 11,08; 1,13; 1,26; 5,35; 1,84; 0,26; 4,36; 0,65; 11,45; 1,46; 8,58; 3,46; 5,03; 1,51; 1,31; 14,99; 9,29; 3,22; 4,39; 29,70; 4,35; 8,20; 1,77; 5,07; 0,01; 1,17; 13,73; 4,30; 0,53; 2,70; 5,64; 2,78; 1,95; 13,30; 2,49; 2,40; 3,85; 3,12; 12,75; 0,61; 1,57; 6,06; 1,44; 0,32; 3,71; 2,13; 5,37; 8,88.

Tarę, kad stebėjimai yra paprastosios imties, gautos stebint a. d. $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ turintį eksponentinį skirstinį, realizacija, rasime parametro λ taškinį ir intervalinį ($Q = 0,9$) įverčius.

Parametro λ NMD įvertinys pagal (3.7.31) yra $\hat{\lambda} = (n-1)/T$, $T = \sum_{i=1}^n X_i$. Gauname jo realizaciją $\hat{\lambda} = 49/245,24 = 0,1998$.

Pasikliovimo intervalą gauname pagal (3.7.32), pasinaudoję 2 priedo 3.P.3 lentele

$$\underline{\lambda} = \frac{\chi^2_{0,975}(100)}{2T} = \frac{74,222}{490,48} = 0,1513, \quad \overline{\lambda} = \frac{\chi^2_{0,025}(100)}{2T} = \frac{129,561}{490,48} = 0,2642.$$

2. Bendresniu atveju abu gama skirstinio parametrai yra nežinomi. Tarkime, paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim G(\lambda,\ \eta)$, $0 < \lambda,\ \eta < \infty$. Parametro $\boldsymbol{\theta} = (\lambda,\ \eta)^T$ pilnoji ir pakankamoji statistika yra $\boldsymbol{T} = (T_1,\ T_2)^T = (\sum_i X_i,\ \prod_i X_i)^T$.

Momentų metodu gauname įvertinius

$$\hat{\lambda} = \frac{\bar{X}}{s^2},\ \hat{\eta} = \frac{\bar{X}^2}{s^2}. \tag{3.7.34}$$

Remiantis 2.5.5 teorema šie įvertiniai asimptotiškai ($n \to \infty$) nepaslinktieji ir normalieji

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z} \sim N_2(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\Sigma}),$$

čia $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]_{2\times 2}$; $\sigma_{11} = \lambda^2(3+2\eta)/\eta$, $\sigma_{22} = 2\eta(1+\eta)$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\lambda(1+\eta)$.

DT metodu taškinius įvertinius randame iš lygčių sistemos

$$\begin{cases} n\widetilde{\eta} - \widetilde{\lambda}T_1 = 0, \\ n \ln \widetilde{\lambda} - n(\ln \Gamma(\widetilde{\eta}))' + \ln T_2 = 0. \end{cases}$$

Šie įvertiniai (remiantis 3.5.3 teorema) asimptotiškai ($n \to \infty$) efektyvieji ir normalieji

$$\sqrt{n}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Y} \sim N_2(\mathbf{0},\ \boldsymbol{G}); \tag{3.7.35}$$

čia $\boldsymbol{G} = [g_{ij}]_{2\times 2}$; $g_{11} = a\lambda^2/(a\eta - 1)$, $g_{22} = \eta/(a\eta - 1)$, $g_{12} = g_{21} = \lambda/(a\eta - 1)$, $a = (\ln \Gamma(\eta))''$.

3.7.12. Beta skirstinys

Tarkime, paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim Be(\gamma,\ \eta)$, $0 < \gamma, \eta < \infty$. Skirstinys priklauso dviparametrių eksponentinių skirstinių šeimai. Pilnoji ir pakankamoji statistika yra $\boldsymbol{T} = (T_1,\ T_2)^T = (\prod_i X_i,\ \prod_i (1 - X_i))^T$.

Momentų metodu randame parametrų taškinius įvertinius (žr. 3.5.2 pavyzdį):

$$\hat{\gamma} = \bar{X}\left(\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{s^2} - 1\right),\ \hat{\eta} = (1-\bar{X})\left(\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{s^2} - 1\right). \tag{3.7.36}$$

DT metodu įvertiniui $\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = (\widetilde{\gamma},\ \widetilde{\eta})^T$ rasti turime γ ir η atžvilgiu lygčių sistemą

$$\begin{cases} nB_{10}(\gamma,\eta) = B(\gamma,\eta)\ln T_1, \\ nB_{01}(\gamma,\eta) = B(\gamma,\eta)\ln T_2. \end{cases} \tag{3.7.37}$$

Dėl trumpumo beta funkcija pažymėta $B = B(\gamma,\eta) = B_{00}(\gamma,\eta)$ ir

$$B_{rs} = B_{rs}(\gamma,\eta) = \frac{\partial^{r+s}}{\partial\gamma^r\partial\eta^s}B(\gamma,\eta),\ r,s = 0,1,\cdots.$$

Pritaikę 3.5.3 teoremą (žr. 3.5.9 pavyzdį), gauname, kad įvertinys $\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = (\widetilde{\gamma},\ \widetilde{\eta})^T$ asimptotiškai efektyvusis ir normalusis, t. y.

$$\sqrt{n}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Y} \sim N_2(\mathbf{0},\ \boldsymbol{i}^{-1}(\gamma,\eta)),$$

o informacinės matricos $\boldsymbol{i} = [i_{rs}]_{2\times 2}$ elementai yra

$$i_{11} = \frac{B_{20}B - B_{10}^2}{B^2},\ i_{22} = \frac{B_{02}B - B_{01}^2}{B^2},$$

$$i_{12} = i_{21} = \frac{B_{11}B - B_{10}B_{01}}{B^2}.$$

3.7.13. Ekstremaliųjų reikšmių skirstiniai

Tarkime, paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. X, kurio skirstinys priklauso ekstremaliųjų reikšmių skirstinių aibei su parametrais $-\infty < \mu < +\infty$, $0 < \sigma < +\infty$ (žr. 1.P.2 lentelę).

1. *Minimaliųjų reikšmių skirstinys.* Egzistuoja tik triviali pakankama statistika, todėl sumažinti imties dimensiją neprarandant informacijos negalima.

Momentų išraiškos gana paprastos. A. d. $Z = (X-\mu)/\sigma$ pradiniai momentai yra

$$\alpha_k = \mathbf{E}Z^k = \int_0^\infty (\ln x)^k e^{-x}dx = \Gamma^{(k)}(1), \quad k = 1,2,...,$$

čia $\Gamma^{(k)}(1)$ yra gama funkcijos k-oji išvestinė taške 1. Turėdami šiuos momentus, jais galime išreikšti ir centrinius a. d. Z momentus $\mu_k = \mathbf{E}(Z - \mathbf{E}Z)^k$:

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \Gamma^{(2)}(1) - [\Gamma^{(1)}(1)]^2, \quad \alpha_1 = \Gamma^{(1)}(1) = -\gamma,$$

$$\mu_3 = \Gamma^{(3)}(1) - 3\Gamma^{(2)}(1)\Gamma^{(1)}(1) + 2(\Gamma^{(1)}(1))^3,$$
$$\mu_4 = \Gamma^{(4)}(1) - 4\Gamma^{(3)}(1)\Gamma^{(1)}(1) + 6\Gamma^{(2)}(1)(\Gamma^{(1)}(1))^2 - 3(\Gamma^{(1)}(1))^4.$$

Apytikslės momentų reikšmės:

$$\alpha_1 = -\gamma \approx -0,5772, \quad \mu_2 = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449, \quad \mu_3 \approx -2,4041, \quad \mu_4 \approx 14,6114.$$

A. d. X pirmieji momentai yra

$$\mathbf{E}X = \mu - \gamma\sigma \approx \mu - 0,5772\sigma, \quad \mathbf{E}(X-\mu)^2 = \sigma^2\frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449\sigma^2.$$

Randame parametrų μ ir σ įvertinius momentų metodu:

$$\hat{\mu} = \bar{X} + \gamma\hat{\sigma} \approx \bar{X} - 0,5772\hat{\sigma}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}s \approx 0,7797s. \tag{3.7.38}$$

Remdamiesi 2.5.5 teorema, gauname, kad šie įvertiniai asimptotiškai nepaslinktieji ir normalieji.

$$\sqrt{n}(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Y} \sim N_2(\mathbf{0},\ \mathbf{\Sigma}).$$

Kovariacinės matricos $\mathbf{\Sigma} = [\sigma_{ij}]_{2\times 2}$ elementai yra tokie:

$$\sigma_{11} = \sigma^2\left(\mu_2 + \frac{3\gamma^2(\mu_4 - \mu_2^2)}{2\pi^2\mu_2} - \frac{\gamma\sqrt{6}\mu_3}{\pi\sqrt{\mu_2}}\right) \approx 1,168\sigma^2,$$

$$\sigma_{22} = \sigma^2\frac{3(\mu_4 - \mu_2^2)}{2\pi^2\mu_2} \approx 1,1\sigma^2,$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma^2\left(-\frac{3\gamma(\mu_4 - \mu_2^2)}{2\pi^2\mu_2} + \frac{\sqrt{6}\mu_3}{2\pi\sqrt{\mu_2}}\right) \approx -0,096\sigma^2.$$

Ieškant parametro $\boldsymbol{\theta} = (\mu,\ \sigma)^T$ DT įvertinio $\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = (\widetilde{\mu},\ \widetilde{\sigma})^T$, reikia μ ir σ atžvilgiu spręsti lygčių sistemą

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{n}\sum_i \exp\{\frac{X_i-\mu}{\sigma}\} = 1, \\ \frac{1}{n}\sum_i \frac{X_i-\mu}{\sigma}(1+\exp\{\frac{X_i-\mu}{\sigma}\}) = 1. \end{array} \right. \tag{3.7.39}$$

Ją galima išspręsti iteracijų metodu, pradiniu artiniu pasirinkus, pavyzdžiui, (3.7.38) įvertinius.

DT įvertinių savybes galime gauti pasinaudoję 3.5.3 teorema. Patikrinsime, ar tenkinamos šios teoremos sąlygos.

1) ir 2) sąlygos akivaizdžiai tenkinamos.

3) Vieno imties nario tikėtinumo funkcijos logaritmas yra

$$\ell_1(\boldsymbol{\theta}) = \ell_1(\mu,\ \sigma) = -\ln\sigma + \frac{X-\mu}{\sigma} - \exp\{\frac{X-\mu}{\sigma}\}.$$

Randame informantes:

$$\dot\ell_{1\mu} = -\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}\exp\{\frac{X-\mu}{\sigma}\},$$

$$\dot\ell_{1\sigma} = -\frac{1}{\sigma} - \frac{X-\mu}{\sigma^2}(1-\exp\{\frac{X-\mu}{\sigma}\}),$$

$$\mathbf{E}(\exp\{\frac{X-\mu}{\sigma}\}) = \frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{\frac{x-\mu}{\sigma}\}\exp\{\frac{x-\mu}{\sigma} - \exp\{\frac{x-\mu}{\sigma}\}\}dx$$

$$= \int_0^\infty t\mathrm{e}^{-t}dt = 1,$$

$$\mathbf{E}(\frac{X-\mu}{\sigma}(1-\exp\{\frac{X-\mu}{\sigma}\})) = \int_0^\infty (1-t)\ln t\,\mathrm{e}^{-t}dt$$

$$= [\Gamma(x) - \Gamma(x+1)]'_{x=1} = [(1-x)\Gamma(x)]'_{x=1} = -\Gamma(1) = -1.$$

Taigi

$$\mathbf{E}(\dot\ell_{1\mu}|\mu,\sigma) = 0,\ \mathbf{E}(\dot\ell_{1\sigma}|\mu,\sigma) = 0.$$

Randame antrąsias išvestines:

$$\ddot\ell_{1\mu^2} = -\frac{1}{\sigma^2}\exp\{\frac{X-\mu}{\sigma}\},\ i_{11} = -\mathbf{E}(\ddot\ell_{1\mu^2}) = \frac{1}{\sigma^2},$$

$$\ddot\ell_{1\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}(1 + 2\frac{X-\mu}{\sigma} - \exp\{\frac{X-\mu}{\sigma}\}(2\frac{X-\mu}{\sigma} + (\frac{X-\mu}{\sigma})^2)),$$

$$i_{22} = -\mathbf{E}(\ddot\ell_{1\sigma^2}) = -\frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty (1 + 2\ln t - t(2\ln t + \ln^2 t))\mathrm{e}^{-t}dt$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}(1 + 2\Gamma'(1) + \Gamma''(1)),$$

$$\ddot\ell_{1\mu\sigma} = \frac{1}{\sigma^2}(1 - \exp\{\frac{X-\mu}{\sigma}\}(1 + \frac{X-\mu}{\sigma})),$$

$$i_{12} = -\mathbf{E}(\ddot\ell_{1\mu\sigma}) = -\frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty (1 - t(1+\ln t))\mathrm{e}^{-t}dt$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}(1 + \Gamma'(1)).$$

Lieka patikrinti, ar $\mathbf{E}(\dot\ell_1\dot\ell_1^T) = -\mathbf{E}(\ddot\ell_1)$:

$$\mathbf{E}(\dot\ell_{1\mu})^2 = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty (1-t)^2\mathrm{e}^{-t}dt = \frac{1}{\sigma^2},$$

$$\mathbf{E}(\dot\ell_{1\sigma})^2 = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty (1 + (1-t)\ln t(2 + (1-t)\ln t))\mathrm{e}^{-t}dt$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}(1 + 2\Gamma'(1) + \Gamma''(1)),$$

$$\mathbf{E}(\dot{\ell}_{1\mu}\dot{\ell}_{1\sigma}) = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty (1-t)(1+(1-t)\ln t)\mathrm{e}^{-t}dt$$
$$= \frac{1}{\sigma^2}(1+\Gamma'(1)).$$

4) Informacinė matrica $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}) = [i_{rs}]_{2\times 2}$ teigiamai apibrėžta, nes tai kovariacinė matrica a. v. $(\exp\{Y\},\ Y(1-\exp\{Y\}))$, kurio koordinatės nėra tiesiškai susijusios; čia $Y = (X-\mu)/\sigma$.

5) Visos trečiosios eilės funkcijos ℓ_1 išvestinės yra tokio pavidalo:

$$\frac{1}{\sigma^3}h(X) = \frac{1}{\sigma^3}(c_1 + c_2 Y + c_3 Y^2)(1 + c_4\mathrm{e}^Y);$$

čia c_i, $i = 1, ..., 4$ – konstantos. Parametro $\boldsymbol{\theta}$ funkcija $1/\sigma^3$ taško $\boldsymbol{\theta}_0$ aplinkoje aprėžta, o funkcija $|h(X)|$ – integruojama.

Taigi visos 3.5.3 teoremos sąlygos tenkinamos, o DT įvertinys $\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = (\widetilde{\mu},\ \widetilde{\sigma})^T$ yra asimptotiškai efektyvusis ir normalusis:

$$\sqrt{n}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z} \sim N_2(\mathbf{0},\ \boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta})). \tag{3.7.40}$$

Pasinaudoję momentų reikšmėmis, gauname DT įvertinių asimptotinės matricos $\boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = [\gamma_{ij}]_{2\times 2}$ elementų apytiksles reikšmes:

$$\gamma_{11} \sim 1,109\sigma^2, \quad \gamma_{22} \sim 0,608\sigma^2, \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} \sim -0,257\sigma^2.$$

2. *Maksimaliųjų reikšmių skirstinys*

Kadangi šis skirstinys yra pirmiau nagrinėto skirstinio veidrodinis atspindys (žr. 1.P.2 lentelę), tai įverčius randame analogiškai. Momentų metodu gauname

$$\hat{\mu} = \bar{X} + \gamma\hat{\sigma},\ \hat{\sigma} = \frac{s\sqrt{6}}{\pi}. \tag{3.7.41}$$

Pritaikę DT metodą, sudarome tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_i \exp\{-\frac{X_i-\mu}{\sigma}\} = 1, \\ \frac{1}{n}\sum_i \frac{X_i-\mu}{\sigma}(1-\exp\{-\frac{X_i-\mu}{\sigma}\}) = 1. \end{cases} \tag{3.7.42}$$

Asimptotinių skirstinių kovariacinių matricų elementai lieka tokie patys, tik kovariacijos ženklą reikia pakeisti priešingu.

3.7.14. Veibulo skirstinys

Tarkime, paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim W(\sigma, \nu)$, kurio tankis

$$f(x,\ \sigma, \nu) = \frac{\nu}{\sigma^\nu}x^{\nu-1}\exp\{-(\frac{x}{\sigma})^\nu\}, x > 0,\ 0 < \nu, \sigma < \infty.$$

Nagrinėkime a. d. $Y = \ln X$, kurio tankis

$$g(y, \sigma, \nu) = \nu\exp\{\nu(y - \ln\sigma) - \exp\{\nu(y - \ln\sigma)\}\},\ y \in \boldsymbol{R}$$

sutampa su minimaliųjų reikšmių skirstinio tankiu, parametrus μ ir σ pakeitus į $\ln\sigma$ ir $1/\nu$. Tada iš (3.7.38) formulių gauname įvertinius

$$\hat{\sigma} = \exp\{\bar{Y} + \gamma s\frac{\sqrt{6}}{\pi}\}, \qquad \hat{\nu} = \frac{\pi}{s\sqrt{6}}; \tag{3.7.43}$$

čia $\bar{Y}$ ir s^2 yra empiriniai vidurkio ir dispersijos analogai, gauti pagal imtį $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^T$.

Šiuos įvertinius galima panaudoti kaip pradinį artinį, ieškant įvertinių DT metodu. DT metodo taikymas Veibulo skirstiniui detaliai išnagrinėtas 3.5.8 pavyzdyje. Buvo gauta, kad DT įvertiniai $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\nu}$ tenkina lygčių sistemą

$$\begin{cases} \widetilde{\sigma} = (\frac{1}{n}\sum_i X_i^{\widetilde{\nu}})^{1/\widetilde{\nu}}, \\ \frac{1}{\widetilde{\nu}} + \frac{1}{n}\sum_i \ln X_i - \sum_i \frac{X_i^{\widetilde{\nu}}\ln X_i}{\sum_i X_i^{\widetilde{\nu}}} = 0. \end{cases} \tag{3.7.44}$$

Asimptotiškai DT įvertinys $\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = (\widetilde{\sigma},\ \widetilde{\nu})^T$ yra efektyvusis ir normalusis, t. y.

$$\sqrt{n}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z} \sim N_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{i}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{\theta_0})), \tag{3.7.45}$$

o informacinės matricos $\boldsymbol{i} = [i_{rs}]_{2\times 2}$ elementai yra tokie:

$$i_{11} = \frac{\nu^2}{\sigma^2},\ i_{22} = \frac{1+\Gamma''(2)}{\nu^2}, i_{12} = i_{21} = -\frac{\Gamma'(2)}{\sigma}.$$

3.7.15. Eksponentinis skirstinys

1. *Pirmojo tipo cenzūravimas.* Fiksuojame eksperimento laiką t ir stebime n objektų. Tegu jų gyvavimo trukmės $T_1, ..., T_n$ yra absoliučiai tolydūs vienodai pasiskirstę n. a. d. su pasiskirstymo funkcija $F(t,\ \lambda), \lambda \in (0, \infty)$ ir tankiu $f(t,\ \lambda)$. Atsitiktinio dydžio T_i reikšmė t_i stebima tik tada, kai $t_i \le t$. Pažymėkime

$$X_i = \min(T_i,\ t), \quad \delta_i = \mathbf{1}_{(0,t]}(T_i).$$

Tada turime imtį $(X_1,\ \delta_1), ..., (X_n,\ \delta_n)$. Pavyzdyje 3.5.7 gavome šios imties tikėtinumo funkciją

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f^{\delta_i}(X_i,\ \lambda)[1 - F(X_i,\ \lambda)]^{1-\delta_i}.$$

Jeigu a. d. $T_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$ turi eksponentinį skirstinį, tai tikėtinumo funkcija

$$L(\lambda) = \lambda^D \mathrm{e}^{-\lambda S},\ D = \sum_{i=1}^{n}\delta_i,\ S = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Gauname

$$\ell(\lambda) = D\ln\lambda - \lambda S, \quad \dot{\ell}(\lambda) = \frac{D}{\lambda} - S$$

ir parametro λ DT įvertinys yra

$$\hat{\lambda} = \frac{D}{S}.$$

Kadangi informacijos apie parametrą λ kiekis yra $-\ddot{\ell}(\lambda) = D/\lambda^2$, tai įvertinio $\hat{\lambda}$ dispersiją galima įvertinti dydžiu $\hat{\lambda}^2/D$. Gauname parametro θ apytikslį lygmens $1-2\alpha$ pasikliovimo intervalą

$$\underline{\lambda} = \hat{\lambda}(1 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{D}}),\ \underline{\lambda} = \hat{\lambda}(1 + \frac{z_\alpha}{\sqrt{D}}). \tag{3.7.46}$$

3.7.10 pavyzdys. (**3.7.9** pavyzdžio tęsinys) *Eksponentinio skirstinio parametro taškinis ir intervalinis įverčiai.* Tarkime, kad 3.7.9 pavyzdžio sąlygomis gaminiai buvo stebimi intervale $[0,\ 8]$, o nesugedusių šiame intervale gaminių gedimų momentai nebuvo žinomi. Rasime parametro λ taškinį ir intervalinį ($Q = 0,95$) įverčius.

Gauname

$$D = 39, \quad S = \sum_{X_i \le 8} X_i + (n - D) \cdot 8 = 191,29, \quad \hat{\lambda} = \frac{D}{S} = 0,2039.$$

Pasikliovimo intervalą randame pagal (3.7.46)

$$\underline{\lambda} = \hat{\lambda}(1 - z_{0,025}/\sqrt{D}) = 0,1399, \quad \overline{\lambda} = \hat{\lambda}(1 + z_{0,025}/\sqrt{D}) = 0,2679.$$

2. *Antrojo tipo cenzūravimas.* Tarkime, kad gaminių stebėjimo trukmė nėra fiksuota. Stebėjimai atliekami tol, kol bus sulaukta r gedimo momentų, t. y. stebimos variacinės eilutės $T_{(1)} \le \cdots \le T_{(n)}$ pirmosios r pozicinių statistikų $\mathbf{X} = (T_{(1)}, T_{(2)}, ..., T_{(r)})^T$.

Ieškosime parametro λ ir patikimumo funkcijos

$$S(x,\ \lambda) = \mathbf{P}_\lambda\{T > x\}$$

pasikliovimo intervalų.

Įrodysime, kad statistika

$$T = \sum_{k=1}^{r} X_{(k)} + (n-r)X_{(r)}$$

turi gama skirstinį $G(\lambda,\ r)$. Iš 3.3.4 skyrelio žinome, kad a. v. $\mathbf{X} = (T_{(1)}, T_{(2)}, ..., T_{(r)})^T$ tankis yra

$$f(x_1, \ldots, x_r) = \frac{n!}{(n-r)!}\lambda^r \exp\left\{-\lambda\left(\sum_{i=1}^{r} x_i + (n-r)x_r\right)\right\}.$$

Reikia pažymėti, kad

$$T = nT_{(1)} + (n-1)(T_{(2)} - T_{(1)}) + \cdots + (n-r+1)(T_{(r)} - T_{(r-1)}) = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_r;$$

čia $Z_i = (n-i+1)(X_{(i)} - X_{(i-1)})$, $X_{(0)} = 0$. Atliekame kintamųjų keitimą: $z_i = (n-i+1)(x_i - x_{i-1})$, $i = 1, \dots, r$. Pakeitimo jakobianas

$$J = \left|\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right|^{-1}_{r\times r} = \frac{(n-r)!}{n!}.$$

Atsitiktinio vektoriaus $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \dots, Z_r)^T$ tankis yra

$$g(z_1, \dots, z_r) = \lambda^r \exp\{-\lambda \sum_{i=1}^r z_i\} = \prod_{i=1}^n \lambda \mathrm{e}^{-\lambda z_i}.$$

Taigi a. d. $Z_1, \dots, Z_r$ yra vienodai pasiskirstę n. a. d. $Z_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$, ir $T = Z_1 + \dots Z_r \sim G(\lambda, r)$.

Kadangi $2T\lambda \sim \chi^2(2r)$, tai iš čia gauname parametro λ pasikliovimo intervalo, kai pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - 2\alpha$, rėžius:

$$\underline{\lambda} = \frac{\chi^2_{1-\alpha}(2r)}{2T}, \qquad \overline{\lambda} = \frac{\chi^2_\alpha(2r)}{2T}. \tag{3.7.47}$$

Patikimumo funkcija $S(x;\lambda) = \mathrm{e}^{-x\lambda}$ mažėja pagal λ, todėl

$$\underline{S}(x) = \mathrm{e}^{-x\overline{\lambda}} \qquad \overline{S}(x) = \mathrm{e}^{-x\underline{\lambda}}. \tag{3.7.48}$$

3.7.11 pavyzdys. (**3.7.9** pavyzdžio tęsinys) *Eksponentinio skirstinio parametro taškinis ir intervalinis įverčiai.* Tarkime, kad 3.7.9 pavyzdžio sąlygomis gaminiai buvo stebimi tol, kol suges 40 gaminių. Rasime parametro λ ir $S(5)$ taškinį ir intervalinį ($Q = 0,95$) įverčius.

Gauname

$$r = 40, \quad X_{(40)} = 8,58, \quad T = \sum_{i=1}^r X_{(i)} + X_{(40)}(n-r) = 197,89, \quad \hat{\lambda} = \frac{r}{T} = 0,2021.$$

Pasikliovimo intervalus randame pagal (3.7.47) ir (3.7.48) naudodami 2 priedo 2.P.3 lentelę

$$\underline{\lambda} = \frac{\chi^2_{1-\alpha}(2r)}{2T} = \frac{\chi^2_{0,975}(80)}{2\cdot 197,89} = 0,1444, \quad \overline{\lambda} = \frac{\chi^2_\alpha(2r)}{2T} = \frac{\chi^2_{0,025}(80)}{2\cdot 197,89} = 0,2694;$$

$$\underline{S}(5) = \mathrm{e}^{-5\overline{\lambda}} = 0,2600, \quad \overline{S}(5) = \mathrm{e}^{-5\underline{\lambda}} = 0,4858.$$

3.7.16. Mizeso atsitiktinių kampų skirstinys

Atsitiktinių kampų (arba juos atitinkančių taškų ant apskritimo ar sferos) stebėjimų aptinkami daugelyje praktikos sričių. Pavyzdžiui, geologijoje tiriant įvairių paviršių ar linijų orientaciją; meteorologijoje aprašant vėjo krypčių pasiskirstymą; biologijoje tiriant paukščių orientavimąsi migracijos metu; geografijoje tiriant žemės drebėjimo epicentrų išsidėstymą; laiko eilutės ekonomikoje ar medicinoje, kai stebimas periodinis reiškinys ir žinomas jo periodas; astronomijoje tiriant dangaus kūnų išsidėstymą ir kt.

Gana išsamų šios svarbios matematinės statistikos srities taikymų aptarimą ir plačią bibliografiją galima rasti knygoje [14]. (Rekomenduojame naudotis knygos vertimu į rusų kalbą, nes, redaguojant vertimą (redaktorius L.N.Bolševas), ištaisytos originalo klaidos ir padaryta daug patobulinimų). Šioje monografijoje išdėstyti tikimybinių modelių, aprašančių atsitiktinį taškų išsidėstymą ant apskritimo, kūrimo pagrindai, taip pat tokių modelių statistinė analizė iliustruojama konkrečiais pavyzdžiais. Atsitiktinių kampų tikimybiniai modeliai ir jų taikymas turi savitą specifiką, palyginti su tikimybiniais modeliais tiesėje. Kampų traktavimas skaitinėmis reikšmėmis tiesėje priveda prie paradoksų. Pavyzdžiui, jeigu tiesėje atidėsime mažo kampo φ° ir kampo $(360-\varphi)^\circ$ reikšmes, tai jų aritmetinis vidurkis bus 180°. O pasitelkus geometrinę interpretaciją darosi akivaizdu, kad aritmetinis vidurkis turėtų būti kampas 0°.

Paminėsime keletą faktų apie atsitiktinių kampų tikimybinius modelius. Atsitiktinio kampo tolydusis skirstinys irgi nusakomas vadinamąja „tankio funkcija“ $f(x)$, tačiau jos apibrėžimas iš esmės skiriasi nuo tankio apibrėžimo tiesėje. Atsitiktinio kampo tankio funkcija neneigiama, $f(x) \geq 0$, periodinė su periodu 2π, t. y. $f(x+2\pi) = f(x)$, su visais $x \in \mathbf{R}$, ir tenkina sąlygą

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 1.$$

Charakteristinę funkciją ψ pakanka apibrėžti tik sveikaskaitiniam argumentui $t = 0, 1, ...$

$$\psi(t) = \psi_\varphi(t) = \mathbf{E}e^{it\varphi} = \int_0^{2\pi} e^{itx} f(x)dx = \alpha_t + i\beta_t,$$

$$\alpha_t = \mathbf{E}\cos(t\varphi) = \int_0^{2\pi} \cos(tx)f(x)dx, \quad \beta_t = \mathbf{E}\sin(t\varphi) = \int_0^{2\pi} \sin(tx)f(x)dx. \tag{3.7.49}$$

Taigi, nagrinėjant skirstinius ant apskritimo, natūralu naudoti trigonometrinius momentus $\alpha_t, \beta_t, t = 0, 1, 2, ...$, kurie, skirtingai nuo skirstinių ant tiesės, visada vienareikšmiškai nusako charakteristinę funkciją $\psi(t)$. Charakteristinė funkcija $\psi(t)$ tenkina įprastines charakteristinių funkcijų savybes: $|\psi(t)| \leq 1, \psi(0) = 1$; jeigu ν fiksuotas kampas, tai

$$\psi_{\varphi-\nu}(t) = \mathbf{E}e^{it(\varphi-\nu)} = e^{-it\nu}\psi_\varphi(t) = \alpha_t(\nu) + i\beta_t(\nu),$$

$$\alpha_t(\nu) = \mathbf{E}\cos[t(\varphi-\nu)] = \alpha_t\cos(t\nu) + \beta_t\sin(t\nu),$$

$$\beta_t(\nu) = \mathbf{E}\sin[t(\varphi-\nu)] = -\alpha_t\sin(t\nu) + \beta_t\cos(t\nu).$$

Momentai $\alpha_t(\nu), \beta_t(\nu)$ vadinami eilės t trigonometriniais momentais krypties ν atžvilgiu. Galioja charakteristinės funkcijos vienaties, tolydumo ir atvertimo teoremos. Jeigu tankis $f(x)$ turi baigtinį skaičių maksimumų ir minimumų bei baigtinį skaičių trūkių, tai atvertimo formulė tankiui yra

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\{1 + 2\sum_{t=1}^{\infty}[\alpha_t\cos(tx) + \beta_t\sin(tx)]\}.$$

Teisingas nepriklausomumo kriterijus: atsitiktinių kampų vektoriaus $(\varphi_1, ..., \varphi_n)^T$ koordinatės nepriklausomos tada ir tik tada, kai jo daugiamatė charakteristinė funkcija lygi koordinačių skirstinių charakteristinių funkcijų sandaugai:

$$\psi_{(\varphi_1,...,\varphi_n)}(t_1, ..., t_n) = \prod_{j=1}^{n} \psi_{\varphi_j}(t_j).$$

Jeigu kampai $\varphi_1, ..., \varphi_n$ yra nepriklausomi, tai jų sumos $\varphi = \varphi_1 + ... + \varphi_n$ charakteristinė funkcija lygi dėmenų charakteristinių funkcijų sandaugai

$$\psi_{\varphi}(t) = \prod_{j=1}^{n} \psi_{\varphi_j}(t). \tag{3.7.50}$$

Sakome, kad atsitiktinis kampas φ turi tolygųjį skirstinį, jeigu jo tankio funkcija

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Jo charakteristinė funkcija

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{kai} \quad t = 0, \\ 0, & \text{kai} \quad t \neq 0. \end{cases} \tag{3.7.51}$$

Remdamiesi charakteristinių funkcijų vienaties teorema ir formulėmis (3.7.50), (3.7.51) gauname tokias išvadas. Jeigu $\varphi_1, ..., \varphi_n$ yra atsitiktiniai nepriklausomi kampai, turintys tolygųjį skirstinį, tai suma $\varphi = \varphi_1 + ... + \varphi_n$ taip pat turi tolygųjį skirstinį. Jeigu atsitiktiniai kampai φ_1, φ_2 yra nepriklausomi ir φ_1 turi tolygųjį skirstinį, tai suma $\varphi_1 + \varphi_2$ taip pat turi tolygųjį skirstinį. Apskritai kalbant, gana bendromis sąlygomis nepriklausomų atsitiktinių kampų suma turi asimptotinį tolygųjį skirstinį. Šios išvados gerokai skiriasi nuo tų, kurias gautume analogiškomis sąlygomis nagrinėdami skirstinius tiesėje.

Vienas iš dažniausiai naudojamų aprašant atsitiktinį kampą skirstinių,yra vadinamasis Mizeso skirstinys $M(\mu, \theta)$, priklausantis nuo dviejų parametrų $0 < \mu < 2\pi, \theta > 0$. Parametras μ tam tikra prasme apibūdina skirstinio centrą, o parametras $1/\theta$ – sklaidą (vidurkio ir dispersijos tiesėje analogai). Mizeso skirstinys, nagrinėjant atsitiktinius kampus, vaidina maždaug tą patį vaidmenį, kaip normalusis skirstinys nagrinėjant skirstinius tiesėje (žr. [14]).

Mizeso skirstinio tankio funkcija

$$f(x|\mu, \theta) = \frac{1}{2\pi I_0(\theta)} e^{\theta \cos(x-\mu)}, \quad \theta \geq 0, \quad 0 < \mu < 2\pi, \tag{3.7.52}$$

čia normuojanti konstanta

$$I_0(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\theta \cos x} dx = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j!)^2} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2j}$$

yra modifikuotoji pirmojo tipo ir nulinės eilės Beselio funkcija (žr.[1]).

Tarkime, $\varphi_1, ..., \varphi_n$ yra paprastoji imtis, gauta stebint atsitiktinį kampą $\varphi \sim M(\mu, \theta)$. Rasime parametrų μ ir θ taškinius įvertinius. Tikėtinumo funkcija

$$L = \frac{1}{[2\pi I_0(\theta)]^n} \exp\{\theta \sum_{j=1}^n \cos(\varphi_j - \mu)\},$$

o logtikėtinumo funkcija

$$\ell = -n\ln(2\pi) - n\ln I_0(\theta) + \theta \sum_{j=1}^n \cos(\varphi_j - \mu).$$

Prilyginame išvestines nuliui

$$\dot{\ell}_\theta = -n[\ln I_0(\theta)]' + \sum_{j=1}^n \cos(\varphi_j - \mu) = 0, \quad \dot{\ell}_\mu = \theta \sum_{j=1}^n \sin(\varphi_j - \mu) = 0.$$

Iš antrosios lygties randame

$$\sum_{j=1}^n \sin(\varphi_j - \mu) = \cos\mu \sum_{j=1}^n \sin\varphi_j - \sin\mu \sum_{j=1}^n \cos\varphi_j = S\cos\mu - C\sin\mu = 0,$$

kad parametro μ DT įvertinys tenkina sąlygas

$$\cos\hat{\mu} = \frac{C}{R}, \;\; \sin\hat{\mu} = \frac{S}{R}, \;\; R = \sqrt{C^2 + S^2}, \;\; \hat{\mu} = \operatorname{arctg}\frac{S}{C}.$$

Parametro θ įvertinys $\hat{\theta}$ randamas iš lygties

$$A(\hat{\theta}) = \bar{R}, \;\; A(\theta) = \frac{I_0'(\theta)}{I_0(\theta)}, \;\; \bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2},$$

o $\bar{C}$ ir $\bar{S}$ yra empiriniai trigonometriniai momentai

$$\bar{C} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \cos\varphi_j, \quad \bar{S} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \sin\varphi_j.$$

Knygoje [14] pateikiamos funkcijos $A^{-1}(x)$ lentelės. Naudodamiesi tokiomis lentelėmis (arba kompiuteriu) randame įvertinį $\hat{\theta} = A^{-1}(\bar{R})$.

Kadangi pirmieji trigonometriniai momentai yra

$$\alpha_1(\mu) = A(\theta)\cos\mu, \quad \beta_1(\mu) = A(\theta)\sin\mu,$$

tai, prilyginę juos empiriniams momentams $\bar{C}$ ir $\bar{S}$, matome, kad momentų ir DT įvertiniai sutampa.

Rasime DT įvertinių $\hat{\mu}$ ir $\hat{\theta}$ asimptotinius ($n \to \infty$) skirstinius remdamiesi 3.5.3 teorema. Patikrinsime, ar tenkinamos teoremos sąlygos.

1) ir 2) sąlygos akivaizdžiai tenkinamos.

Vieno imties nario tikėtinumo funkcijos logaritmas

$$\ell_1(\mu, \theta) = -\ln(2\pi) - \ln I_0(\theta) + \theta\cos(\varphi - \mu).$$

Randame informantes

$$\dot{\ell}_{1\mu} = \theta\sin(\varphi - \mu), \quad \dot{\ell}_{1\theta} = -A(\theta) + \cos(\varphi - \mu), \quad A(\theta) = I_0'(\theta)/I_0(\theta);$$

$$\mathbf{E}(\dot{\ell}_{1\mu}) = \frac{\theta}{2\pi I_0(\theta)} \int_0^{2\pi} \sin(x - \mu) e^{\theta\cos(x-\mu)dx} = 0, \; \mathbf{E}(\dot{\ell}_{1\theta}) = -A(\theta) + A(\theta) = 0.$$

Randame antrąsias išvestines

$$\ddot{\ell}_{1\mu\mu} = -\theta\cos(\varphi - \mu), \quad i_{11} = -\mathbf{E}(\ddot{\ell}_{1\mu\mu}) = \theta A(\theta);$$

$$\ddot{\ell}_{1\mu\theta} = \sin(\varphi - \mu), \quad i_{12} = -\mathbf{E}(\ddot{\ell}_{1\mu\theta}) = 0;$$

$$\ddot{\ell}_{1\theta\theta} = -A'(\theta), \quad i_{22} = -\mathbf{E}(\ddot{\ell}_{1\theta\theta}) = A'(\theta) = \frac{I_0''(\theta)}{I_0(\theta)} - A^2(\theta).$$

Pasinaudokime modifikuotųjų Beselio funkcijų ir jų išvestinių savybėmis. Modifikuotoji eilės p Beselio funkcija $I_p(\theta)$ užrašoma eilute (žr. [1])

$$I_p(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!(j+p)!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2j+p}, \quad p = 0, 1, 2, ...$$

Tiesiogiai įsitikiname, kad

$$I_0'(\theta) = I_1(\theta), \quad I_0''(\theta) = I_1'(\theta), \quad [\theta I_1(\theta)]' = I_1(\theta) + \theta I_1'(\theta) = \theta I_0(\theta);$$

$$I_1'(\theta) = I_0''(\theta) = \frac{\theta I_0(\theta) - I_0'(\theta)}{\theta}.$$

Taigi

$$i_{22} = \frac{\theta I_0(\theta) - I_0'(\theta)}{\theta I_0(\theta)} - A^2(\theta) = 1 - A^2(\theta) - A(\theta)/\theta.$$

Lieka patikrinti, ar $\mathbf{E}(\dot{\ell}_1 \dot{\ell}_1^T) = -\mathbf{E}(\ddot{\ell}_1)$. Gauname

$$\mathbf{E}(\dot{\ell}_{1\mu})^2 = \theta^2 \mathbf{E}\sin^2(\varphi - \mu) = \theta^2 \left[1 - \frac{I_0''(\theta)}{I_0(\theta)}\right]$$

$$= \theta^2 \left[1 - \frac{\theta I_0(\theta) - I_0(\theta)}{\theta I_0(\theta)}\right] = \theta A(\theta) = i_{11};$$

$$\mathbf{E}(\dot{\ell}_{1\mu} \dot{l}_{1\theta}) = \theta \mathbf{E}[\sin(\varphi - \mu)(-A(\theta) + \cos(\varphi - \mu))] = 0 = i_{12};$$

$$\mathbf{E}(\dot{\ell}_{1\theta})^2 = \mathbf{E}(-A(\theta) + \cos(\varphi - \mu))^2 = A^2(\theta) - 2A^2(\theta) + I_0''(\theta)/I_0(\theta) = i_{22}.$$

4) informacinė matrica teigiamai apibrėžta, nes $i_{12} = i_{21} = 0$, o $i_{11} > 0, i_{22} > 0$.

5) visos funkcijos l_1 trečios eilės išvestinės aprėžtos.

Taigi visos 3.5.3 teoremos sąlygos išpildytos ir a. v. $(\hat{\mu}, \hat{\theta})^T$ asimptotiškai turi dvimatį normalųjį skirstinį su nekoreliuotomis koordinatėmis:

$$\sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu) \xrightarrow{d} Y \sim N(0, 1/(\theta A(\theta)));$$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1/[1 - A^2(\theta) - A(\theta)/\theta]).$$

Remdamiesi šiomis aproksimacijomis ir skyrelyje 3.5.4 aprašyta metodika, gauname pasikliovimo lygmens $Q = 1 - 2P$ aproksimacinius pasikliovimo intervalus

$$(\underline{\mu}; \bar{\mu}) = \left(\hat{\mu} - z_P/\sqrt{n\hat{\theta}\bar{R}};\ \ \hat{\mu} + z_P/\sqrt{n\hat{\theta}\bar{R}}\right);$$

$$(\underline{\theta}; \bar{\theta}) = \left(\hat{\theta} - z_P/\sqrt{n(1 - \bar{R}^2 - \bar{R}/\hat{\theta})};\ \ \hat{\theta} + z_P/\sqrt{n(1 - \bar{R}^2 - \bar{R}/\hat{\theta})}\right).$$

3.7.12 pavyzdys. *Mizeso skirstinio parametrų įverčiai.* Lentelėje pateikti tų horizonto taškų, kuriuos stebėtojas užfiksavo paskutinį kartą matydamas paleistą antį (prapuolimo kampas), azimutai. Eksperimento metu paleista $n = 714$ ančių. Eksperimentas atliktas Anglijoje Gločesterio grafystėje (žr. [14]).

Kampas	Dažnis	Kampas	Dažnis	Kampas	Dažnis
10°	40	130°	3	250°	24
30°	22	150°	1	270°	58
50°	20	170°	6	290°	136
70°	9	190°	3	310°	138
90°	6	210°	11	330°	143
110°	23	230°	22	350°	69

Duomenys sugrupuoti į 20° ilgio intervalus. Lentelėje nurodytas vidurinis i-ojo intervalo kampas φ_i° ir stebėjimų, patekusių į i-tąjį intervalą, dažnis n_i, $i = 1, ..., 18$. Tarę, kad duomenis galime traktuoti kaip paprastosios imties, gautos stebint a. d. $\varphi \sim M(\mu, \theta)$, realizaciją, rasime parametrų μ ir θ taškinius įverčius ir pasikliovimo lygmens $Q = 0,95$ aproksimacinius pasikliovimo intervalus.

Apskaičiuojame

$$\bar{C} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{18} n_i \cos\varphi_i = 0,4998, \quad \bar{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{18} n_i \sin\varphi_i = -0,5176;$$

$$\bar{R} = 0,7195, \quad \hat{\mu} = 308,89^\circ, \quad \hat{\theta} = 2,077.$$

Aproksimaciniai pasikliovimo intervalai yra tokie:

$$(\underline{\mu}; \bar{\mu}) = (305,35^\circ;\ 312,33^\circ), \quad (\underline{\theta}; \bar{\theta}) = (1,964;\ 2,190).$$

3.7.17. Aproksimacinių pasikliovimo intervalų pavyzdžiai

Pateiksime keletą iliustracijų, kaip galima sudaryti parametrų apytikslius (aproksimacinius) pasikliovimo intervalus remiantis taškinių įvertinių asimptotiniais skirstiniais.

1. **Normaliojo skirstinio pasiskirstymo funkcijos ir kvantilio pasikliovimo intervalai.** Tarkime, paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$. Ieškosime kritinių reikšmių

$$x_P = \mu + \sigma z_P,\ z_P = \Phi^{-1}(1-P)$$

ir pasiskirstymo funkcijos

$$F(x) = F(x; \mu, \sigma) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

pasikliovimo intervalų.

Parametrų μ ir σ DT įvertiniai yra empirinis vidurkis $\bar{X}$ ir empirinė dispersija m_2 (žr. 3.5.2 skyrelį). Remiantis 3.5.3 teorema, asimptotinis įvertinio $(\bar{X},\ m_2)$ skirstinys yra dvimatis normalusis su nekoreliuotomis koordinatėmis

$$\sqrt{n}(\bar{X}-\mu) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ \sigma^2),\ \sqrt{n}(m_2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} Z \sim N(0,\ 2\sigma^4). \qquad (3.7.53)$$

Nagrinėjamų charakteristikų DT įvertiniai yra

$$\hat{x}_P = \bar{X} + z_P\sqrt{m_2},\ \hat{F}(x; \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{x-\bar{X}}{\sqrt{m_2}}\right).$$

Pakeitę (3.7.49) dispersijas jų įvertiniais ir pažymėję, kad

$$\frac{\partial x_P}{\partial \mu} = 1,\ \frac{\partial x_P}{\partial \sigma^2} = \frac{z_P}{2\sigma},$$

gauname įvertinio $\hat{x}_P$ asimptotinės dispersijos įvertinį

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{x}_P} = \frac{m_2}{n} + \left(\frac{z_P}{2\sqrt{m_2}}\right)^2 \frac{2m_2^2}{n} = \frac{m_2}{n}\left(1 + \frac{z_P^2}{2}\right).$$

Parametro x_P aproksimacinis pasikliovimo intervalas, kai pasikliovimo lygmuo $Q = 1-2\alpha$, yra

$$\hat{x}_P - z_\alpha \hat{\sigma}_{\hat{x}_P},\ \ \hat{x}_P + z_\alpha \hat{\sigma}_{\hat{x}_P} \qquad (3.7.54)$$

Analogiškai gauname

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),\ \ \frac{\partial F}{\partial \sigma^2} = -\frac{x-\mu}{2\sigma^3}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{F}} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{x-\bar{X}}{2m_2}\right)\varphi^2\left(\frac{x-\bar{X}}{\sqrt{m_2}}\right),$$

$$\underline{F} = \hat{F}(x) - z_\alpha \hat{\sigma}_{\hat{F}},\ \overline{F} = \hat{F}(x) + z_\alpha \hat{\sigma}_{\hat{F}}. \qquad (3.7.55)$$

3.7.13 pavyzdys. *Normaliojo skirstinio pasiskirstymo funkcijos, kvantilio, asimetrijos ir eksceso koeficientų pasikliovimo intervalai.* Tarkime, kad pagal didumo $n = 100$ paprastąją imtį, gautą stebint a. d. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, apskaičiuotos empirinių charakteristikų realizacijos:

$\bar{X} = 1,28$; $s^2 = 4$; $g_1 = -0,25$; $g_2 = 0,1$. Sudarysime parametrų $x(0,9), F(0), \gamma_1, \gamma_2$ pasikliovimo lygmens $Q = 0,95$ pasikliovimo intervalus.

Parametrų $x(0,9)$ ir $F(0)$ taškiniai įverčiai yra

$$\hat{x}(0,1) = \bar{X} + sz(0,9) = 3,8432; \quad \hat{F}(0) = \Phi(-1,28/2) = 0,2611.$$

Asimptotinių dispersijų įverčiai

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{x}(0,9)} = 4(1 + z^2(0,9)/2)/n = 0,0728; \quad \hat{\sigma}^2_{\hat{F}(0)} = (1 + 1,28^2/8)\varphi^2(0,64)/n = 0,00127.$$

Gauname asimptotinius pasikliovimo intervalus

$$\underline{x}(0,9) = \hat{x}(0,9) - z_{0,025}\hat{\sigma}_{\hat{x}(0,9)} = 3,3144, \quad \overline{x}(0,9) = \hat{x}(0,9) + z_{0,025}\hat{\sigma}_{\hat{x}(0,9)} = 4,3720;$$

$$\underline{F}(0) = \hat{F}(0) - z_{0,025}\hat{\sigma}_{\hat{F}(0)} = 0,1913, \quad \overline{F}(0) = \hat{F}(0) + z_{0,025}\hat{\sigma}_{\hat{F}(0)} = 0,3309.$$

Statistikų g_1 ir g_2 pirmųjų momentų išraiškos pateiktos 2.27 pratime. Naudodami šias išraiškas gauname asimptotinius pasikliovimo intervalus

$$\underline{\gamma}_1 = g_1 - z_{0,025}\sqrt{\boldsymbol{V}g_1} = -0,7184, \quad \overline{\gamma}_1 = g_1 + z_{0,025}\sqrt{\boldsymbol{V}g_1} = 0,2184;$$

$$\underline{\gamma}_2 = g_2 - 6/(n+1) - z_{0,025}\sqrt{\boldsymbol{V}g_2} = -0,8507, \quad \overline{\gamma}_2 = g_2 - 6/(n+1) + z_{0,025}\sqrt{\boldsymbol{V}g_2} = 0,9319.$$

2. **Veibulo skirstinio kvantilio pasikliovimo intervalas.** Tarkime, kad paprastosios $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ imties elementas $X_i \sim W(\theta, \nu)$, t. y. X_i turi Veibulo skirstinį, kurio pasiskirstymo funkcija

$$F(x; \theta, \nu) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\nu\right\}, \ x \geq 0.$$

Ieškosime šio dėsnio p kvantilio

$$t(p) = \theta\left(-\ln(1-p)\right)^{1/\nu}$$

pasikliovimo intervalo.

Jei gaminių fukcionavimo trukmė pasiskirsčiusi pagal Veibulo dėsnį, tai $t(p)$ yra momentas, iki kurio didelės gaminių populiacijos dalis p sugenda.

Pažymėkime $u_p = -\ln(1-p)$. Išvestinės

$$\frac{\partial t(p)}{\partial \theta} = u_p^{1/\mu}, \quad \frac{\partial t(p)}{\partial \nu} = -\frac{\theta}{\nu^2} u_p^{1/\nu} \ln u_p,$$

taigi

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{t}(p)} = u_p^{2/\hat{\nu}}\left(\hat{I}^{11} - 2\hat{I}^{12}\frac{\hat{\theta}}{\hat{\nu}^2}\ln u_p + \hat{I}^{22}\frac{\hat{\theta}^2}{\hat{\nu}^4}\ln^2 u_p\right);$$

čia $\hat{I}^{ij}$ yra matricos $\hat{\boldsymbol{I}}_n^{-1}$ elementai. Pagal 3.5.8 pavyzdį informacinės matricos $\boldsymbol{I}$ pagrįstojo įvertinio $\hat{\boldsymbol{I}}_n = [\hat{I}_{ij}]_{2\times 2}$ elementai

$$\hat{I}_{11} = n\frac{\hat{\nu}^2}{\hat{\theta}^2}, \quad \hat{I}_{22} = n\frac{1 + \Gamma''(2)}{\hat{\nu}^2}, \quad \hat{I}_{12} = \hat{I}_{21} = n\frac{\Gamma'(2)}{\hat{\sigma}}.$$

Intervalas

$$\left(\hat{t}(p) - \hat{\sigma}_{\hat{t}(p)}\, z_{1-\alpha/2}, \quad \hat{t}(p) + \hat{\sigma}_{\hat{t}(p)}\, z_{1-\alpha/2}\right) \tag{3.7.56}$$

yra parametro $t(p)$ aproksimacinis pasikliovimo intervalas, kai pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - 2\alpha$.

3.7.14 pavyzdys. *Veibulo skirstinio parametrų ir kvantilio pasikliovimo intervalai.* Tarkime, kad gaminio darbo laikas aprašomas Veibulo skirstiniu su parametrais θ ir ν. Pagal paprastąją imtį, gautą išbandžius 100 gaminių, surastos parametrų DT įvertinių (žr. lygčių sistemą (3.7.44)) realizacijos $\hat{\theta} = 0,198$ ir $\hat{\nu} = 2,15$. Rasime parametrų θ, ν ir kvantilio $t(0,9)$ pasikliovimo lygmens $Q = 0,95$ pasikliovimo intervalus.

Parametrų θ ir ν įvertinių vidutinius kvadratinius nuokrypius įvertinkime taip:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} = 1/\sqrt{\hat{\boldsymbol{I}}_{11}} = \hat{\theta}/(\hat{\nu}\sqrt{n}) = 0,0092, \quad \hat{\sigma}_{\hat{\nu}} = 1/\sqrt{\hat{\boldsymbol{I}}_{22}} = \hat{\nu}/\sqrt{n(1+\Gamma''(2))} = 0,1592.$$

Gauname asimptotinius pasikliovimo intervalus

$$\underline{\theta} = \hat{\theta} - z_{0,025}\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} = 0,0568, \quad \overline{\theta} = \hat{\theta} + z_{0,025}\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} = 0,3392;$$

$$\underline{\nu} = \hat{\nu} - z_{0,025}\hat{\sigma}_{\hat{\nu}} = 1,8380, \quad \overline{\nu} = \hat{\nu} + z_{0,025}\hat{\sigma}_{\hat{\nu}} = 2,4620.$$

Parametro $t(0,9)$ taškinio įvertinio realizacija yra $\hat{t}(0,9) = \hat{\theta}(-\ln 0,1)^{1/\hat{\nu}} = 0,2918$. Vertinant dispersiją reikia rasti Fišerio informacinės matricos atvirkštinę. Gauname $\hat{\boldsymbol{I}}^{11} = 0,0094/n$, $\hat{\boldsymbol{I}}^{22} = 2,8104/n$, $\hat{\boldsymbol{I}}^{12} = -0,0509/n$. Tada $\hat{\sigma}_{\hat{t}(0,9)} = 0,0172$ ir pasikliovimo intervalas

$$\underline{t}(0,9) = \hat{t}(0,9) - z_{0,025}\hat{\sigma}_{\hat{t}(0,9)} = 0,2580, \quad \overline{t}(0,9) = \hat{t}(0,9) + z_{0,025}\hat{\sigma}_{\hat{t}(0,9)} = 0,3427.$$

3. **Asimetrijos koeficiento asimptotinis pasikliovimo intervalas.** Atsitiktinio dydžio X asimetrijos koeficientas $\gamma_1 = \mu_3/\mu_2^{3/2}$, o jo empirinis analogas $\hat{\gamma}_1 = g_1 = m_3/m_2^{3/2}$. Ieškosime g_1 asimptotinio dėsnio. Remiantis 2.5.5 teorema,

$$\sqrt{n}(m_3 - \mu_3) \xrightarrow{d} V \sim N\left(0, \mu_6 - 6\mu_2\mu_4 - \mu_3^2 + 9\mu_2^3\right)$$

ir $m_2^{3/2} \xrightarrow{P} \mu_2^{3/2}$. Taigi

$$\sqrt{n}(g_1 - \gamma_1) \xrightarrow{d} U \sim N\left(0, \frac{\mu_6 - 6\mu_2\mu_4 - \mu_3^2 + 9\mu_2^3}{\mu_2^3}\right).$$

Remdamiesi empiriniais momentais, gauname statistikos g_1 dispersijos įvertinį

$$\hat{\sigma}_{g_1}^2 = \frac{1}{n}\frac{m_6 - 6m_4m_2 - m_3^2 + 9m_2^3}{m_2^3}.$$

Taigi parametro γ_1 aproksimacinis pasikliovimo intervalas, kai pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - 2\alpha$, yra

$$\underline{\gamma}_1 = g_1 - z_\alpha\hat{\sigma}_{g_1}, \quad \overline{\gamma}_1 = g_1 + z_\alpha\hat{\sigma}_{g_1}. \tag{3.7.57}$$

4. **Koreliacijos koeficiento pasikliovimo intervalas.** Dviejų a. d. X ir Y koreliacijos koeficientas

$$\rho = \rho(X,\ Y) = \frac{\mathbf{Cov}\,(X,\ Y)}{\sqrt{\boldsymbol{V}X\boldsymbol{V}Y}} = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}}. \tag{3.7.58}$$

Jo empirinis analogas r pagal didumo n paprastąją imtį $(X_i, Y_i)^T$, $i = 1, 2, ..., n$, gaunamas (3.7.58) išraiškoje pakeitus teorinius momentus jų empiriniais analogais:

$$\hat{\rho} = r = \frac{m_{11}}{\sqrt{m_{20}m_{02}}} = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_i (X_i - \bar{X})^2 \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2}}. \tag{3.7.59}$$

Remiantis 3.5.5 teorema, r asimptotiškai $(n \to \infty)$ nepaslinktasis ir turi normalųjį skirstinį, kurio asimptotinė dispersija randama pagal (3.5.28) formulę. Asimptotinės dispersijos išraiška pateikta 2.28 pratime.

Reikia pažymėti, kad r skirstinys nepriklauso nuo vidurkių $\mathbf{E}X = \alpha_{10}$, $\mathbf{E}Y = \alpha_{01}$ ir nuo dispersijų $\boldsymbol{V}X = \mu_{20}$, $\boldsymbol{V}Y = \mu_{02}$. Iš tikrųjų, jeigu vietoje X_i ir Y_i imsime $(X_i - \alpha_{10})/\sqrt{\mu_{20}}$ ir $(Y_i - \alpha_{01})/\sqrt{\mu_{02}}$, tai r reikšmė nepasikeis. Todėl 1.P.4 lentelėje asimptotinės dispersijos išraišką galima suprastinti, įrašius $\alpha_{10} = \alpha_{01} = 0$, $\mu_{20} = \mu_{02} = 1$. Tada

$$\sigma_r^2 \sim \frac{\rho^2}{n}\left(\frac{\mu_{22} - \mu_{11}(\mu_{31} + \mu_{13})}{\mu_{11}^2} + \frac{\mu_{40} + \mu_{04} + 2\mu_{22}}{4}\right). \tag{3.7.60}$$

Gauname parametro ρ asimptotinio pasikliovimo intervalo, kai pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - 2\alpha$, rėžius:

$$\underline{\rho} = r - z_\alpha \hat{\sigma}_r, \qquad \overline{\rho} = r + z_\alpha \hat{\sigma}_r, \tag{3.7.61}$$

čia $\hat{\sigma}_r$ reiškia, kad (3.7.60) formulės nežinomi parametrai μ_{ij} pakeisti jų empiriniais analogais m_{ij}, $i, j = 1, ..., 4$.

Kai skirstinys dvimatis normalusis (primename, kad galima tarti, jog vidurkiai lygūs 0, o dispersijos lygios 1), gauname $\mu_{11} = \rho$, $\mu_{22} = 1 + 2\rho^2$, $\mu_{31} = \mu_{13} = 3\rho$, $\mu_{40} = \mu_{04} = 3$. Todėl (3.7.60) išraiška tampa paprastesnė

$$\sigma_r^2 \sim \frac{1}{n}(1 - \rho^2)^2 \tag{3.7.62}$$

ir asimptotinio pasikliovimo intervalo rėžiai yra

$$\underline{\rho} = r - z_\alpha \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}, \qquad \overline{\rho} = r + z_\alpha \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}. \tag{3.7.63}$$

Jeigu n nėra labai didelis, tai šis intervalas gali būti netikslus, ypač jeigu tikroji parametro ρ reikšmė artima ± 1. Tokiu atveju statistikos r skirstinys turi didelę asimetriją, o aproksimuojamas simetriniu normaliuoju skirstiniu.

Tikslinga parinkti statistikos r dispersiją stabilizuojančią transformaciją $V = V(r)$ taip, kad funkcijos $V(r)$ asimptotinė dispersija nuo ρ nepriklausytų ir būtų, pavyzdžiui, 1. Pagal (3.7.62) funkcija $V(\rho)$ parenkama taip

$$V(\rho) = \int \frac{d\rho}{1 - \rho^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \rho}{1 - \rho}.$$

Atlikus šią transformaciją, gaunamas ρ pasikliovimo intervalas pateiktas 3.7.3 poskyryje.

3.8. Pratimai

3.1 skyrelis

3.1. Kokio didumo turi būti a.d. $X \sim N(\mu,\ 4)$ imtis, kad parametro μ įvertinio $\hat{\mu} = \bar{X}$ absoliučioji paklaida būtų ne didesnė už 0,1 su tikimybe, ne mažesne kaip 0,99 ?

3.2. Kokio didumo turi būti normaliojo a.d. imtis, kad dispersijos σ^2 įvertinio $\hat{\sigma}^2 = s^2$ santykinės paklaidos modulis būtų ne didesnis už 0,1 su tikimybe, ne mažesne kaip 0,99 ?

3.3. Kokio didumo turi būti a.d. $X \sim G(1/\lambda,\ 5)$ imtis, kad parametro λ įvertinio $\hat{\lambda} = \bar{X}/5$ santykinės paklaidos modulis būtų ne didesnis už 0,1 su tikimybe, ne mažesne kaip 0,99 ?

3.4. Jūros gylis matuojamas prietaisu, kurio sisteminė paklaida 0, o atsitiktinė paklaida pasiskirsčiusi pagal normalųjį dėsnį su vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu $\sigma = 25$ m. Kiek kartų reikia nepriklausomai matuoti jūros gylį, kad matavimo paklaida būtų ne didesnė kaip 15 m su tikimybe, ne mažesne už 0,99 ?

3.5. Parametro θ įvertinio $\hat{\theta}_n = T_n = T_n(X_1, ..., X_n)$ poslinkis yra

$$\mathbf{E}T_n - \theta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{n^i} = O(\frac{1}{n}), \quad n \to \infty.$$

Įrodykite, kad statistikos $T_n' = nT_n - (n-1)\bar{T}_{n-1}$ poslinkis yra $O(1/n^2)$; statistikos $T_n'' = [n^2 T_n' - (n-1)\bar{T}'_{n-1}]/[n^2 - (n-1)^2]$ poslinkis yra $O(1/n^3)$ ir t. t. Čia $\bar{T}_{n-1}$ yra aritmetinis vidurkis statistikų T_{n-1}, apskaičiuotų pagal visus didumo $n-1$ imties poaibius.

3.6. $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a.d. X, kurio skirstinys priklauso Veibulo skirstinių šeimai $\mathcal{P} = \{f(x|\rho),\ 0 < \rho < \infty\}$; čia tankio funkcija yra

$$f(x|\rho) = \alpha\rho^{\alpha} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-(\rho x)^{\alpha}}, \quad 0 < x < \infty,$$

o $\alpha > 1$ – žinoma konstanta. Įrodykite, kad funkcijos $\gamma(\rho) = \rho^r$ nepaslinktasis įvertinys, kai $n > r/\alpha$, yra

$$\hat{\gamma} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha}\right)^{-r/\alpha} \frac{(n-1)!}{\Gamma(n - r/\alpha)}.$$

3.7. Tegu $\bar{\theta} = \bar{\theta}(\mathbf{X})$ yra nepaslinktasis θ įvertinys. Įrodykite, kad bet kuris nepaslinktasis θ įvertinys $\widetilde{\theta}$ yra tokio pavidalo: $\widetilde{\theta} = \bar{\theta} - U(\mathbf{X})$; čia $U(\mathbf{X})$ tenkina sąlygą $\mathbf{E}U(\mathbf{X}) \equiv 0$.

3.8. Tegu X diskretusis a.d., kurio skirstinys nusakytas tikimybėmis:

$$\mathbf{P}\{X = -1\} = p, \quad \mathbf{P}\{X = k\} = (1-p)^2 p^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

čia $p \in (0, 1)$ yra nežinomas parametras.

a) Įrodykite, kad statistika $U(X)$ tenkina sąlygą $\mathbf{E}U(\mathbf{X}) \equiv 0$ tada ir tik tada, kai $U(k) = ak$ su visais $k = -1, 0, 1, 2, \dots$ ir tam tikru a.

b) Įrodykite, kad parametro $\theta = (1-p)^2$ NMD įvertinys yra

$$T_0(X) = \begin{cases} 1, \text{ kai } X = 0, \\ 0, \text{ kai } X \neq 0. \end{cases}$$

c) Įrodykite, kad

$$T_1(X) = \begin{cases} 1, \text{ kai } X = -1, \\ 0, \text{ kai } X \neq -1 \end{cases}$$

yra nepaslinktasis p įvertinys, o NMD įvertinys neegzistuoja.

3.9. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. $X \sim U(0,\ \theta), 0 < \theta < \infty$. Raskite θ įvertinio $cX_{(n)}$ poslinkį ir dispersiją; čia c – žinoma teigiama konstanta. Raskite c tokį, kad $cX_{(n)}$ būtų nepaslinktasis θ įvertinys.

3.10. Tarkime, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. X, kurio skirstinys priklauso šeimai $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta,\ \theta \in \{\theta_1, ..., \theta_k\}\}$ su fiksuotu natūraliuoju skaičiumi

k. Tegu $T_n(X)$ yra θ įvertinys, įgyjantis reikšmes iš aibės $\{\theta_1, \dots, \theta_k\}$. Įrodykite, kad $T_n(X)$ yra pagrįstasis tada ir tik tada, kai $\mathbf{P}_\theta(T_n(X) = \theta) \to 1, \ n \to \infty$.

3.11. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a. d. $X \sim U(\theta - 1/2, \ \theta + 1/2)$, $\theta \in \mathbf{R}$ yra nežinomas. Įrodykite, kad $\bar{\theta} = (X_{(1)} + X_{(n)})/2$ yra stipriai pagrįstas θ įvertinys, t. y. $\sqrt{n}(\bar{\theta} - \theta) \xrightarrow{b.t.} 0$, kai $n \to \infty$.

3.12. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji a. d. $X \sim B(1, p)$ imtis. Tarkime, statistika T įgyja reikšmę 0, jei daugiau negu pusė visų X_i yra 0; įgyja reikšmę 1, jeigu daugiau negu pusė visų X_i yra 1; įgyja reikšmę 1/2, jeigu lygiai pusė visų X_i yra 0. Įrodykite, kad statistika T nėra pagrįstasis tikimybės p įvertinys.

3.13. Tegu $g_1, g_2, \dots$ yra tokios tolydžiosios, apibrėžtos intervale $(a, \, b) \subset \mathbf{R}$, funkcijos, kad $g_n(x) \to g(x)$ tolygiai pagal x bet kuriame intervale, priklausančiame $(a, \, b)$. Tegu T_n yra pagrįstasis $\theta \in (a, \, b)$ įvertinys. Įrodykite, kad $g_n(T_n)$ yra pagrįstasis parametro $\vartheta = g(\theta)$ įvertinys.

3.14. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a. d. X, kurio vidurkis $\mu \in \mathbf{R}$ ir dispersija $\sigma^2 > 0$ nežinomi. Be to, $g(\mu) = 0$, kai $\mu \neq 0$, ir $g(0) = 1$. Nurodykite pagrįstąjį $\vartheta = g(\mu)$ įvertinį.

3.15. 1 skyriaus **1.12** pratimo sąlygomis įrodykite, kad a. d. $Y \xrightarrow{P} \mu$, $\mu = y_1 + ... + y_N$, kai $n \to N$ bet kuriam fiksuotam N. Ar Y išliks pagrįstasis, kai imtis imama grąžinant?

3.16. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a. d. $X \sim N(\mu, \ \sigma^2)$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$. Įrodykite, kad aritmetinis vidurkis $\bar{X}$ ir empirinė mediana $\hat{x}(0,5)$ yra vidurkio μ pagrįstieji įvertiniai.

3.17. Tarkime, $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a. d. $X \sim K(\mu, \ \sigma)$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$. Įrodykite, kad aritmetinis vidurkis $\bar{X}$ nėra pagrįstasis, o empirinė mediana $\hat{x}(0,5)$ yra pagrįstasis parametro μ įvertinys.

3.18. Tegu X ir Y yra nepaslinktieji atitinkamai parametrų θ ir θ^2 įvertiniai. Raskite a. d. X dispersijos $\boldsymbol{V}X$ nepasliktąjį įvertinį.

3.19. Tegu X ir Y yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, vienodai pasiskirstę pagal $N(\mu, \ \sigma^2)$. Ar $|X - Y|$ ir $|X - Y|^2$ yra nepaslinktieji parametrų σ ir σ^2 įvertiniai? Raskite šių įvertinių poslinkius.

3.20. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a. d. $X \sim U(-\theta, \ \theta)$, $0 < \theta < \infty$. Iš kokios konstantos reikia padauginti statistiką $T = X_{(n)} - X_{(1)}$, kad gautume nepaslinktąjį parametro θ įvertinį? Kokia gautojo įvertinio dispersija?

3.21. Atsitiktinis dydis X turi geometrinį skirstinį su parametru p. Raskite parametro $\ln p$ nepaslinktąjį įvertinį.

3.22. Tegu nepriklausomi a. d. $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ ir $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$. Raskite sąlyginį X skirstinį, kai suma $X + Y$ fiksuota. Remdamiesi gautu rezultatu, sudarykite parametro $\theta = \lambda_1/\lambda_2$ įvertinį.

3.23. Atlikus $n = 50$ Bernulio eksperimentų, kai A įvykimo tikimybė yra p, įvykis A įvyko 12 kartų. Raskite parametrų $q + p^3$, pq, $p^{12}q^{38}$, q^{50}, p^{49} nepaslinktųjų įvertinių realizacijas.

3.24. Atliekant Bernulio eksperimentus, A pirmąjį kartą įvyko per 14 bandymą. Raskite parametro $p \ln p$ nepaslinktojo įvertinio realizaciją; čia p yra įvykio A pasirodymo tikimybė per atskirą bandymą.

3.2 – 3.3 skyreliai

3.25. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a. d. $X \sim N(\mu, \ 1), -\infty < \mu < \infty$. Įrodykite, kad $\bar{X}$ yra pilnoji ir pakankamoji parametro μ statistika.

3.26. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a. d. $X \sim \mathcal{E}(\lambda, \ \mu)$, $0 < \lambda < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$. Įrodykite, kad $\boldsymbol{T} = (X_{(1)}, X_{(2)} + ... + X_{(n)})^T$ yra pakankamoji parametro $(\lambda, \ \mu)^T$ statistika.

3.27. Įrodykite, kad $T = X_1 + ... + X_n$ yra pilnoji ir pakankamoji šeimos $\mathcal{P} = \{B(1, \ p), \ 0 < p < 1\}$ statistika, kai $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a. d. X, kurio skirstinys priklauso binominių skirstinių šeimai $\mathcal{P}$.

3.28. (**3.27** tęsinys). Aptarkite klasę $\gamma(p)$ funkcijų, turinčių NMD įvertinius. Įrodykite, kad nepaslinktasis funkcijos $\gamma(p) = 1/p$ įvertinys neegzistuoja.

3.29. (**3.27** tęsinys). Raskite parametrų p, pq, p^2, $C_n^k p^k q^{n-k}$ NMD įvertinius.

3.30. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a.d. X, kurio skirstinys priklauso Puasono skirstinių šeimai $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(\lambda), 0 < \lambda < \infty\}$. Įrodykite, kad $T = X_1 + ... + X_n$ yra pilnoji ir pakankamoji šeimos $\mathcal{P}$ statistika.

3.31. (**3.30** tęsinys). Raskite klasę funkcijų $\gamma(\lambda)$, kurių NMD įvertinys egzistuoja. Raskite parametrų λ, λ^2, $\lambda(1-\lambda)$, $\mathrm{e}^{-\lambda}$ NMD įvertinius.

3.32. (**3.30** tęsinys). Raskite tikimybės $\gamma(\lambda) = (c\lambda)^m \mathrm{e}^{-c\lambda}/m!$ NMD įvertinį; čia $0 < c \leq n$ ir m – sveikasis neneigiamas skaičius žinomi.

3.33. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a.d. $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$, $-\infty < \mu < \infty$, $0 < \sigma < \infty$. Įrodykite, kad $\boldsymbol{T} = (\bar{X},\ s^2)^T$ yra pilnoji ir pakankamoji parametro $\boldsymbol{\theta} = (\mu,\ \sigma^2)^T$ statistika.

3.34. (**3.33** tęsinys). Įrodykite, kad parametrų μ ir σ NMD įvertiniai yra $\hat{\mu} = \bar{X}$ ir $\hat{\sigma}^2 = s^2$.

3.35. (**3.33** tęsinys). Imkite parametrų μ ir σ^2 įvertinius $a\bar{X}$ ir bs^2. Kokie turėtų būti a ir b, kad tie įvertiniai būtų geresni už nepaslinktuosius $\bar{X}$ ir s^2, kai minimizuojama kvadratinė nuostolių funkcija?

3.36. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a.d. X, kurio skirstinys priklauso tolygiųjų skirstinių šeimai: a) $\mathcal{P}_1 = \{U(0,\ \theta),\ 0 < \theta < \infty\}$; b) $\mathcal{P}_2 = \{U(\theta_1,\ \theta_2),\ 0 < \theta_1 < \theta_2 < \infty\}$; c) $\mathcal{P}_3 = \{U(\theta,\ 3\theta),\ 0 < \theta < \infty\}$. Įrodykite: a) $T_1 = X_{(n)}$ yra pilnoji ir pakankamoji šeimos $\mathcal{P}_1$ statistika; b) $\boldsymbol{T}_2 = (X_{(1)},\ X_{(n)})^T$ – pilnoji ir pakankamoji šeimos $\mathcal{P}_2$ statistika; c) $\boldsymbol{T}_2 = (X_{(1)},\ X_{(n)})^T$ – pakankamoji šeimos $\mathcal{P}_3$ statistika, tačiau ji nėra pilnoji.

3.37. Tegu $(X_i,\ Y_i)^T$, $i = 1, 2, ..., n$, yra dvimačio normaliojo vektoriaus $(X,\ Y)^T \sim N_2(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma})$ su nekoreliuotomis koordinatėmis imtis. Įrodykite: a) $\boldsymbol{T} = (\sum_i X_i,\ \sum_i Y_i,\ \sum_i X_i^2,\ \sum_i Y_i^2)^T$ yra pilnoji ir pakankamoji parametro $\boldsymbol{\theta}$ statistika, kai $\boldsymbol{\theta} = \{(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1,\ \sigma_2)^T : -\infty < \mu_1,\ \mu_2 < \infty,\ 0 < \sigma_1,\ \sigma_2 < \infty\}$; b) $\boldsymbol{T} = (\sum_i X_i,\ \sum_i Y_i,\ \sum_i (X_i^2 + Y_i^2))^T$ — pilnoji ir pakankamoji parametro $\boldsymbol{\theta}$ statistika, kai $\boldsymbol{\theta} = \{(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1,\ \sigma_2)^T : -\infty < \mu_1,\ \mu_2 < \infty,\ 0 < \sigma_1 = \sigma_2 < \infty\}$; c) $\boldsymbol{T} = (\sum_i X_i,\ \sum_i Y_i\ \ \sum_i X_i^2,\ \sum_i Y_i^2)^T$ — pakankamoji parametro $\boldsymbol{\theta}$ statistika, kai $\boldsymbol{\theta} = \{(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1,\ \sigma_2)^T : -\infty < \mu_1 = \mu_2 < \infty,\ 0 < \sigma_1,\ \sigma_2 < \infty\}$, tačiau ji nėra pilnoji.

3.38. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a.d. $X \sim W(\eta,\ \sigma), 0 < \eta < \infty$, $0 < \sigma < \infty$, turinčio Veibulo skirstinį. Įrodykite, kad: a) kai η nežinomas, egzistuoja tik triviali pakankamoji statistika; b) kai η žinomas, $T = \sum_i X_i^\eta$ yra parametro σ pakankamoji statistika.

3.39. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a.d. X, kurio skirstinys priklauso šeimai $\mathcal{P} = \{f(x;\ \lambda,\ \eta,\ \mu),\ 0 < \lambda,\ \eta < \infty,\ -\infty < \mu < \infty\}$; čia tankio funkcija

$$f(x;\ \lambda,\ \eta,\ \mu) = \frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)} x^{\eta-1} \mathrm{e}^{-\lambda(x-\mu)},\ x \geq \mu.$$

Raskite pakankamąją statistiką: a) parametro η, kai μ ir λ žinomi; b) parametro λ, kai μ ir η žinomi; c) parametrų η ir λ, kai μ žinomas; d) parametro μ, kai λ žinomas, o $\eta = 1$.

3.40. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a.d. X, kurio skirstinys priklauso Laplaso skirstinių šeimai, kurių tankis

$$f(x;\ \lambda) = \frac{\lambda}{2} \mathrm{e}^{-\lambda|x|},\ 0 < \lambda < \infty,\ x \in \mathbf{R}.$$

Kaip sumodeliuoti imtį, ekvivalenčią turimai, kai žinoma statistikos $T = \sum_i |X_i|$ reikšmė?

3.41. Remiantis geometriškai pasiskirsčiusio a.d. X paprastąja imtimi, apskaičiuota statistikos $T = \sum_i X_i$ reikšmė. Nurodykite, kaip sumodeliuoti imtį, ekvivalenčią turimai.

3.42. Tegu $Y_1, ... Y_n$ yra n.a.d. ir $Y_i \sim N(\alpha + \beta x_i,\ \sigma^2)$; čia $x_1, ..., x_n$ – žinomos konstantos, $-\infty < \alpha, \beta < \infty$, $0 < \sigma < \infty$ – nežinomi parametrai. Įrodykite, kad $\boldsymbol{T} = (\sum_i Y_i,\ \sum_i Y_i x_i,\ \sum_i Y_i^2)$ yra pilnoji ir pakankamoji parametro $\boldsymbol{\theta} = (\alpha,\ \beta,\ \sigma)^T$ statistika.

3.43. Tarkime, n kartų atliekami kampų matavimai ir k-ojo matavimo metu kampo didumas yra $k\varphi$, $k = 1, 2, ..., n$. Sisteminės matavimų paklaidos lygios 0, o atsitiktinės paklaidos sumuojamos, t. y. k-ojo matavimo atsitiktinė paklaida yra $Z_1 + ... + Z_k$; čia $Z_1, ..., Z_n$ yra vienodai pasiskirstę nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai ir $Z_i \sim N(0,\ \sigma^2)$. Raskite parametrų φ ir σ^2 NMD įvertinius.

3.44. Tarkime, kad $X_{ij} = \mu + a_i + e_{ij}$ ir $\{a_i,\ e_{ij}\}$, $i = 1, ..., I$, $j = 1, ..., J$ yra n. a. d. sistema; čia $a_i \sim N(0, \beta^2), e_{ij} \sim N(0,\ \sigma^2), -\infty < \mu < \infty,\ 0 < \beta,\ \sigma < \infty$ yra nežinomi parametrai. Įrodykite, kad $\boldsymbol{T} = (\bar{X}_{..},\ SS_A,\ SS_E)^T$ yra pakankamoji parametro $\boldsymbol{\theta} = (\mu,\ \beta,\ \sigma)^T$ statistika; čia

$$\bar{X}_{..} = \frac{1}{IJ}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} X_{ij}, \quad SS_A = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2,$$

$$\bar{X}_{i.} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} X_{ij}, \quad SS_E = \sum_{i=1}^{I}(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2.$$

3.45. Tegu $(X_i,\ Y_i)^T$, $i = 1, ..., n$, yra paprastoji imtis dvimačio a. v. $(X,\ Y)^T$, kurio skirstinys priklauso dvimačių normaliųjų skirstinių šeimai $N_2(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma})$; $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\ \mu_2)^T$, $-\infty < \mu_1,\ \mu_2 < \infty$, $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]_{2\times 2}$, $0 < \sigma_{ii} = \sigma_i^2 < \infty$, $i = 1, 2, \sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2$, $|\rho| < 1$. Įrodykite, kad $\boldsymbol{T} = (\sum_i X_i,\ \sum_i Y_i,\ \sum_i X_iY_i,\ \sum_i X_i^2,\ \sum_i Y_i^2)^T$ yra pilnoji ir pakankamoji statistika.

3.46. Atsitiktinio dydžio X skirstinys priklauso šeimai $\mathcal{P} = \{f(x;\ \theta),\ 0 < \theta < \infty\}$; čia tankis $f(x;\ \theta) = 2(\theta - x)/\theta^2$, kai $0 < x < \theta$, ir lygus 0, kai x įgyja kitas reikšmes. Raskite šeimos $\mathcal{P}$ netrivialią pakankamąją statistiką pagal a. d. X didumo n paprastąją imtį.

3.47. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a. d. $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$, $-\infty < \mu < \infty$, $0 < \sigma < \infty$. Įrodykite, kad funkcijos $\Phi((c - \mu)/\sigma)$, kuri nusako į kairę nuo fiksuotos konstantos c esančią generalinės visumos dalį, NMD įvertinys yra

$$\hat{\Phi}\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma((n-2)/2)}\int_{-1}^{T}(1 - x^2)^{(n-4)/2}dx;$$

čia $T = (c - \bar{X})/s$.

Raskite minėtos tikimybės įvertinį, kai parametras σ yra žinomas.

3.48. (**3.47** tęsinys). Raskite tankio funkcijos reikšmės $f(x|\mu, \sigma) = \varphi((x - \mu)/\sigma)/\sigma$ NMD įvertinį.

3.49. Tegu X yra diskretusis a. d., kurio galimos reikšmės yra $0,\ 1,\ 2, ...$, o tikimybės $p_r(\theta) = \mathbf{P}\{X = r|\theta\}$, $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}$. Pažymėkime V_r imties reikšmių, lygių r, skaičių, o T — parametro θ pakankamąją statistiką. Įrodykite, kad $\mathbf{E}((V_r/n)|T)$ yra funkcijos $p_r(\theta)$ NMD įvertinys, ir raskite tikimybės $\mathbf{P}\{X = 0|\theta\}$ NMD įvertinį, kai yra Puasono ir neigiamasis binominis skirstinys.

3.50. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a. d. X, kurio skirstinys priklauso šeimai $\mathcal{P} = \{p(i|\theta), \theta \in \Theta \subset \mathbf{R}\}$; čia $p(i|\theta) = \mathbf{P}\{X = i|\theta\} = a_i\theta^i/f(\theta)$, $i = c,\ c + 1, ...$ Įrodykite: a) $T = X_1 + ... + X_n$ yra pilnoji ir pakankamoji šeimos $\mathcal{P}$ statistika, o jos skirstinys yra nusakomas tokio pavidalo tikimybėmis $\mathbf{P}\{T = k|\theta\} = b_k\theta^k/(f(\theta))^n$, $k = nc, nc + 1, ...$; b) parametro θ^r NMD įvertinys yra $U_r(T) = (b_{T-r})/b_T$, kai $T \geq nc + r$, ir $U_r(T) = 0$, kai $T < nc + r$; c) įvertinio $U_r(T)$ dispersijos NMD įvertinys yra $(U_r(T))^2 - U_{2r}(T)$.

Taip pasiskirstę daugelis diskrečiųjų a. d., kurių galimų reikšmių skaičius yra begalinis (Puasono, geometrinis ir pan., įskaitant ir nupjautinius iš kairės).

3.51. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a. d. $X \sim U(0,\ \theta)$, $0 < \theta < \infty$. Raskite parametro θ NMD įvertinį. Palyginkite jo dispersiją su nepaslinktojo įvertinio $\hat{\theta} = 2\bar{X}$ dispersija.

3.52. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a. d. $X \sim U(\theta_1,\ \theta_2)$, $-\infty < \theta_1 < \theta_2 < \infty$. Raskite parametrų $\theta_1,\ \theta_2,\ (\theta_1 + \theta_2)/2,\ \theta_2 - \theta_1$ NMD įvertinius.

3.53. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a. d. X, kurio tankio funkcija

$$f(x; \theta) = \theta(1 + x)^{-(\theta+1)}, \quad x \geqslant 0;$$

čia $\theta > 0$ nežinomas parametras.

a) Įrodykite, kad $T = \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + X_i)$ yra pakankamoji θ statistika.
b) Raskite T vidurkį ir dispersiją.

3.54. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ $\lambda > 0$, turinčio eksponentinį skirstinį su parametru λ. Pasirinkę $t > 0$, apibrėžkime $g(\lambda) = P_\lambda\{X_i > t\}$.
a) Įrodykite, kad $T = X_1 + \ldots + X_n$ nepriklauso nuo X_1/T.
b) Raskite parametro $g(\lambda)$ NMD įvertinį.

3.55. Įrodykite: jei T yra pakankamoji statistika ir $T = h(S)$, čia h yra mačioji funkcija, S – kita statistika, tai S taip pat yra pakankamoji statistika.

3.56. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d., kurio skirstinys priklauso šeimai $\mathcal{P} = \{P_{\boldsymbol\theta},\ \boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta\}$. Raskite parametro $\boldsymbol\theta$ pakankamąją statistiką, kai $P_{\boldsymbol\theta}$ yra:
a) Puasono skirstinys $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda \in (0, \infty)$;
b) neigiamas binominis skirstinys $B^-(n,\ p)$ su žinomu n, $p \in (0,\ 1)$;
c) eksponentinis skirstinys $\mathcal{E}(\theta)$, $\theta \in (0, \infty)$;
d) gama skirstinys $G(\lambda, \eta)$, $\boldsymbol\theta^T = (\lambda, \eta) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$;
e) beta skirstinys $Be(\gamma, \eta)$, $\boldsymbol\theta^T = (\gamma, \eta) \in (0,\ \infty) \times (0,\ \infty)$;
f) lognormalusis skirstinys $LN(\mu, \sigma)$, $\boldsymbol\theta^T = (\mu, \sigma) \in \mathcal{R} \times (0, \infty)$;
g) Veibulo skirstinys $W(\alpha, \theta)$, kai žinomas $\alpha > 0$, o $\theta \in (0, \infty)$.

3.57. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. $X \sim \mathcal{E}(a,\ \theta)$; čia $a \in \mathbf{R}$, $\theta > 0$. Raskite parametro $(a, \theta)^T$ pakankamąją statistiką.

3.58. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. X, kurio skirstinys yra Pareto ir tankis

$$f(x|a,\ \theta) = \theta a^\theta / x^{\theta+1},\ 0 < a,\ \theta < \infty,\ a < x < \infty.$$

Raskite parametro $(a,\ \theta)^T$ pakankamąją statistiką.

3.59. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. $X \sim U(a,\ b)$, $0 < a < b < \infty$. Įrodykite, kad $X_{(1)}$ yra pakankamoji statistika, kai b žinomas, ir $X_{(n)}$ yra pakankamoji statistika, kai a žinomas.

3.60. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. X, kurio skirstinys priklauso visų absoliučiai tolydžiųjų skirstinių šeimai $\mathcal{P}$. Įrodykite, kad variacinė eilutė $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})^T$ yra šeimos $\mathcal{P}$ pakankamoji statistika.

3.61. Įrodykite, kad $\mathcal{P} = \{P_{\boldsymbol\theta} :\ \boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta\}$ yra eksponentinė šeima. Užrašykite jos kanoninį pavidalą ir natūraliąją parametrų erdvę, kai $P_{\boldsymbol\theta}$ yra:
a) Puasono skirstinys $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda \in \Theta = (0, \infty)$;
b) neigiamas binominis skirstinys $B^-(n,\ p)$ su fiksuotu n ir $p \in \Theta = (0,\ 1)$;
c) eksponentinis skirstinys $E(a, \theta)$ su fiksuotu a ir $\theta \in \Theta = (0, \infty)$;
d) gama skirstinys $G(\lambda, \eta)$, $\boldsymbol\theta^T = (\lambda, \eta) \in \boldsymbol\Theta = (0, \infty) \times (0, \infty)$;
e) beta skirstinys $Be(\gamma, \eta)$, $\boldsymbol\theta^T = (\gamma, \eta) \in \boldsymbol\Theta = (0,\ 1) \times (0,\ 1)$;
f) Veibulo skirstinys $W(\alpha, \theta)$ su fiksuotu $\alpha > 0$ ir $\theta \in \Theta = (0, \infty)$.

3.62. Įrodykite, kad eksponentinių skirstinių šeima $\mathcal{E}(a, \theta)$ su dviem nežinomais parametrais a ir θ nėra eksponentinė šeima.

3.63. Įrodykite, kad neigiamų binominių skirstinių šeima $B^-(n,\ p)$ su dviem nežinomais parametrais p ir n nėra eksponentinė šeima.

3.64. Įrodykite, kad Koši skirstinių šeima $K(\mu, \sigma)$ su dviem nežinomais parametrais μ ir σ nėra eksponentinė šeima.

3.65. Įrodykite, kad Veibulo skirstinių šeima $W(\alpha, \theta)$ su dviem nežinomais parametrais α ir θ nėra eksponentinė šeima.

3.66. Įrodykite, kad k-mačių normaliųjų skirstinių šeima $N_k(\boldsymbol\mu,\ \boldsymbol\Sigma)$ yra eksponentinė šeima. Užrašykite jos kanoninį pavidalą.

3.67. Raskite gama skirstinio $G(\lambda, \eta)$ momentų generuojančiąją funkciją.

3.68. Diskrečiojo a.d. X skirstinys nusakomas tikimybėmis

$$\mathbf{P}\{X = k\} = \gamma(k) \frac{\theta^k}{c(\theta)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

Įrodykite, kad šie skirstiniai, kai $\theta > 0$, sudaro eksponentinę šeimą, ir raskite X momentų generuojančiąją funkciją.

3.69. Tegu X yra a.d., kurio skirstinys priklauso šeimai $\mathcal{P} = \{P_{\boldsymbol{\theta}} : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$ ir $f_{\boldsymbol{\theta}}$ yra $P_{\boldsymbol{\theta}}$ tankio funkcija σ-baigtinio mato ν atžvilgiu, o A yra įvykis, kurio $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{A\} > 0$. Nagrinėjama nupjautinių skirstinių šeima, $\mathcal{P}_A = \{f_{\boldsymbol{\theta}} I_{\{A\}}/P_{\boldsymbol{\theta}}\{A\},\ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$. Įrodykite, kad:

a) jeigu $T(X)$ yra pakankamoji šeimos $\mathcal{P}$ statistika, tai ji pakankamoji ir šeimos $\mathcal{P}_A$ statistika;

b) jeigu $T(X)$ yra pilnoji ir pakankamoji šeimos $\mathcal{P}$ statistika, tai ji pilnoji ir pakankamoji ir šeimos $\mathcal{P}_A$ statistika.

3.70. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. X, kurio tankis

$$f(x|\theta) = c(\theta)\exp\{-\theta x\},\ 0 < x < \theta,\ \theta > 0.$$

Raskite parametro θ pilnąją ir pakankamąją statistiką.

3.71. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. $X \sim U(\theta,\ \theta+1)$, $0 < \theta < \infty$. Įrodykite, kad pakankamoji statistika $(X_{(1)}, X_{(n)})^T$ nėra pilnoji.

3.72. Tegu $\psi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, yra tokia teigiama Borelio funkcija, kad bet kuriems a ir b, $-\infty < a < b < \infty$, $\int_a^b \psi(x)dx < \infty$. Tegu $\boldsymbol{\theta} = (a,\ b)^T$. Apibrėžkime tankio funkciją

$$f(x|a,\ b) = \frac{\psi(x)}{\int_a^b \psi(x)dx},\quad a < x < b.$$

Įrodykite, kad $(X_{(1)}, X_{(n)})^T$ yra šeimos $\mathcal{P} = \{f(x|\boldsymbol{\theta}),\ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$ pilnoji ir pakankamoji statistika.

3.73. Tegu X yra diskretusis a.d., kurio skirstinys nusakytas tikimybėmis

$$\mathbf{P}\{X = k|\theta\} = \begin{cases} \theta, & k = 0, \\ (1-\theta)^2\theta^{k-1}, & k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

čia $\theta \in (0,\ 1)$. Įrodykite, kad X nėra pilnoji, tačiau yra aprėžtai pilnoji.

3.74. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$, $0 < \mu < \infty$, $0 < \sigma < \infty$. Vertinamas parametras $\vartheta = \mu^2$. Apskaičiuokite ϑ įvertinio $\bar{X}^2$ poslinkį ir dispersiją. Raskite ϑ NMD įvertinį ir palyginkite jo dispersiją su įvertinio $\bar{X}^2$ dispersija.

3.75. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. $X \sim B(1,\ p)$, $0 < p < 1$. Raskite NMD įvertinius parametrų:

a) p^m, $m \leq n$;

b) $\mathbf{P}\{X_1 + \ldots + X_m = k\}$, $\quad 0 \leq k \leq m \leq n$; $k,\ m$ neneigiami sveikieji skaičiai;

c) $\mathbf{P}\{X_1 + \ldots + X_{n-1} > X_n\}$.

3.76. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $0 < \lambda < \infty$. Raskite parametro $\gamma = \exp(-t\lambda)$, $t > 0$, NMD įvertinį.

3.77. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)^T$ ir $\mathbf{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^T$ yra paprastosios atsitiktinės imtys, gautos stebint n.a.d. $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ ir $Y \sim N(\mu_y,\ \sigma_y^2)$.

a) Raskite parametrų $\mu_x - \mu_y$ ir $(\sigma_x/\sigma_y)^r$, $r > 0$ NMD įvertinius, kai $\mu_x \in \mathbf{R}$, $\mu_y \in \mathbf{R}$, $\sigma_x > 0$ ir $\sigma_y > 0$.

b) Raskite σ_x^2 ir $(\mu_x - \mu_y)/\sigma_x$ NMD įvertinius, kai $\mu_x \in \mathbf{R}$, $\mu_y \in \mathbf{R}$, $\sigma_x = \sigma_y > 0$.

c) Raskite μ_x NMD įvertinį, kai $\mu_x = \mu_y \in \mathbf{R}$, $\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$ ir $\sigma_x^2/\sigma_y^2 = \gamma$ yra žinomas.

d) Įrodykite, kad μ_x NMD įvertinys neegzistuoja, kai $\mu_x = \mu_y \in \mathbf{R}$, $\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$.

e) Raskite $\mathbf{P}\{X_1 \leqslant Y_1\}$ NMD įvertinį, kai $\mu_x = \mu_y \in \mathbf{R}$, $\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$.

f) Atlikite e) punktą, kai $\sigma_x = \sigma_y$.

3.78. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. $X \sim U(\theta_1 - \theta_2,\ \theta_1 + \theta_2)$, $0 < \theta_1,\ \theta_2 < \infty$. Raskite parametrų $\theta_1,\ \theta_2$ NMD įvertinius.

3.79. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. $X \sim \mathcal{E}(a,\ 1/\theta)$, $a \in \mathbf{R}$, $0 < \theta < \infty$.

a) Raskite a NMD įvertinį, kai θ žinomas.

b) Raskite θ NMD įvertinį, kai a žinomas.

c) Raskite a ir θ NMD įvertinius.
d) Raskite $\mathbf{P}\{X_1 \geq t\}$ ir $\frac{d}{dt}\mathbf{P}\{X_1 \geq t\}$ NMD įvertinius, kai θ žinomas, o $t > a$ fiksuotas.

3.80. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)^T$ ir $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^T$ yra paprastosios atsitiktinės imtys, gautos stebint n. a. d. $X \sim \mathcal{E}(a_x, \theta_x)$ ir $Y \sim \mathcal{E}(a_y,\ \theta_y)$; čia $\theta_x,\ \theta_y > 0$ ir $a_x,\ a_y \in \mathbf{R}$.
a) Raskite $a_x - a_y$ ir θ_x/θ_y NMD įvertinius.
b) Raskite θ_x ir $(a_x - a_y)/\theta_x$ NMD įvertinius, kai $\theta_x = \theta_y$ yra nežinomas.
c) Įrodykite, kad a_x NMD įvertinys neegzistuoja, kai $a_x = a_y$ yra nežinomas.

3.81. Tegu X yra a. d., turintis neigiamą binominį skirstinį $B^-(n,\ p)$ su nežinomu $p \in (0,\ 1)$ ir žinomu n. Raskite NMD įvertinius parametrų: a) $p^m,\ q^m,\ m \leq n$; b) $\boldsymbol{V}X$; c) $\ln p$.

3.82. Tegu X yra a. d., kurio tankio funkcija

$$f(x|\theta) = (1 - \theta) + \frac{\theta}{2\sqrt{x}},\ 0 < x < 1,\ 0 < \theta < 1.$$

Įrodykite, kad parametro θ NMD įvertinys neegzistuoja.

3.83. Tegu X yra diskretusis a. d., kurio skirstinys nusakytas tikimybėmis $\mathbf{P}\{X = -1\} = 2p(1-p)$ ir $\mathbf{P}\{X = k\} = p^k(1-p)^{3-k}$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ p \in (0,\ 1)$.
a) Ar egzistuoja parametro p NMD įvertinys?
b) Ar egzistuoja parametro $p(1-p)$ NMD įvertinys?

3.84. Bernulio eksperimentuose A įvykimo tikimybė lygi p, o jam priešingo įvykio $\bar{A}$ – $q = 1 - p$. Tegu X yra bandymų skaičius, jei eksperimentai tęsiami tol, kol pirmą kartą gaunama seka, susidedanti iš dviejų vienodų raidžių – A arba $\bar{A}$. Ar šiame modelyje įvertinamas nežinomas parametras p, $0 < p < 1$? Raskite parametro $\theta = pq, 0 < \theta < 1/4$ DT įvertinį.

3.4 skyrelis

3.85. Tarkime, imties $\mathbf{X}$ skirstinys priklauso nuo parametro $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_k)^T,\ k > 1$, ir Fišerio informacinė matrica $\boldsymbol{I} = [I_{ij}]_{k\times k}$ neišsigimusi. Pažymėkime $\boldsymbol{I}^{-1} = [I^{ij}]_{k\times k}$ matricos $\boldsymbol{I}$ atvirkštinę matricą. Įrodykite, kad teisinga nelygybė $I^{ii} \geq 1/I_{ii}$.

3.86. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a. d. X, kurio skirstinys priklauso binominių skirstinių šeimai $\mathcal{P} = \{B(1,\ p),\ 0 < p < 1\}$. Raskite funkcijų $p,\ pq,\ p^2$ nepaslinktųjų įvertinių dispersijų ribas remdamiesi Rao ir Kramerio nelygybe.

3.87. (**3.86** tęsinys). Raskite tikslesnę funkcijos p^2 nepaslinktojo įvertinio dispersijos ribą, remdamiesi patikslinta Rao ir Kramerio nelygybe.

3.88. (**3.86** tęsinys). Apskaičiuokite funkcijų $p,\ pq,\ p^2$ NMD įvertinių dispersijas ir palyginkite jas su gautomis 3.86 ir 3.87 pratimuose ribomis.

3.89. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a. d. X, kurio skirstinys priklauso Puasono skirstinių šeimai $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(\lambda),\ 0 < \lambda < \infty\}$. Raskite funkcijų $\lambda,\ \lambda^2,\ \mathrm{e}^{-\lambda}$ nepaslinktųjų įvertinių dispersijų ribas pagal Rao ir Kramerio nelygybę.

3.90. (**3.89** tęsinys). Raskite tikslesnę funkcijos λ^2 nepaslinktojo įvertinio dispersijos ribą, remdamiesi patikslinta Rao ir Kramerio nelygybe.

3.91. (**3.89** tęsinys). Apskaičiuokite funkcijų $\lambda,\ \lambda^2,\ \mathrm{e}^{-\lambda}$ NMD įvertinių dispersijas ir palyginkite jas su gautomis 3.89 ir 3.90 pratimuose ribomis.

3.92. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a. d. X, kurio skirstinys priklauso normaliųjų skirstinių šeimai $\mathcal{P} = \{N(\mu,\ \sigma^2),\ -\infty < \mu < \infty,\ 0 < \sigma < \infty\}$. Užrašykite Rao ir Kramerio nelygybę vektorinės funkcijos $\boldsymbol{\theta} = (\mu,\ \sigma^2)^T$ nepaslinktojo įvertinio kovariacijų matricai.

3.93. (**3.92** tęsinys). Užrašykite patikslintą Rao ir Kramerio nelygybę vektorinės funkcijos $\boldsymbol{\theta} = (\mu,\ \sigma^2)^T$ nepaslinktojo įvertinio dispersijai. Parinkite nelygybę taip, kad ji taptų lygybe, kai įvertinys yra $(\bar{X},\ s^2)^T$.

3.94.(**3.92** tęsinys). Raskite P-osios kritinės reikšmės $x_P = \sigma z_P + \mu$ NMD įvertinį ir jo dispersiją.

3.95. Atsitiktinio dydžio X skirstinys priklauso ekstremaliųjų skirstinių šeimai. Tankio funkcija

$$f(x|\theta) = \exp\{-(x-\theta) - \exp\{-(x-\theta)\}\},\ -\infty < \theta < \infty.$$

Pagal didumo n paprastąją imtį raskite parametro θ ir parametro $\alpha = \exp\{-\theta\}$ Fišerio informacijos kiekį.

3.96. Tarkime, kad $X_1, \ldots, X_n$ n. a. d. Tegu X_i tankio funkcija

$$f_i(x;\beta) = \frac{1}{\beta t_i} \exp(-x/(\beta t_i)), \quad x \geqslant 0;$$

čia $t_1, \ldots, t_n$ – žinomos konstantos.

a) Įrodykite, kad

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i/t_i$$

yra nepaslinktasis β įvertinys.

b) Apskaičiuokite nepaslinktojo β įvertinio dispersijos ribą Rao ir Kramerio nelygybėje. Ar įvertinio, nurodyto a) punkte, dispersija pasiekia šią ribą?

3.97. Tegu X skirstinys priklauso šeimai $\mathcal{P} = \{P_{\boldsymbol{\theta}},\ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$. Raskite Fišerio informaciją $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta})$ pagal didumo n paprastąją imtį, kai $P_{\boldsymbol{\theta}}$ yra:

a) $N(\mu, \sigma^2)$ skirstinys, $\theta = \mu \in \mathcal{R}$;
(b) $N(\mu, \sigma^2)$ skirstinys, $\theta = \sigma^2 > 0$;
(c) $N(\mu, \sigma^2)$ skirstinys, $\theta = \sigma > 0$;
(d) $N(\sigma, \sigma^2)$ skirstinys, $\theta = \sigma > 0$;
(e) $N(\mu, \sigma^2)$ skirstinys, $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)^T$;
(f) neigiamas binominis skirstinys $B^-(k,\ p)$, $\theta = p \in (0,\ 1)$;
(g) gama skirstinys $G(\alpha, \gamma)$, $\boldsymbol{\theta}^T = (\alpha, \gamma) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$;
(h) beta skirstinys $B(\alpha, \beta)$, $\boldsymbol{\theta}^T = (\alpha, \beta) \in (0,\ \infty) \times (0,\ \infty)$.

3.98. (**3.97** tęsinys). Raskite $\boldsymbol{\theta}$ funkciją, kurios informacijos kiekis nepriklauso nuo $\boldsymbol{\theta}$, kai $P_{\boldsymbol{\theta}}$ yra:

a) Puasono skirstinys $\mathcal{P}(\theta)$, $\theta > 0$;
b) binominis skirstinys $B(n,\ p)$, $\theta = p \in (0,\ 1)$;
c) gama skirstinys $G(\theta, \gamma)$, $\theta > 0$.

3.99. (**3.97** tęsinys). Raskite Fišerio informacijos matricą, kai $P_{\boldsymbol{\theta}}$ yra:

a) Koši skirstinys $K(\mu, \sigma)$, $\mu \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$;
b) ekstremalių reikšmių skirstinys, kurio parametrai $\mu \in \mathbf{R}$, $\theta > 0$;
c) logistinis skirstinys $LG(\mu, \sigma)$, kurio parametrai $\mu \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$;
d) $F_r(\frac{x-\mu}{\sigma})$, čia F_r yra Stjudento skirstinio su žinomu laisvės laipsnių skaičiumi r pasiskirstymo funkcija, $\mu \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$.

3.100. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a. d. $X \sim U(0, \theta)$ su $\theta > 0$.

a) Įrodykite, kad Rao ir Kramerio teoremos sąlygos netenkinamos.

b) Įrodykite, kad parametro θ NMD įvertinio dispersija yra eilės $O(1/n^2)$, $n \to \infty$ (reikia pažymėti, kad reguliariu atveju, kai Rao ir Kramerio nelygybė galioja, dispersijos riba Rao ir Kramerio nelygybėje yra eilės $O(1/n)$).

3.101. Tegu X yra a. d., turintis ekstremalių reikšmių skirstinį su parametrais $\mu = 0$ ir $\theta > 0$. Raskite nurodytų parametrų NMD įvertinius ir kiekvienu atveju nustatykite, ar NMD įvertinio dispersija pasiekia Rao ir Kramerio nelygybėje nurodytą ribą: a) $\vartheta = \theta$; b) $\vartheta = \theta^r$, čia $r > 1$; c) $\vartheta = (1+\theta)^{-1}$.

3.102. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a. d. $X \sim B(1,\ p)$, $0 < p < 1$. Įrodykite, kad:

a) $p(1-p)$ NMD įvertinys yra $T_n = n\bar{X}(1-\bar{X})/(n-1)$;
b) $\boldsymbol{V}(T_n)$ nepasiekia Rao ir Kramerio nelygybėje nurodytos ribos;
c) asimptotiškai, kai $(n \to \infty)$, $\boldsymbol{V}T_n$ pasiekia Rao ir Kramerio nelygybės ribą.

3.103. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a. d. $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$, $-\infty < \mu < \infty$, σ – žinomas.

a) Raskite $\vartheta = \mathrm{e}^{t\mu}$ NMD įvertinį, kai fiksuotas $t \neq 0$.

b) Nustatykite, ar a) punkte rasto įvertinio dispersija pasiekia Rao ir Kramerio nelygybėje nurodytą ribą.

c) Įrodykite, kad asimptotiškai ($n \to \infty$) tenkinama Rao ir Kramerio nelygybė.

3.104. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. $X \sim N(\mu,\ 1)$, $\mu \in \mathbf{R}$. Tegu $\vartheta = \mathbf{P}\{X_1 \le c\}$, čia c – fiksuota konstanta. Nagrinėjami tokie ϑ įvertiniai: $T_{1n} = \hat{F}_n(c)$, čia $\hat{F}_n$ yra empirinė pasiskirstymo funkcija, ir $T_{2n} = \Phi(c - \bar{X})$, čia Φ yra standartinio normaliojo skirstinio pasiskirstymo funkcija. Raskite įvertinio T_{1n} ASE T_{2n} atžvilgiu.

3.105. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. $X \sim N(0, \sigma^2)$, čia $\sigma > 0$ nežinomas. Vertinama $\vartheta = \sigma$. Raskite įvertinio $\sqrt{\pi/2}\sum_{i=1}^n |X_i|/n$ ASE įvertinio $(\sum_{i=1}^n X_i^2/n)^{1/2}$ atžvilgiu.

3.106. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. X, kurio $\mathbf{E}X = \mu$, $\boldsymbol{V}X = 1$ ir $\mathbf{E}X^4 < \infty$. Tegu $T_{1n} = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i^2 - 1$ ir $T_{2n} = \bar{X}^2 - n^{-1}$ yra $\vartheta = \mu^2$ įvertiniai.
a) Raskite ivertinio T_{1n} ASE atžvilgiu įvertinio T_{2n}.
b) Įrodykite, kad ASE ≤ 1, jeigu $X_i - \mu$ pasiskirstymo funkcija yra simetrinė 0 atžvilgiu.
c) Raskite skirstinį, kurio ASE > 1.

3.107. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. $X \sim B(1,\ p)$, $0 < p < 1$. Vertinamas parametras p. Tegu a ir b yra teigiamos konstantos. Raskite įvertinio $(a + n\bar{X})/(a + b + n)$ ASE įvertinio $\bar{X}$ atžvilgiu.

3.108. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. $X \sim U(0,\ \theta)$, $0 < \theta < \infty$. Nagrinėjami tokie θ įverčiai: $T_{1n} = (n+1)X_{(n)}/n$ ir $T_{2n} = X_{(n)}$. Raskite poslinkius $b_{T_{jn}}(\theta)$, $j = 1, 2$ ir įvertinio T_{1n} ASE įvertinio T_{2n} atžvilgiu.

3.109. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. $X \sim K(\mu,\ 1)$, $-\infty < \mu < \infty$. Ar egzistuoja parametro μ nepaslinktasis įvertinys, kad Rao ir Kramerio nelygybė virstų lygybe?

3.110. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$. Raskite informacijos kiekį ir parametro σ nepaslinktojo įvertinio dispersijos ribą Rao ir Kramerio nelygybėje.

3.111. (**3.110** tęsinys). Dispersijos įvertiniu imkime $n\bar{X}^2$ ir s^2 (tariame, kad $\mu = 0$). Koks įvertinio $n\bar{X}^2$ efektyvumas įvertinio s^2 atžvilgiu.

3.112. Vertinant atsitiktinio dydžio $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$ parametrą μ, gautos trys paprastosios atsitiktinės nepriklausomos imtys, iš kurių gauti įverčiai: $\bar{X}_1 = 17,24$ (didumo $n_1 = 5$ imtis); $\bar{X}_2 = 16,81$ (didumo $n_2 = 10$ imtis); $\bar{X}_3 = 17,22$ (didumo $n_3 = 100$ imtis). Raskite parametro μ NMD įvertinio realizacijos reikšmę naudodamiesi visais matavimais.

3.5 skyrelis

3.113. Momentų metodu raskite parametrų α ir β įvertinius pagal didumo n paprastąją atsitiktinę imtį a.d. X, kurio skirstinys yra $N(0,\ 1)$ su tikimybe β ir $N(\alpha,\ 1)$ su tikimybe $1 - \beta$.

3.114. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a.d. X, kurio skirstinys priklauso šeimai $\mathcal{P} = U(\theta_1,\ \theta_2)$, $-\infty < \theta_1 < \theta_2 < \infty\}$. Raskite parametrų $\mu = (\theta_1 + \theta_2)/2$ ir $\sigma = \theta_2 - \theta_1$ NMD įvertinius. Palyginkite jų dispersijas su momentų metodo įvertinių dispersijomis.

3.115. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra a.d. X paprastoji imtis. Raskite parametrų DT įvertinius ir palyginkite juos su tų pačių parametrų NMD įvertiniais, kai a.d. X skirstinys priklauso a) normaliųjų skirstinių šeimai $\mathcal{P} = \{N(\mu,\ \sigma^2),\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma > 0\}$; b) gama skirstinių šeimai $\mathcal{P} = \{G(\lambda,\ \eta),\ 0 < \lambda < \infty\}$, $\eta > 0$ – žinoma konstanta; c) tolygiųjų skirstinių šeimai $\mathcal{P} = \{U(0,\ \theta),\ 0 < \theta < \infty\}$.

3.116. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a.d. X, kurio skirstinys priklauso šeimai $\mathcal{P} = \{p(x|\theta),\ 0 < \theta < \infty\}$; čia

$$p(i|\theta) = \mathbf{P}\{X = i|\theta\} = \frac{a_i\theta^i}{f(\theta)},\ i = 0,\ 1,\ 2, \ldots.$$

Įrodykite, kad parametro θ DT įvertinys randamas iš lygties

$$\theta f'(\theta)/f(\theta) = \bar{X},$$

kuri sutampa su lygtimi, gaunama θ įvertinio ieškant momentų metodu.

3.117. (**3.116** tęsinys). Užrašykite lygtis, iš kurių randami DT parametrų įvertiniai, kai skirstinys yra Puasono, binominis $B(1, p)$, logaritminis, taip pat nupjautinis Puasono (praleista reikšmė 0).

3.118. (**3.116** tęsinys). Palyginkite binominio ir Puasono skirstinių parametrų p^2 ir λ^2 DT ir NMD įvertinių kvadratinės rizikos funkcijas.

3.119. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a. d. X, kurio skirstinys priklauso tolygiųjų skirstinių šeimai: a) $\mathcal{P}_1 = \{U(\theta,\ 2\theta),\ 0 < \theta < \infty\}$; b) $\mathcal{P}_2 = \{U(\theta - 1/2,\ \theta + 1/2),\ -\infty < \theta < \infty\}$. Įrodykite, kad šeimos $\mathcal{P}_1$ parametro θ DT įvertinys yra $\hat{\theta} = X_{(1)}$, o šeimos $\mathcal{P}_2$ parametro θ DT įvertinys nėra vienareikšmis, – jis gali būti bet kuri statistika, įgyjanti reikšmes iš intervalo $(X_{(n)} - 1/2,\ X_{(1)} + 1/2)$.

3.120. (**3.119** tęsinys). Palyginkite DT įvertinių dispersijas su įvertinių, gautų momentų metodu, dispersijomis.

3.121. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a. d. X, kurio skirstinys priklauso Laplaso skirstinių šeimai $\mathcal{P} = \{f(x|\theta),\ -\infty < \theta < \infty\}$; čia $f(x|\theta) = \exp\{-|x - \theta|/2\},\ -\infty < x < \infty$. Įrodykite, kad parametro DT įvertinys yra empirinė mediana $\hat{x}_{0,5}$ ir

$$\sqrt{n}(\hat{x}_{0.5} - \theta) \xrightarrow{d} Z \sim N(0,\ 4),\ n \to \infty.$$

3.122. Tegu $\mathbf{X} = (X_{1i}, ..., X_{ki})^T,\ i = 1, ..., n$, yra paprastoji imtis a. v. $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_k)^T$, kurio skirstinys priklauso polinominių skirstinių šeimai $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_k = (1,\ \boldsymbol{\pi})\}$; čia $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, ..., \pi_k)^T$ yra k-mačiai vektoriai, kurių $0 < \pi_i < 1,\ \pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_k = 1$. Raskite parametrų $\pi_1, ..., \pi_k$ DT įvertinius, jų dispersijas ir kovariacijas.

3.123. (**3.122** tęsinys). Raskite parametro α DT įvertinį, kai $k = 3,\ \pi_1 = (1+\alpha)/2,\ \pi_2 = \pi_3 = (1 - \alpha)/4$, ir įvertinio asimptotinį $(n \to \infty)$ skirstinį.

3.124. (**3.122** tęsinys). Dviejų berniukų, dviejų mergaičių ir mišrių dvynukų, kai pirmasis gimė berniukas ir pirmoji gimė mergaitė, tikimybės atitinkamai yra $\pi_1 = p^2$, $\pi_2 = (1 - p)^2 = q^2$, $\pi_3 = \alpha(1 - p^2 - q^2)$ ir $\pi_4 = (1 - \alpha)(1 - p^2 - q^2)$. Raskite parametrų p ir α DT įvertinius.

3.125. Realizuojant $n = 8000$ kartų nepriklausomus eksperimentus, kurių metu gali įvykti vienas iš trijų nesutaikomų įvykių A, B ir C su tikimybėmis $1/2 - 2\alpha$, $1/2 + \alpha$ ir α, $0 \leq \alpha \leq 1/4$, užregistruoti šių įvykių dažniai: 2 014, 5 012 ir 974. Raskite parametro α didžiausiojo tikėtinumo įvertį.

3.126. Tegu $(X_i,\ Y_i)^T,\ i = 1, ..., n$, yra imtis a. v. $(X,\ Y)^T$, kurio skirstinys priklauso dvimačių normaliųjų skirstinių šeimai $\mathcal{P} = N_2(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma})$; čia $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\ \mu_2)^T, -\infty < \mu_1,\ \mu_2 < \infty$, $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]$, $\sigma_{11} = \sigma_1^2$, $\sigma_{22} = \sigma_2^2$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \rho\sigma_1\sigma_2$, $0 < \sigma_1,\ \sigma_2 < \infty$, $|\rho| < 1$. Raskite parametrų DT įvertinius. Apskaičiuokite matricos, atvirkštinės informacinei matricai, elementus.

3.127. Asimptotiškai $(n \to \infty)$ palyginkite dispersijas ekstremaliųjų reikšmių skirstinio parametrų įvertinių, gautų pagal didumo n paprastąją imtį DT ir momentų metodais.

3.128. Asimptotiškai $(n \to \infty)$ palyginkite dispersijas gama skirstinio parametrų įvertinių, gautų pagal didumo n paprastąją imtį DT ir momentų metodais.

3.129. Asimptotiškai $(n \to \infty)$ palyginkite dispersijas neigiamojo binominio skirstinio parametrų įvertinių, gautų pagal didumo n paprastąją imtį DT ir momentų metodais.

3.130. Asimptotiškai $(n \to \infty)$ palyginkite dispersijas Koši skirstinio parametrų įvertinių, gautų pagal didumo n paprastąją imtį: a) DT metodu, b) grindžiamų statistikomis $\hat{x}_{0,5}$, $\hat{x}_{0,25}$, $\hat{x}_{0,75}$.

3.131. Tegu T_n yra pagrįstasis ir asimptotiškai normalusis parametro θ įvertinys, t. y.

$$\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{d} X \sim N(0,\ \sigma^2(\theta)),\ n \to \infty.$$

Įrodykite, kad įvertinys

$$T_n' = \begin{cases} \alpha T_n, \text{ kai } kai|T_n| \leq n^{-1/4}, \\ T_n, \text{ kai } T_n > n^{-1/4}, \end{cases}$$

taip pat asimptotiškai $(n \to \infty)$ normalusis ir dispersija lygi $\alpha^2\sigma^2(\theta)$, kai $\theta = 0$, ir $\sigma^2(\theta)$, kai $\theta \neq 0$. Taigi įvertinio T_n' dispersija gali būti mažesnė už T_n dispersiją, kai $\theta = 0$, ir lygi T_n dispersijai, kai $\theta \neq 0$.

3.132. Įvertinkite imties (žr. 2 skyriaus 2.1 pratimą) vidurkį ir dispersiją, tardami, kad buvo stebimas normalusis a. d.

3.133. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a. d. $X \sim N(0,\ \sigma^2)$, $\sigma > 0$.

a) Įrodykite, kad $\mathbf{E}(|X_i|) = \sigma\sqrt{2/\pi}$.

b) Naudodamiesi a) punkte gautu rezultatu, momentų metodu raskite σ įvertinį $\hat{\sigma}_n$. Raskite $\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma)$ asimptotinį skirstinį.

c) Kitas momentų metodu gautas σ įvertinys yra

$$\tilde{\sigma}_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{1/2}.$$

Raskite $\sqrt{n}(\tilde{\sigma}_n - \sigma)$ asimptotinį skirstinį ir palyginkite jį su b) punkto rezultatu.

3.134. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a. d. $X \sim \mathcal{E}(\mu,\ 1)$, $\mu \in \mathbf{R}$.

a) Įrodykite, kad $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ yra pakankamoji μ statistika.

b) Įrodykite, kad $X_{(1)} \xrightarrow{P} \mu$, kai $n \to \infty$.

3.135. Tegu $X_1, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a. d., kurių tankio funkcija

$$f(x; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} a(\theta_1, \theta_2)h(x), & \text{kai } \theta_1 \leqslant x \leqslant \theta_2, \\ 0 & \text{kitais atvejais;} \end{cases}$$

čia $h(x) > 0$ – žinoma tolydžioji funkcija, apibrėžta realiųjų skaičių tiesėje.

a) Įrodykite, kad θ_1 ir θ_2 DT įvertiniai yra atitinkamai $X_{(1)}$ ir $X_{(n)}$.

3.136. Tegu $(X_1, Y_1)^T, \ldots, (X_n, Y_n)^T$ yra nepriklausomos vienodai pasiskirsčiusios normaliųjų a. d. poros; čia X_i ir Y_i – nepriklausomi $N(\mu_i, \sigma^2)$ a. d.

a) Raskite parametrų $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ir σ^2 DT įvertinius.

b) Įrodykite, kad parametro σ^2 DT įvertinys nėra pagrįstasis. Ar šis rezultatas prieštarauja teorijai apie DT įvertinių pagrįstumą? Kodėl?

c) stebimi tik $Z_1, \ldots, Z_n$; čia $Z_i = X_i - Y_i$. Raskite σ^2 DT įvertinį, gautą naudojant $Z_1, \ldots, Z_n$, ir įrodykite, kad jis yra suderintasis.

3.137. Tegu $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ yra nepriklausomi a. d., turintys eksponentinius skirstinius. Tegu X_i tankio funkcija

$$f_i(x) = \lambda_i\theta\exp(-\lambda_i\theta x), \quad x \geqslant 0,$$

o Y_i tankio funkcija

$$g_i(x) = \lambda_i\exp(-\lambda_i x), \quad x \geqslant 0;$$

čia $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ir θ yra nežinomi parametrai.

a) Įrodykite, kad parametro θ DT įvertinys tenkina lygtį

$$\frac{n}{\hat{\theta}} - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i}{1 + \hat{\theta}R_i} = 0;$$

čia $R_i = X_i/Y_i$.

b) Įrodykite, kad R_i tankio funkcija yra

$$f_R(x; \theta) = \theta(1 + \theta x)^{-2}, \quad x \geqslant 0,$$

o θ DT įvertinys, gautas naudojant $R_1, \ldots, R_n$, sutampa su pateikiamu a) punkte.

c) Tegu $\hat{\theta}_n$ yra DT įvertinys, nurodytas b) punkte. Raskite $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ ribinį skirstinį.

d) Lentelėje pateikiami (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, n$ duomenys. Apskaičiuokite θ DT įvertį artutiniu metodu. Parinkite tinkamą pradinį artinį ir pagrįskite pasirinkimą.

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
0,7	3,8	20,2	2,8	1,1	2,8	15,2	8,8
11,3	4,6	0,3	1,9	1,9	3,2	0,2	7,6
2,1	2,1	0,9	1,4	0,5	8,5	0,7	1,3
30,7	5,6	0,7	0,4	0,8	14,5	0,4	2,2
4,6	10,3	2,3	0,9	1,2	14,4	2,3	4,0

e) Pateikite DT įverčio, gauto d) punkte, standartinės paklaidos įvertį.

3.138. Tegu $X_1, \dots, X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami a. d. ir gedimų intensyvumo funkcija

$$\lambda(x) = \begin{cases} \lambda_1, & \text{kai } x \leqslant x_0, \\ \lambda_2, & \text{kai } x > x_0; \end{cases}$$

čia λ_1 ir λ_2 yra nežinomi parametrai, o x_0 – žinoma konstanta.

a) Įrodykite, kad X_i tankio funkcija

$$f(x; \lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} \lambda_1 \exp(-\lambda_1 x), & \text{kai } x \leqslant x_0, \\ \lambda_2 \exp(-\lambda_2(x - x_0) - \lambda_1 x_0), & \text{kai } x > x_0. \end{cases}$$

b) Raskite parametrų λ_1 ir λ_2 įvertinius ir jų ribinį bendrą skirstinį.

3.139. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a. d. X, kurio skirstinys priklauso šeimai $\mathcal{P} = \{P_{\boldsymbol{\theta}},\ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$. Momentų metodu raskite parametrų įvertinius, kai $P_{\boldsymbol{\theta}}$ yra:

a) gama skirstinys $G(\alpha, \gamma)$, $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \gamma)^T$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$;
(b) eksponentinis skirstinys $E(a, \theta)$, $\boldsymbol{\theta} = (a, \gamma)^T$, $a \in \mathbf{R}$, $\theta > 0$;
(c) beta skirstinys $Be(\alpha, \beta)$, $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^T$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$;
(d) lognormalusis skirstinys $LN(\mu, \sigma)$, $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma)^T$, $\mu \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$;
(e) tolygusis skirstinys $U\left(\theta - \frac{1}{2},\ \theta + \frac{1}{2}\right)$, $\theta \in \mathbf{R}$;
(f) neigiamas binominis skirstinys $B^-(n,\ p)$, $\boldsymbol{\theta} = (p, n)^T$, $p \in (0,\ 1)$, $n = 1,\ 2, \dots$;
(g) logaritminis skirstinys, kurio parametras $\theta = p \in (0,\ 1)$;
(h) chi kvadrato skirstinys $\chi^2(k)$, $\theta = k$, $k = 1,\ 2, \dots$.

3.140. Tegu $\mathbf{X}$ yra imtis iš skirstinio, kurio tankio funkcija yra $f_{\boldsymbol{\theta}}$, o $T(\mathbf{X})$ – pakankamoji $\boldsymbol{\theta}$ statistika. Įrodykite: jeigu egzistuoja DT įvertinys, tai jis yra T funkcija.

3.141. Tegu $X_1, \dots, X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a. d., kurių tankio funkcija yra $f_{\boldsymbol{\theta}}$ σ baigtinio mato ν atžvilgiu. Raskite parametro $\boldsymbol{\theta}$ DT įvertinį tokiais atvejais:

a) $f_\theta(x) = 1/\theta$, kai $x = 1, 2, ..., \theta$, θ yra sveikasis skaičius tarp 1 ir θ_0;
b) $f_\theta(x) = \mathrm{e}^{-(x-\theta)}$, $\theta < x < \infty$, $\theta > 0$;
c) $f_\theta(x) = \theta(1 - x)^{\theta - 1}$, $0 < x < \infty$, $\theta > 1$;
d) $f_\theta(x) = \frac{\theta}{1-\theta} x^{(2\theta - 1)/(1-\theta)}$, $0 < x < \infty$, $\theta \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right)$;
e) $f_\theta(x) = 2^{-1}\mathrm{e}^{-|x-\theta|}$, $x \in \mathbf{R}$, $\theta > 0$;
f) $f_\theta(x) = \theta x^{-2}$, $\theta < x < \infty$, $\theta > 0$;
g) $f_\theta(x)$ yra tankio funkcija skirstinio $N(\theta, \theta^2)$, $\theta \in \mathbf{R}$;
h) $f_{\boldsymbol{\theta}}(x)$ yra tankio funkcija eksponentinio skirstinio $\mathcal{E}(\mu,\ \sigma)$, $\boldsymbol{\theta}^T = (\mu, \sigma) \in \mathbf{R} \times (0, \infty)$;
i) $f_{\boldsymbol{\theta}}(x)$ yra tankio funkcija lognormalaus skirstinio $LN(\mu,\ \sigma)$, $\boldsymbol{\theta}^T = (\mu, \sigma) \in \mathbf{R} \times (0, \infty)$;
j) $f_\theta(x) = 1$, $x \in (0,\ 1)$, kai $\theta = 0$, ir $f_\theta(x) = (2\sqrt{x})^{-1}$, $x \in (0,\ 1)$, kai $\theta = 1$;
k) $f_\theta(x) = \beta^{-\alpha}\alpha x^{\alpha - 1}$, $0 < x < \beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$;
l) $f_\theta(x) = C_\theta^x p^x (1 - p)^{\theta - x}$, $x = 0,\ 1, \dots, \theta$, $\theta = 1,\ 2, \dots$; čia $p \in (0,\ 1)$ yra žinomas.

3.142. Tegu $(Y_1, Z_1)^T, \dots, (Y_n, Z_n)^T$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a. v., kurių tankio funkcija

$$f(y, z | \lambda,\ \mu) = \lambda^{-1}\mu^{-1}\mathrm{e}^{-y/\lambda}\mathrm{e}^{-z/\mu},\ 0 < y, z < \infty,$$

čia $\lambda > 0$ ir $\mu > 0$.

a) Raskite $(\lambda, \mu)^T$ DT įvertinį.

b) Stebima tik $X_i = \min(Y_i, Z_i)$ ir $\Delta_i = 1$, kai $X_i = Y_i$, ir $\Delta_i = 0$, kai $X_i = Z_i$. Raskite $(\lambda, \mu)^T$ DT įvertinį.

c) Raskite įvertinių asimptotinius skirstinius.

3.143. Tegu $X_1, \dots, X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę diskretieji a. d., kurių skirstinys nusakytas tikimybėmis

$$\mathbf{P}\{X_1 = x\} = [x!(1 - \mathrm{e}^{-\theta})]^{-1}\theta^x \mathrm{e}^{-\theta},\ x = 1, 2, ...;$$

čia $\theta > 0$. Įrodykite, kad tikėtinumo lygtis turi vienintelę šaknį, kai $\bar{x} > 1$. Ar ši šaknis yra θ DT įvertinys?

3.144. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. $X \sim \mathcal{E}(a,\ \theta)$, parametrai a ir θ nežinomi. Raskite parametrų a ir θ DT įvertinių ASE jų NMD įvertinių atžvilgiu.

3.145. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. X, kurio skirstinys yra Pareto su parametrais a ir θ.

a) Raskite (a, θ) DT įvertinį.

b) Raskite parametro a DT įvertinio ASE NMD įvertinio atžvilgiu.

3.146. Tegu $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę k-mačiai a.v., turintys $N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ skirstinį su nežinomais $\boldsymbol{\mu}$ ir $\boldsymbol{\Sigma}$. Raskite $\boldsymbol{\mu}$ ir $\boldsymbol{\Sigma}$ DT įvertinius ir jų asimptotinius skirstinius.

3.147. Tegu $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę dvimačiai normalieji a.v., kurių vidurkių vektorius nulinis, nežinomos kovariacijų matricos įstrižainės elementai yra σ_1^2 ir σ_2^2, o ne įstrižainės elementai yra $\sigma_1\sigma_2\rho$. Tegu $\boldsymbol{\theta} = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)^T$. Raskite Fišerio informacinę matricą $\boldsymbol{I}_n(\theta)$ ir $\boldsymbol{\theta}$ DT įvertinio asimptotinį skirstinį.

3.148. Tegu $X_1, \ldots, X_n$ ir $Y_1, \ldots, Y_n$ yra nepriklausomi a.d., turintys atitinkamai $N(\mu, \sigma^2)$ ir $N(\mu, \tau^2)$ skirstinius su nežinomu $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2, \tau^2)^T$. Raskite $\boldsymbol{\theta}$ DT įvertinį ir įrodykite, kad jis asimptotiškai efektyvusis.

3.6 skyrelis

3.149. Bandant sportinį lėktuvą, gautos šios jo maksimalaus greičio (m/s) reikšmės: 422,2; 418,7; 425,6; 420,3; 425,8; 423,1; 431,5; 428,2; 438,3; 434,0; 411,3; 417,2; 413,5; 441,3; 423,0. Tarę, kad buvo stebimas normalusis a.d., raskite vidurkio ir vidutinio kvadratinio nuokrypio taškinius ir intervalinius ($Q = 0.95$) įverčius.

3.150. Lentelėje pateikti skaičiai m_i tokių vienodo ploto (0,25 kv. km) pietinės Londono dalies rajonų, į kuriuos Antrojo pasaulinio karo metu pataikė po i lėktuvų – sviedinių.

i	0	1	2	3	4	5	Σ
m_i	229	211	93	35	7	1	576

Tarę, kad buvo stebimas Puasono a.d., raskite parametro λ taškinį ir intervalinį ($Q = 0,95$) įverčius.

3.151. Laikas nuo užsakymo pateikimo iki jo gavimo (pristatymo laikas) yra pasiskirstęs pagal gama skirstinį $G(\lambda,\ \eta)$. Lentelėje pateikiamos atsitiktinai parinktų užsakymų pristatymo laikas.

(i – eilės numeris, X_i – laikas).

i	X_i	i	X_i	i	X_i	i	X_i
1	10	6	7	11	10	16	7
2	10	7	11	12	6	17	6
3	6	8	12	13	13	18	16
4	11	9	12	14	8	19	9
5	8	10	6	15	12	20	5

1) Raskite parametrų λ ir η įverčius.

2) Tarę, kad parametro η reikšmė lygi 10, DT metodu raskite parametro λ įvertį. Palyginkite jį su NMD įverčiu. Sudarykite parametro λ pasikliovimo intervalą ($Q = 0,95$).

3.152. Kiekvienomis iš 100 vienodų staklių gaminami I ir II rūšies gaminiai. Tikrinant produkcijos kokybę, atsitiktinai paimta po 10 gaminių, pagamintų skirtingomis staklėmis, ir nustatytas II rūšies gaminių skaičius. Bandymo rezultatai pateikiami lentelėje (m_i – skaičius imčių, kuriose rasta po i II rūšies gaminių).

i	0	1	2	3	4	5	Σ
m_i	1	10	27	36	25	1	100

Tarę, kad buvo stebimas binominis a.d., raskite parametro p NMD įvertį ir pasikliovimo intervalą ($Q = 0,95$).

3.153. Sumodeliuokite didumo $n = 100$ imtį, gautą stebint normalųjį a. d. $X \sim N(0,\ 4)$. Raskite taškinius ir intervalinius parametrų įverčius ir palyginkite juos su tikrosiomis parametrų reikšmėmis. Raskite tikimybes, kad tokio pat didumo imčių įvertiniai skirsis nuo tikrųjų reikšmių daugiau negu gautieji įverčiai.

3.154. Bandant kiekvieną iš 10 prietaisų, nebuvo rasta nė vieno defektinio prietaiso. Raskite tikimybės, kad prietaisas yra defektinis, pasikliovimo intervalą, kai pasikliovimo lygmenys yra 0,8; 0,9; 0,99 ir defektinių prietaisų skaičiaus skirstinys yra binominis.

3.155. Nustatant 200 elektros lempučių degimo laiką T, gauti stebiniai, kurie pateikiami lentelėje.

Nr.	Intervalas	Dažnis	Nr.	Intervalas	Dažnis
1	0–300	53	7	1800–2100	9
2	300–600	41	8	2100–2400	7
3	600–900	31	9	2400–2700	5
4	900–1200	22	10	2700–3000	3
5	1200–1500	16	11	3000–∞	2
6	1500–1800	12			

Tarę, kad a. d. T skirstinys yra eksponentinis, raskite parametro λ taškinį ir asimptotinį intervalinį įverčius ($Q = 0,99$).

3.156. Raskite parametro λ pasikliovimo intervalus, kai pasikliovimo lygmuo $Q = 0,95$, naudodamiesi 4 imtimis (žr. 2 skyriaus 2.28 pratimą) ir tardami, kad buvo stebimi Puasono a. d. Ar tikėtina, kad tose imtyse parametras λ vienodas ?

3.157. Nagrinėjant normaliojo a. d. didumo $n = 100$ imtį, gauti tokie vidurkio pasikliovimo intervalo rėžiai: $\underline{\mu} = 1,25$, $\overline{\mu} = 2,05$. Koks to intervalo pasikliovimo lygmuo, jei $\sigma^2 = 4$?

3.158. Kokio didumo turi būti atsitiktinio dydžio $X \sim N(\mu,\ 1)$ imtis, kad parametro μ pasikliovimo intervalo, kai pasikliovimo lygmuo $Q = 0,95$, ilgis būtų ne didesnis kaip 0,1 ?

3.159. Pataikymo į taikinį vienu šūviu tikimybė lygi p. Taikinys numušamas pataikius 3 kartus. Raskite tikimybės p pasikliovimo intervalą, kurio pasikliovimo lygmuo $Q = 0,95$, kai žinoma, kad taikinį pavyko numušti 12-uoju šūviu.

3.160. To paties kūno 5 nepriklausomi svėrimo rezultatai yra tokie: 4,12; 3,92; 4,55; 4,04; 4,35. Nurodykite 6-ojo nepriklausomo svėrimo rezultato prognozės intervalą, kai pasikliovimo lygmuo $Q = 0,95$.

3.161. Tegu $X_1, \dots, X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a. d., kurių tankio funkcija

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1 + (x-\theta)^2}.$$

a) Tegu $X_1, \dots, X_n$ empirinė mediana yra $\hat\theta_n$. Įrodykite, kad $\sqrt{n}(\hat\theta_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$. Raskite σ^2 reikšmę ir panaudoję šį rezultatą sudarykite parametro θ asimptotinį pasikliovimo intervalą su pasikliovimo lygmeniu Q.

b) Raskite θ asimptotinį pasikliovimo intervalą su pasikliovimo lygmeniu Q naudodami DT įvertinį.

c) Kuris iš šių pasikliovimo intervalų siauresnis?

3.162. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a. d. $X \sim \mathcal{E}(a,\ 1/\theta)$, kai $a \in \mathbf{R}$ ir $\theta > 0$ nežinomi.

a) Naudodamiesi statistika $T_1(X) = \sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})$, sudarykite θ pasikliovimo intervalą, kai pasikliovimo lygmuo yra $Q = 1 - \alpha$, ir raskite vidutinį intervalo ilgį.

b) Naudodamiesi statistikomis $T_1(X)$ ir $T_2(X) = X_{(1)}$ sudarykite a pasikliautinąjį intervalą, kai pasikliovimo lygmuo yra $1 - \alpha$, ir raskite vidutinį intervalo ilgį.

c) Sudarykite parametro $\boldsymbol{\theta} = (a,\ \theta)^T$ pasikliovimo sritį, kai pasikliovimo lygmuo $1 - \alpha$.

3.163. Tegu $\mathbf{X}$ yra imtis, o statistika $T(\mathbf{X})$ turi skirstinį, priklausantį tik nuo poslinkio parametro θ, $\theta \in \mathbf{R}$. Naudodamiesi statistika $T(\mathbf{X})$, sudarykite θ pasikliovimo intervalą, kai pasikliovimo lygmuo yra $1 - \alpha$, ir raskite vidutinį intervalo ilgį. Įrodykite: jeigu $T(\mathbf{X})$

pasiskirstymo funkcija yra tolydi, tai visada galima rasti θ pasikliovimo intervalą, kai pasikliovimo lygmuo yra $1-\alpha$, $\alpha \in (0,\ 1)$.

3.164. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a.d. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

a) Įrodykite, kad $\sqrt{n}(\bar{X} - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ skirstinys asimptotiškai ($n \to \infty$) nepriklauso nuo nežinomo parametro. Naudodamiesi šiuo faktu, raskite aproksimacinį pasikliovimo intervalą, kai pasikliovimo lygmuo $1-\alpha$.

b) Įrodykite, kad $\sqrt{n}(\bar{X} - \lambda)/\sqrt{\bar{X}}$ asimptotiškai ($n \to \infty$) nepriklauso nuo nežinomo parametro. Naudodamiesi šiuo faktu, sudarykite aproksimacinį pasikliovimo intervalą, kai pasikliovimo lygmuo $1-\alpha$.

3.165. Tegu $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$, $i = 1,\ 2$, yra dvi nepriklausomos imtys nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių a.d., kurių skirstiniai yra $N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1,\ 2$; čia visi parametrai nežinomi. Įrodykite, kad funkcija $(\bar{X}_{1\cdot} - \bar{X}_{2\cdot} - \mu_1 + \mu_2)/\sqrt{n_1^{-1}s_1^2 + n_2^{-1}s_2^2}$ asimptotiškai ($n_1,\ n_2 \to \infty$, $n_1/n_2 \to c \in (0, \infty)$) nepriklauso nuo nežinomų parametrų. Naudodamiesi šiuo faktu, raskite aproksimacinį parametro $\mu_1 - \mu_2$ pasikliovimo intervalą, kai pasikliovimo lygmuo $1-\alpha$.

3.166. Tegu $Y_1, \ldots, Y_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a.d. su baigtiniais $\mu_y = \mathbf{E}Y_1$, $\sigma_y^2 = \boldsymbol{V}(Y_1)$, $\alpha_3 = \mathbf{E}Y_1^3$ ir $\alpha_4 = \mathbf{E}Y_1^4$. Raskite funkciją, kurios skirstinys asimptotiškai ($n \to \infty$) nepriklausytų nuo nežinomų parametrų, ir sudarykite parametro $\boldsymbol{\theta} = (\mu_y, \sigma_y^2)^T$ aproksimacinę pasikliovimo sritį.

3.167. Tegu $X_1, ..., X_n$ yra paprastoji imtis, gauta stebint a. d. $X \sim LN(\mu, \sigma)$.

a) Įrodykite, kad $\theta = \mathbf{E}X = \exp\{\mu + \sigma^2/2\}$, $\gamma = \boldsymbol{V}X = \exp\{2\mu + \sigma^2\}(\exp\{\sigma^2\} - 1)$.

b) Įrodykite, kad parametrų θ ir γ DT įvertiniai yra

$$\hat{\theta} = \exp\{\bar{Y} + m_2/2\}, \quad \hat{\gamma} = \exp\{2\bar{Y} + m_2\}(\exp\{m_2\} - 1),$$

čia

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i, \quad m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2, \quad Y_i = \ln X_i, \quad i = 1, ..., n.$$

c) Įrodykite, kad

$$\mathbf{E}\hat{\theta} = \theta\exp\{-(n-1)\sigma^2/(2n)\}(n/(n-\sigma^2))^{(n-1)/2} = \theta + O(1/n^2), \quad n \to \infty;$$

$$\boldsymbol{V}\hat{\theta} = \exp\{2\mu + \sigma^2/n\}[\exp\{\sigma^2/n\}(n/(n-2\sigma^2))^{(n-1)/2} - (n/(n-\sigma^2))^{n-1}] = \theta^2\sigma^2/n + O(1/n^2).$$

3.168. (**3.167** pratimo tęsinys). Tarkime, pagal didumo $n = 100$ imtį gauti įverčiai $\bar{Y} = 1,45$, $m_2 = 4,21$.

a) Apskaičiuokite parametrų θ ir γ DT įverčius.

b) Raskite parametro θ asimptotinį pasikliovimo intervalą ($Q = 0,95$).

3.169. Pasėjus kultūrą Petri lėkštelėje po tam tikro laiko registruojamas bakterijų skaičius $Y = X_1 + X_2 + ... + X_N$; čia N – kolonijų skaičius, X_i – bakterijų skaičius i-oje kolonijoje. Tarkime, kad $X_1, X_2, ...$ yra vienodai pasiskirstę n. a. d., turintys Puasono skirstinį su parametru θ, o N nepriklausantis nuo $X_1, X_2, ...$ a. d., turintis Puasono skirstinį su parametru λ. Momentų metodu raskite parametrų λ ir θ įvertinius.

3.170. (**3.169** pratimo tęsinys). Tarkime, pagal didumo $n = 20$ imtį, gautą stebint a. d. Y, apskaičiuoti nepaslinktieji vidurkio $\mu = \mathbf{E}Y$ ir dispersijos $\sigma^2 = \boldsymbol{V}Y$ įverčiai $\hat{\mu} = \bar{Y} = 50$ ir $\hat{\sigma^2} = s^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2/(n-1) = 360$.

a) Apskaičiuokite parametrų θ ir λ momentų metodo įverčius.

b) Raskite vidurkio $\mu = \lambda\theta$ asimptotinį pasikliovimo intervalą naudodami aproksimaciją

$$\sqrt{n}\frac{\hat{\mu} - \mu}{s} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,\ 1)$$

ir aproksimaciją

$$\sqrt{n}\frac{\hat{\mu} - \mu}{\sqrt{\mu(1+\hat{\theta})}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,\ 1).$$

c) Imdami $Q = 0,95$ raskite punkte b) gautų intervalų realizacijas.

3.171. Pagal tris didumo $n_1 = 20, n_2 = 50, n_3 = 30$ imtis, gautas stebint n. a. d. $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, $Z \sim N(\mu_3, \sigma^2)$, apskaičiuotos NMD įvertinių realizacijos $\hat{\mu}_1 = \bar{X} = 2,12, s_x^2 = 2,84$, $\hat{\mu}_2 = \bar{Y} = 1,09, s_y^2 = 3,91$, $\hat{\mu}_3 = \bar{Z} = 3,14, s_z^2 = 2,53$.

a) Raskite parametro σ^2 NMD įvertį naudodami visus duomenis; raskite parametro σ lygmens $Q = 0,99$ pasikliovimo intervalą.

b) Raskite parametro $\theta = \mu_1 + \mu_2 - \mu_3$ NMD įvertį; sudarykite parametro θ lygmens $Q = 0,95$ pasikliovimo intervalą.

3.172. Krakmolo kiekis bulvėse nustatomas dviem būdais. Norint palyginti tuos būdus, buvo paimta 16 bulvių ir kiekvienos iš jų krakmolo kiekis nustatytas abiem būdais. Gauti stebiniai (krakmolingumas procentais) surašyti lentelėje (X_i – krakmolingumas tiriant i-ąją bulvę pirmu būdu; Y_i – antru būdu).

i	X_i	Y_i	i	X_i	Y_i
1	21,7	21,5	9	14,0	13,9
2	18,7	18,7	10	17,2	17,0
3	18,3	18,3	11	21,7	21,4
4	17,5	17,4	12	18,6	18,6
5	18,5	18,3	13	17,9	18,0
6	15,6	15,4	14	17,7	17,6
7	17,0	16,7	15	18,3	18,5
8	16,6	16,9	16	15,6	15,5

Priėmę normalumo prielaidą, palyginkite šiuos du krakmolingumo nustatymo metodus: a) raskite parametro $\theta = \mathbf{E}X - \mathbf{E}Y$ lygmens $Q = 0,95$ pasikliovimo intervalą remdamiesi (3.7.8) formule; b) raskite parametro θ lygmens $Q = 0,95$ pasikliovimo intervalą remdamiesi 3.7.2 skyrelio formule; c) paaiškinkite, kodėl gaunami tokie skirtingi rezultatai; d) raskite koreliacijos koeficiento ρ taškinį ir intervalinį ($Q = 0,95$) įverčius.

3.173. Per pirmą dieną skaitiklis užregistravo 20 026 puasoninio srauto impulsus, o per antrą – 19 580. Raskite intensyvumų santykio $\theta = \lambda_1/\lambda_2$ pasikliovimo intervalą ($Q = 0,99$).

3.174. Dviejose nepriklausomose Bernulio bandymų schemose atlikus $n_1 = n_2 = 5000$ bandymų įvykis A įvyko 2 602 ir 2 398 kartus. Tegu įvykio A pasirodymo tikimybė pirmoje bandymų schemoje yra p_1, o antrojoje – p_2. Raskite parametro $\theta = p_1 - p_2$ asimptotinį pasikliovimo intervalą ($Q = 0,99$). Ar yra pagrindo teigti, kad įvykio A pasirodymo tikimybės abiejose schemose yra vienodos?

3.175. Tarkime, kad daugialypis integralas, kurio tikroji reikšmė yra 0,3, buvo skaičiuojamas Monte – Karlo metodu. Kiek reikia atlikti nepriklausomų modeliavimų N, kad gautosios reikšmės absoliuti santykinė paklaida su tikimybe, ne mažesne už 0,99, neviršytų a) 0,2; b) 0,1?

3.176. Lentelėje pateikti prapuolimo kampai 209 pašto balandžių, kai atliekant bandymą buvo bandoma paveikti jų „vidinį laikrodį“ (žr. [14]).

Kryptis	Dažnis	Kryptis	Dažnis
$0° -$	26	$180° -$	14
$30° -$	22	$210° -$	11
$60° -$	26	$240° -$	12
$90° -$	30	$270° -$	5
$120° -$	29	$300° -$	5
$150° -$	18	$330° -$	11

Duomenys sugrupuoti į 30° ilgio intervalus. Lentelėje nurodyti kampai φ_i, atitinkantys i-ojo intervalo pradžią, ir patekusių į i-ąjį intervalą dažniai n_i, $i = 1, ...12$. Tardami, kad turimus duomenis galima traktuoti kaip paprastosios imties, gautos stebint atsitiktinį kampą $\varphi \sim M(\mu, \theta)$, realizaciją, raskite parametrų μ, θ taškinius įverčius ir sudarykite aproksimacinius intervalus su pasikliovimo lygmeniu $Q = 0,95$.

3.177. Lentelėje pateikti duomenys apie užregistruotus susirgimo leukemija atvejus Anglijoje per 1946 – 1960 metų laikotarpį sugrupuoti mėnesiniais intervalais (žr.[14]).

Mėnuo	Susirgo	Mėnuo	Susirgo	Mėnuo	Susirgo
Sausis	39	Gegužė	38	Rugsėjis	37
Vasaris	37	Birželis	59	Spalis	47
Kovas	29	Liepa	50	Lapkritis	34
Balandis	45	Rugpjūtis	54	Gruodis	37

Paverskite duomenis kampų stebėjimais sutapatindami metų intervalą su intervalu $(0,\ 2\pi]$, t. y. sausis atitinka sektorių nuo 0° iki 30°; vasaris – sektorių nuo 30° iki 60° ir t. t. Tardami, kad buvo stebimas atsitiktinis kampas $\varphi \sim M(\mu, \theta)$ a) raskite taškinius parametrų (μ, θ) įverčius; b) sudarykite pasikliovimo lygmens $Q = 0,95$ aproksimacinius pasikliovimo intervalus.

ATSAKYMAI IR NURODYMAI

3.1 skyrelis

3.1. $n \geq 2654$. **3.2.** $n \geq 1330$. **3.3.** $n \geq 133$. **3.4.** $n \geq 16$. **3.6.** *Nurodymas.* Atsitiktinis dydis $X_i^\alpha \sim \mathcal{E}(\rho^\alpha)$. **3.9.** $\mathbf{E}(cX_{(n)}) = cn\theta/(n+1)$, $\boldsymbol{V}(cX_{(n)}) = c^2 n\theta^2/[(n+1)^2(n+2)]$; $c = (n+1)/n$. **3.11.** *Nurodymas.* Atsitiktinio dydžio $\bar\theta$ dispersija $\boldsymbol{V}\bar\theta = O(1/n^2)$. **3.14.** $\hat\vartheta = 1$, kai $|\bar X| \leq c_n$, ir $\hat\vartheta = 0$, kai $|\bar X| > c_n$; čia $c_n = 1/n^\alpha$, $0 < \alpha < 1/2$. **3.15.** Neišliks. **3.18.** $X^2 - Y$. **3.19.** $\mathbf{E}|X - Y| = 2\sigma/\sqrt{\pi}$, $\mathbf{E}|X-Y|^2 = 2\sigma^2$. **3.20.** Reikia padauginti iš konstantos $(n+1)/[2(n-1)]$. Gauto įvertinio dispersija yra $4\theta^2(n+1)/[(n-1)^2(n+2)]$. **3.21.** Parametro $\ln p$ NMD įvertinys yra $h(X) = -(1 + 1/2 + ... + 1/(X-1))$, kai $X > 1$, $h(X) = 0$, kai $X = 1$. **3.22.** $(X|X+Y=N) \sim B(N,\ p)$, $p = \lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$; $\hat\theta = X/Y$. **3.23.** $38/50 + 12\cdot 11\cdot 10/(50\cdot 49\cdot 48)$; $12\cdot 38/(49\cdot 50)$; $12!\ 38!/50!$; 0; 0. **3.24.** $-1/13$.

3.2–3.3 skyreliai

3.28. Funkcija $\gamma(p)$ turi būti ne aukštesnio kaip n-ojo laipsnio polinomas p atžvilgiu. **3.29.** $\hat p = T/n$; $\hat{p^2} = T(T-1)/[n(n-1)]$; $\hat{pq} = T(n-T)/[n(n-1)]$; tegu $\theta = C_n^k p^k q^{n-k}$, tada $\hat\theta = 1$, kai $T = k$, ir $\hat\theta = 0$, kai $T \neq k$. **3.31.** $\hat\lambda = T/n$; $\hat{\lambda^2} = T(T-1)/n^2$; $\lambda(1 \hat{-} \lambda) = T(n-T+1)/n^2$; $e^{\hat{-}\lambda} = ((n-1)/n)^T$. **3.32.** $\hat\gamma(\lambda) = 0$, kai $T < m$, $\hat\gamma(\lambda) = C_T^m(c/n)^m(1 - c/n)^{T-m}$, kai $T \geq m$. **3.35.** Konstanta a neegzistuoja; konstanta b tenkina nelygybes $(n-3)/(n-1) < b < 1$. **3.39.** a) $\sum_i \ln X_i$; b) $\sum_i X_i$; c) $(\sum_i \ln X_i, \sum_i X_i)$; d) $X_{(1)}$. **3.40.** *Nurodymas.* A.d. $|X_i| \sim \mathcal{E}(\lambda)$, o a.v. $(|X_1|, ..., |X_n|)^T$ sąlyginis skirstinys, kai $T = t$, yra toks pat kaip paprastosios n didumo imties, gautos stebint a.d. $Y \sim U(0,\ t)$. **3.41.** *Nurodymas.* Kai $T = t$ yra fiksuotas, a.v. $(X_1, ..., X_n)^T$ sąlyginis skirstinys nusakomas tikimybėmis $\mathbf{P}\{X_1 = m_1, ..., X_n = m_n | X_1 + ... + X_n = t\} = 1/C_{t-1}^{n-1}$, $t \geq n$, $m_i \geq 1$, $i = 1, ..., n$, $m_1 + ... + m_n = t$. **3.43.** Tegu gautoji imtis yra $(X_1, ..., X_n)^T$. Tada NMD įvertiniai yra $\hat\varphi = X_n/n$, $\hat\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1} - \hat\varphi)^2/(n-1)$, $X_0 = 0$. *Nurodymas.* $X_i - X_{i-1} \sim N(0,\ \sigma^2)$, $i = 1, 2, ..., n$. **3.46.** Neegzistuoja. **3.47.** Kai σ žinomas, tai $\hat\Phi((c-\mu)/\sigma) = \Phi((c - \bar X)/(\sigma\sqrt{(n-1)n}))$. *Nurodymas.* Imkite nepaslinktąjį įvertinį $\tilde\Phi = 1$, kai $X_1 < c$, ir $\tilde\Phi = 0$, kai $X_1 \geq c$. Raskite $\tilde\Phi$ vidurkį pakankamosios statistikos $(\bar X,\ s^2)$ arba $\bar X$ atžvilgiu. **3.48.** $\hat f(x|\mu, \sigma) = \sqrt{n/\pi}\Gamma((n-1)/2)/((n-1)\Gamma((n-2)/2)s^{n-3})[s^2 - n(\bar X - c)^2/(n-1)^2]^{(n-4)/2}$, kai $|c - \bar X| \leq (n-1)s/\sqrt{n}$, ir $\hat f = 0$, kai $|c - \bar X| > (n-1)s/\sqrt{n}$, n>2. *Nurodymas.* Remkitės tuo, kad $(X_1, ..., X_r)^T$, $1 \leq r \leq n$ sąlyginis skirstinio tankis, kai fiksuota pakankamoji statistika, yra a.v. $(X_1, ..., X_n)^T$ tankio nepaslinktasis įvertinys. **3.49.** $\hat p_0(\theta) = ((n-1)/n)^T$, kai skirstinys Puasono; $\hat p_0(\theta) = 1$, kai $T = 0$, ir $\hat p_0(\theta) = 0$, kai $T > 0$ ir skirstinys neigiamasis binominis (imties didumas $n = 1$). **3.50.** *Nurodymas.* Įrodydami statistikos pakankamumą ir pilnumą remkitės 3.3.3 teorema. Parametro θ^r NMD įvertinys $U_r(T)$ gaunamas iš lygties $\sum_k U_r(k) b_k \theta^k/[f(\theta)]^n \equiv \theta^r \equiv \theta^r \sum_k b_{k-r}\theta^{k-r}/[f(\theta)]^n$. Ieškodami įvertinio $U_r(T)$ dispersijos NMD įvertinio remkitės 3.18 pratimu. **3.51.** NMD įvertinys yra $\tilde{\theta} = [(n+1)/n]X_{(n)}$; jo dispersija $\boldsymbol{V}\tilde{\theta} = \theta^2/[n(n+2)]$. Įvertinio $\hat{\theta} = 2\bar{\boldsymbol{X}}$ dispersija $\boldsymbol{V}\hat{\theta} = \theta^2/3n$. **3.52.** $\hat{\theta}_1 = (nX_{(1)} - X_{(n)})/(n-1)$; $\hat{\theta}_2 = (nX_{(n)} - X_{(1)})/(n-1)$; $(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)/2 = (X_{(1)} + X_{(n)})/2$; $(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1 = (n+1)(X_{(n)} - X_{(1)})/(n-1)$. **3.53.** $\mathbf{E}T = n/\theta$, $\boldsymbol{V}T = n/\theta^2$. **3.54.** b) $\hat{g}(\lambda) = [(T-t)/T]^{n-1}$, kai $T > t$, ir $\hat{g}(\lambda) = 0$, kai $T \leq t$. *Nurodymas.* Suvidurkinkite nepaslinktąjį įvertinį $\boldsymbol{I}_{(t,\infty)}(X_1)$ pakankamosios statistikos atžvilgiu naudodamiesi a) rezultatu. **3.56.** a), b), c) $T = X_1 + ... + X_n$; d) $(\sum_i X_i, \prod_i X_i)^T$; e) $(\prod_i X_i, \prod_i (1-X_i))$; f) $(\sum_i \ln X_i, \sum_i \ln^2 X_i)^T$; g) $(\prod_i \ln X_i, \sum_i X_i^{\alpha})$. **3.57.** $(X_{(1)}, \bar{X})^T$. **3.58.** $(\prod_i X_i, X_{(1)})^T$. **3.61.** Tankio kanoninė forma yra $f(x|\boldsymbol{\eta}) = h(x)\exp\{\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{T}(x) - B(\boldsymbol{\eta})\}$. a) $h(x) = 1/x!$, $\eta = \ln\lambda$, $T(x) = x$, $B(\eta) = e^{\eta}; -\infty < \eta < \infty$, $x = 0, 1, ...$; b) $h(x) = C_{n+x-1}^{n-1}$, $\eta = \ln(1-p)$, $T(x) = x$, $B(\eta) = -\ln(1-e^{\eta})$, $-\infty < \eta < 0$, $x = 0, 1, ...$; c) $h(x) = \boldsymbol{I}_{(a,\,\infty)}(x)$, $\eta = -\theta$, $T(x) = x$, $B(\eta) = \eta a - \ln(-\eta)$, $-\infty < \eta < 0$, $0 < x < \infty$; d) $h(x) = 1/x$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta^1, \eta_2)^T = (-\lambda,\ \eta)^T$, $\boldsymbol{T}(x) = (x,\ \ln x)^T$, $B(\boldsymbol{\eta}) = \ln\Gamma(\eta_2) - \eta_2 \ln(-\eta_1)$, $-\infty < \eta_1 < 0$, $0 < \eta_2 < \infty, x > 0$; e) $h(x) = 1/[x(1-x)]$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)^T = (\gamma,\ \eta)^T$, $\boldsymbol{T}(x) = (\ln x,\ \ln(1-x))^T$, $B(\boldsymbol{\eta}) = \ln[\Gamma(\eta_1)\Gamma(\eta_2)/\Gamma(\eta_1+\eta_2)]$, $0 < \eta_1,\ \eta_2 < \infty, 0 < x < 1$; f) $h(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \eta = -1/\theta^{\alpha}$, $T(x) = x^{\alpha}$, $B(\eta) = \ln(-1/\eta)$, $-\infty < \eta < 0$, $0 < x < \infty$. **3.66.** Tankio funkciją $f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma}) = (\sqrt{2\pi})^{-k}/\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}\exp\{(-1/2)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\}$ galima perrašyti $f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma}) = (\sqrt{2\pi})^{-k}\exp\{(-1/2)\sum_i \sigma^{ii}x_i^2 - \sum_{i>j}\sigma^{ij}x_i x_j + \sum_i x_i \sum_j \mu_j \sigma^{ij} - -(1/2)\sum_i\sum_j \mu_i\sigma^{ij}\mu_j - (1/2)\ln|\boldsymbol{\Sigma}|\}$; čia $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = [\sigma^{ij}]_{k\times k}$. Gauname $(k(k+1)/2)$-matį eksponentinio tipo skirstinį. Kanoninės formos parametrai yra $\boldsymbol{\eta} = (-\sigma^{ii}/2,\ i = 1, ..., k;\ -\sigma^{ij},\ i > j,\ i,\ j = 1, ..., k;\ \sum_j \mu_j\sigma^{ij}, i = 1, ..., k)^T$, $\boldsymbol{T} = (x_i^2, i = 1, ..., k;\ x_i x_j, i > j, i, j = 1, ..., k;\ x_i,\ i = 1, ..., k)^T$, $B(\boldsymbol{\eta}) = (1/2)\sum_i\sum_j \mu_i\sigma^{ij}\mu_j + (1/2)\ln|\boldsymbol{\Sigma}|$. **3.67.** $M(t) = (1 - t/\lambda)^{-\eta}$, $t < \lambda$. **3.68.** $c(e^t\theta)/c(\theta)$. **3.70.** $X_1 + ... + X_n$. *Nurodymas.* Remkitės 3.69 pratimu. **3.71.** Vidurkis $\mathbf{E}_\theta(X_{(n)} - X_{(1)} - (n-1)/(n+1)) \equiv 0, 0 < \theta < \infty$, nors ši funkcija nėra tapačiai lygi 0. **3.73.** *Nurodymas.* Lygtį $\mathbf{E}_\theta(\psi(X)) \equiv 0$, $0 < \theta < 1$, galima perrašyti taip: $\sum_{i=0}^{\infty}(\psi(i) - 2\psi(i+1) + \psi(i+2))\theta^i \equiv 0$, $\psi(1) = 0$. Statistika X nėra pilnoji, nes bet kurios tiesinės funkcijos $\varphi_c(X) = c(X-1), c \in \mathbf{R}$, vidurkis tapačiai lygus nuliui, nors ši funkcija, kai $c \neq 0$, nėra tapačiai lygi nuliui. Jei $\varphi(1) = 0$, tai iš tapatybės gauname, kad $\varphi(k) = -(k-1)\varphi(0), k = 1, 2, ...$ Jei $\varphi(0) \neq 0$, tai $\varphi(k)$ neaprėžta. Taigi tik tuo atveju, kai $\varphi(0) = 0$, gauname, kad $\varphi(k) = 0$, $k = 0, 1, 2, ...$ Statistika X yra aprėžtai pilnoji. **3.74.** $\mathbf{E}(\bar{X}^2) = \mu^2 + \sigma^2/n$, $\boldsymbol{V}(\bar{X}^2) = (2\sigma^2/n)(2\mu^2 + \sigma^2/n)$. NMD įvertinys $\hat{\vartheta} = \bar{X}^2 - s^2/n$, s^2 – nepaslinktasis dispersijos įvertinys. $\boldsymbol{V}(\hat{\vartheta}) = (2\sigma^2/n)(2\mu^2 + \sigma^2/[n(n-1)])$; $\boldsymbol{V}\bar{X}^2 > \boldsymbol{V}(\hat{\vartheta})$. **3.75.** Pažymėkime $T = X_1 + ... + X_n$. Tada: a) $\hat{p}^m = 0$, kai $T < m$, ir $\hat{p}^m = T(T-1)...(T-m+1)/[n(n-1)...(n-m+1)]$, kai $T \geq m$; b) vertinamas parametras $\theta = C_m^k p^k q^{m-k}$; NMD įvertinys $\hat{\theta} = C_m^k C_{n-m}^{T-k}/C_n^T$, kai $k \leq T \leq n - m + k$, ir $\hat{\theta} = 0$, kai $T < k$, $T > n - m + k$; c) vertinamas parametras $\theta = 1 - q^{n-1} - (n-1)p^2q^{n-2}$; NMD įvertinys: $\hat{\theta} = 0$, kai $T = 0$; $\hat{\theta} = (n-1)/n$, kai $T = 1$; $\hat{\theta} = (n-2)/n$, kai $T = 2$; $\hat{\theta} = 1$, kai $T > 2$. **3.76.** Tegu $T = X_1 + ... + X_n$. Tada $\hat{\gamma} = [(n-t)/n]^T$. **3.77.** Tegu $\bar{X}$, $\bar{Y}$, s_x^2, s_y^2 – parametrų μ_x, μ_y, σ_x^2, σ_y^2 NMD įvertiniai. Tada: a) $\bar{X} - \bar{Y}$, $(s_x/s_y)^r/(\mathbf{E}(F_{m-1,n-1}^{(r/2)}))$, čia $F_{m-1,n-1}$ – a. d., turintis Fišerio skirstinį su $m-1$ ir $n-1$ laisvės laipsnių; b) $\hat{\sigma}_x^2 = s^2 = [s_x^2(m-1) + s_y^2(n-1)]/(m+n-2)$, $\theta = (\mu_x - \mu_y)/\sigma_x$, $\hat{\theta} = [(\bar{X} - \bar{Y})/s][\Gamma(\nu/2)/\Gamma((\nu-1)/2)]\sqrt{2/\nu}$, $\nu = m+n-2$; c) $[m\bar{X}/\sqrt{\gamma} + n\bar{Y}]/(m+n)$; d) pakankamoji statistika $(\bar{X},\ \bar{Y},\ s_x^2,\ s_y^2)^T$ nėra pilnoji; e) 0,5; f) 0,5. **3.78.** $\hat{\theta}_1 = (X_{(1)} + X_{(n)})/2$; $\hat{\theta}_2 = (X_{(n)} - X_{(1)})(n+1)/(2(n-1))$. **3.79.** a) $\hat{a} = X_{(1)} - \theta/n$; b) $\hat{\theta} = \bar{X} - a$; c) $\hat{a} = (nX_{(1)} - \bar{X})/(n-1)$, $\hat{\theta} = n(\bar{X} - X_{(1)})/(n-1)$; d) tegu $\eta = \mathbf{P}\{X_1 > t\} = \exp\{-(t-a)/\theta\}$, tada $\hat{\eta} = ((n-1)/n)\exp\{-(t - X_{(1)})/\theta\}$; $\gamma = \frac{d}{dt}\mathbf{P}\{X_1 > t\}$, $\hat{\gamma} = -\hat{\eta}/\theta$. **3.80.** Pažymėkime $S_x = \sum_i (X_{(i)} - X_{(1)})$, $S_y = \sum_i (Y_{(i)} - Y_{(1)})$. Tada: a) $\theta = a_x - a_y$, $\hat{\theta} = X_{(1)} - Y_{(1)} - S_x/(m(m-1)) + S_y/(n(n-1))$; $\gamma = \theta_x/\theta_y$, $\hat{\gamma} = S_x(n-2)/(S_y(m-1))$; b) $\hat{\theta}_x = (S_x + S_y)/(m+n-2)$; $\eta = (a_x - a_y)/\theta_x$, $\hat{\eta} = (X_{(1)} - Y_{(1)})(m+n-3)/(S_x + S_y) - (n-m)/(mn)$; c) pakankamoji statistika $(X_{(1)},\ Y_{(1)},\ S_x,\ S_y)^T$ nėra pilnoji. **3.81.** a) $\hat{p^m} = (n-1)(n-2)...(n-m)/[(n+X-1)(n+X-2)...(n+X-m)]$, $\hat{q^m} = X(X-1)...(X-m+1)/[(n+X-1)(n+X-2)...(n+X-m)]$; b) $\hat{\boldsymbol{V}X} = X(n+X)/[n(n+1)]$; c) $\widehat{\ln p} = -\sum_{m=1}^{\infty}\hat{q^m}/m\}$. **3.83**. Neegzistuoja. **3.84.** Tikėtinumo funkcija $L = (pq)^{(X-3)/2}$, kai $X = 2k-1$, $k = 2, 3, ...$, ir $L = (pq)^{(X-2)/2}(1-2pq)$, kai $X = 2k$, $k = 1, 2, ...$. Ji priklauso tik nuo parametro $\theta = pq$. Jeigu nagrinėjame modelį su nežinomu parametru p, tai modelis nėra identifikuojamas (žr. 1.3.1 pastabą). Nagrinėkime modelį su nežinomu parametru $\theta = pq$. Parametro θ DT įvertinys $\tilde{\theta} = 1/4$, kai $X = 2k-1$, ir $\tilde{\theta} = (X-2)/(2X)$, kai $X = 2k$, $k = 1, 2...$ Tačiau šis įvertinys patenka į parametrų kitimo sritį tik tada, kai $X < 4$. Kitais atvejais tikėtinumo funkcija parametrų kitimo srityje įgyja maksimumą kraštiniame taške $\tilde{\theta} = 1/4$.

3.4 skyrelis

3.85. *Nurodymas.* Pasinaudokite tokiu algebros faktu. Tegu $\boldsymbol{A}$ ir $\boldsymbol{D}$ – kvadratinės matricos ir $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. Tada determinantas

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|.$$

3.86. $\boldsymbol{V}\hat{p} \geq pq/n$; $\boldsymbol{V}(\widehat{pq}) \geq pq(q-p)^2/n$; $\boldsymbol{V}(\widehat{p^2}) \geq 4p^3q/n$. **3.87.** $\boldsymbol{V}(\widehat{p^2}) \geq 4p^3q/(n-1) + 2p^2q(q-2p)/[n(n-1)]$. **3.88.** Tegu $T = X_1 + ... + X_n$. Tada $\hat{p} = T/n$, $\boldsymbol{V}\hat{p} = pq/n$; $\widehat{p^2} = T(T-1)/[n(n-1)]$, $\boldsymbol{V}(\widehat{p^2}) = 4p^3q/(n-1) + 2p^2q(q-2p)/[n(n-1)]$; $\widehat{pq} = T(n-T)/[n(n-1)]$, $\boldsymbol{V}(\widehat{pq}) = pq(1-4pq)/(n-1) - pq(1-6pq)/[n(n-1)]$. **3.89.** $\boldsymbol{V}\hat{\lambda} \geq \lambda/n$; $\boldsymbol{V}(\widehat{\lambda^2}) \geq 4\lambda^3/n$; $\boldsymbol{V}(\widehat{e^{-\lambda}}) \geq \lambda e^{-2\lambda}/n$. **3.90.** $\boldsymbol{V}(\widehat{\lambda^2}) \geq 4\lambda^3/n + 2\lambda^2/n^2$. **3.91.** $\hat{\lambda} = \bar{X}$, $\boldsymbol{V}\hat{\lambda} = \lambda/n$; $\widehat{\lambda^2} = \bar{X}^2 - \bar{X}/n$, $\boldsymbol{V}(\widehat{\lambda^2}) = 4\lambda^3/n + 2\lambda^2/n^2$; $\widehat{e^{-\lambda}} = [(n-1)/n]^{n\bar{X}}$, $\boldsymbol{V}(\widehat{e^{-\lambda}}) = = e^{-2\lambda}(e^{\lambda/n} - 1)$. **3.92.** $\boldsymbol{V}((\hat{\mu},\ \hat{\sigma}^2)^T) \geq \boldsymbol{I}^{-1} = [i^{kl}]_{2\times2}$, $i^{11} = \sigma^2/n$, $i^{22} = 2\sigma^4/n$, $i^{12} = i^{21} = 0$. **3.93.** *Nurodymas.* Raskite Bolševo nelygybę nepaslinktojo parametro $(\mu,\ \mu^2,\ \sigma,\ \sigma^2)^T$ įvertinio kovariacinei matricai (žr. [4]). Iš gautosios nelygybės $\boldsymbol{V}\hat{\mu} \geq \sigma^2/n = \boldsymbol{V}\bar{X}$; $\boldsymbol{V}\widehat{\sigma^2} \geq 2\sigma^4/(n-1) = \boldsymbol{V}s^2$. **3.94.** $\hat{x}_P = \bar{X} + z_P s/M_{n-1}$; $\boldsymbol{V}(\hat{x}_P) = \sigma^2/n + z_P^2\sigma^2(1 - M_{n-1}^2)/M_{n-1}^2$, $M_n = \sqrt{2/(n-1)}\Gamma(n/2)/\Gamma((n-1)/2)$. (žr. 2.27 pratimą). **3.95.** $\boldsymbol{I}(\theta) = n$; $\boldsymbol{I}(e^{-\theta}) = ne^{2\theta}$. **3.96.** a) $\mathbf{E}(\hat{\beta}) = \beta$; b) $\boldsymbol{V}\hat{\beta} = \beta^2/n$; kadangi $\boldsymbol{I}(\beta) = n/\beta^2$, tai įvertinio $\hat{\beta}$ dispersija pasiekia Rao–Kramero nelygybėje nurodytą ribą. **3.97.** a) n/σ^2; b) $n/(2\sigma^4)$; c) $2n/\sigma^2$; d) $3n/\sigma^2$; e) $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}) = [i_{kl}]_{2\times2}$, $i_{11} = n/\sigma^2$, $i_{22} = n/(2\sigma^4)$, $i_{12} = i_{21} = 0$; f) $nk/(qp^2)$; g) žr. 3.7.11 skyrelį; h) žr. 3.7.12 skyrelį. **3.98.** a) $2\sqrt{\lambda}$; b) $\arcsin(2p-1)$; c) $\sqrt{\gamma}\ln\theta$. **3.99.** a) $\boldsymbol{I}(\mu,\ \sigma) = [i_{kl}]_{2\times2}$; $i_{11} = i_{22} = 2\sigma^2$; $i_{12} = i_{21} = 0$; b) $\boldsymbol{I}(\mu,\ \theta) = [i_{kl}]_{2\times2}$; $i_{11} = 1/\theta^2$, $i_{12} = i_{21} = (1+\Gamma'(1))/\theta^2$; $i_{22} = (1 + 2\Gamma'(1) + \Gamma''(1))/\theta^2$; c) $i_{11} = n/(3\theta^2)$, $i_{12} = i_{21} = -\mu/(3\theta^3)$, $i_{22} = 1/\theta^2 + 2\mu/\theta^3 + \mu^2/(3\theta^4)$; d) $i_{11} = (r+1)\sqrt{r+4}/(\sigma^2(r+3)\sqrt{r})$; $i_{22} = (1 + i_{11}/\sigma^2)/\sigma^2$, $i_{12} = i_{21} = i_{11}/\sigma$. **3.101.** a) $\hat{\vartheta} = -X/\Gamma'(1)$; $\boldsymbol{V}\hat{\vartheta} = \theta^2(\Gamma''(1) - \Gamma'^2(1))/\Gamma'^2(1) \geq I^{-1}(\theta) = \theta^2(2 + 2\Gamma'(1) + \Gamma''(1))$; b) $\hat{\vartheta} = (-1)^r X^r/\Gamma^{(r)}(1)$; $\boldsymbol{V}(\hat{\vartheta}) = \theta^{2r}(\Gamma^{(2r)}(1) - [\Gamma^{(r)}(1)]^2)/[\Gamma^{(r)}(1)]^2) \geq I^{-1}(\theta^r) = \theta^{2r}r^2/(1 + 2\Gamma'(1) + \Gamma''(1))$; c) $\vartheta = (1+\theta)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\theta^r$; $\hat{\vartheta} = \sum_r X^r/\Gamma^{(r)}(1)$; $\boldsymbol{V}\hat{\vartheta} = \sum_k\sum_l(-1)^{k+l}\theta^{k+l}\Gamma^{(k+l)}(1)/(\Gamma^{(k)}(1)\Gamma^{(l)}(1)) - (1+\theta)^{-2} \geq \boldsymbol{I}^{-1}(\vartheta) = \theta^2/((1+\theta)^4[2 + 2\Gamma'(1) + \gamma''(1)])$. **3.102.** c) $\boldsymbol{V}T_n$ skiriasi nuo $I^{-1}(p^2)$ nariu, kurio eilė $O(1/n^2)$, $n \to \infty$ (žr. 3.86–3.88 pratimus). **3.103.** a) $\hat{\vartheta} = \exp\{t\bar{X} - t^2\sigma^2/2n\}$; $\boldsymbol{V}\hat{\vartheta} = \exp\{2t\mu\}(\exp\{t^2\sigma^2/n\} - 1) \geq I^{-1}(\vartheta) = \exp\{2t\mu\}\sigma^2t^2/n$; $\boldsymbol{V}\hat{\vartheta} - I^{-1}(\vartheta) = O(1/n^2)$. **3.104.** $\boldsymbol{V}(T_{1n}) = \Phi(c-\mu)(1-\Phi(c-\mu)/n$; $\boldsymbol{V}(T_{2n}) = [\Phi'(c-\mu)]^2/n + O(1/n\sqrt{n})$; $ASE = [\Phi'(c-\mu)]^2/(\Phi(c-\mu)(1-\Phi(c-\mu))$. **3.105.** $ASE = 1/(\pi-2)$. **3.106.** a) $ASE = 4\mu^2/(4\mu^2 + \mu_4 - 1 + 4\mu_3\mu)$; b) $ASE \leq 1$, kai $\mu_3 = 0$; c) pvz., a. d. X tankio funkcija $f(x) = kx^2\boldsymbol{I}_{(0,\ a)}(x)$, $a > 0$. **3.107.** $ASE = 1$. **3.108.** $b_{T_{1n}} = 0$, $b_{T_{2n}} = -\theta/(n+1)$; $ASE = 1$. **3.109.** Neegzistuoja. **3.110.** $I(\sigma) = 2(n-1)/\sigma^2$, $\boldsymbol{V}\hat{\sigma} \geq \sigma^2/2(n-1)$. **3.111.** ASE $= 2/3$. **3.112.** 17,185.

3.5 skyrelis

3.113. $\hat{\alpha} = (a_2 - 1)/\bar{X}$, $\hat{\beta} = 1 - \bar{X}^2/(a_2 - 1)$. **3.114.** NMD įvertiniai yra $(X_{(1)} + X_{(n)})/2$ ir $(n+1)(X_{(n)} - X_{(1)})/(n-1)$, o jų dispersijos – $(\theta_2 - \theta_1)^2/(2(n+1)(n+2))$ ir $2(\theta_2 - \theta_1)^2/((n-1)(n+2))$. Momentų metodu gauti įvertiniai yra $\bar{X}$ ir $2\sqrt{3}s$, o jų dispersijos – $(\theta_2 - \theta_1)^2/(12n)$ ir $(\theta_2 - \theta_1)^2/(60n) + O(1/n\sqrt{n})$. **3.115.** a) DT įvertiniai yra $\bar{X}$ ir m_2, o NMD įvertiniai – $\bar{X}$ ir s^2; b) DT įvertinys yra $n\eta/S$, $S = X_1 + ... + X_n$, o NMD įvertinys yra $(n\eta - 1)/S$; c) DT įvertinys yra $X_{(n)}$, o NMD įvertinys – $(n+1)X_{(n)}/n$. **3.117.** $\hat{\lambda} = \bar{X}$; $\hat{p} = \bar{X}$;

$-q/(p\ln p) = \bar{X}$; $\hat{\lambda}(1-\exp\{-\hat{\lambda}\}/(1-\exp\{-\hat{\lambda}\}) = \bar{X}$. **3.118.** DT įvertiniai yra $\widehat{\lambda^2} = \bar{X}^2$ ir $\widehat{p^2} = \bar{X}^2$, o jų kvadratinės rizikos funkcijos $\mathbf{E}(\widehat{\lambda^2}-\lambda^2)^2 = 4\lambda^3/n+5\lambda^2/n^2+\lambda/n^3$; $\mathbf{E}(\widehat{p^2}-p^2)^2 = 4p^3q/n - p^2q(11p-7)/n^2 + pq(1-6pq)/n^3$. NMD įvertinius ir jų dispersijas žr. 3.88 ir 3.91 pratimus. **3.120.** a) DT įvertinys $\hat{\theta} = X_{(1)}$ yra paslinktasis; $\mathbf{E}(\hat{\theta}) = \theta(n+2)/(n+1)$; imant nepaslinktąjį įvertinį $\tilde{\theta} = X_{(1)}(n+1)/(n+2)$, gauname $\boldsymbol{V}\tilde{\theta} = n\theta^2/(n+2)^3$; momentų metodo įvertinys $\hat{\theta} = 2\bar{X}/3$, $\boldsymbol{V}\hat{\theta} = \theta^2/(27n)$; b) $\boldsymbol{V}((X_{(n)} + X_{(1)})/2) = n\theta^2/((n+1)^2(n+2))$; momentų metodo įvertinys $\hat{\theta} = \bar{X}$ ir $\boldsymbol{V}\hat{\theta} = \theta^2/(12n)$. Reikia pažymėti, kad šiame pratime DT įvertiniai yra eilės $O(1/n^2)$, kai $n \to \infty$, o momentų metodu gauti įvertiniai yra eilės $O(1/n)$. **3.122.** *Nurodymas.* Žr. 3.5.4 pavyzdį. **3.123.** $\hat{\alpha} = (V_1-V_2-V_3)/n$; $V_j = \sum_i X_{ji}, j = 1,2,3$; $\sqrt{n}(\hat{\alpha}-\alpha) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ (1-\alpha^2))$. **3.124.** $\hat{\alpha} = (V_3/(V_3+V_4)$; $\hat{p} = (2V_1+V_3+V_4)/(2n)$. **3.125.** $\hat{\alpha} = 0{,}1235$. **3.126.** $\hat{\mu}_1 = \bar{X}$, $\hat{\mu}_2 = \bar{Y}$; $\widehat{\sigma_{11}} = \sum_i (X_i-\bar{X})^2/n$, $\widehat{\sigma_{22}} = \sum_i (Y_i-\bar{Y})^2/n$, $\widehat{\sigma_{12}} = \widehat{\sigma_{21}} = \sum_i (X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})/n$. Parametro $\boldsymbol{\theta} = (\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho)^T$ informacinės matricos atvirkštinės $\boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = [i^{kl}]_{5\times 5}$ elementai yra $i^{11} = \sigma_1^2/n$, $i^{22} = \sigma_2^2/n$, $i^{12} = i^{21} = \rho\sigma_1\sigma_2/n$; $i^{33} = 2\sigma_1^4/n$, $i^{44} = 2\sigma_2^4/n$, $i^{34} = i^{43} = 2\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2/n$; $i^{55} = (1-\rho^2)^2/n$, $i^{35} = i^{53} = \rho(1-\rho^2)\sigma_1^2/n$, $i^{45} = i^{54} = \rho(1-\rho^2)\sigma_2^2/n$; $i^{kl} = 0$, kai $k = 1,2$, o $l = 3,4,5$. **3.127.** *Nurodymas.* Žr. 3.7.13 skyrelį. **3.128.** *Nurodymas.* Žr. 3.7.11 skyrelį. **3.129.** Nurodymas. Žr. 3.7.8 skyrelį. **3.130.** *Nurodymas.* Žr. 3.7.4 skyrelį. **3.132.** $\hat{\mu} = \bar{X} = 34{,}75$, $\widehat{\sigma^2} = s^2 = 111{,}56$. **3.133.** b) $\hat{\sigma} = \sqrt{\pi/2}\sum_i |X_i|/n$, $\sqrt{n}(\hat{\sigma}-\sigma) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ (\pi-2)\sigma^2/2)$; c) $\sqrt{n}(\hat{\sigma}-\sigma) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ \sigma^2/2)$. **3.136.** a)$\hat{\mu}_j = (X_j+Y_j)/2$, $j = 1,2,...,n$, $\widehat{\sigma^2} = \sum_i (X_i-Y_i)^2/(4n)$; b) $\mathbf{E}(\widehat{\sigma^2}) = \sigma^2/2$. Parametro dimensija $n+1$ priklauso nuo n, todėl teorema apie ribines DT įvertinių savybes netaikytina; c) $\widehat{\sigma^2} = \sum_i (X_i-Y_i)^2/(2n)$; $\widehat{\sigma^2} \xrightarrow{P} \sigma^2$, nes $\mathbf{E}(\widehat{\sigma^2}) = \sigma^2$, $\boldsymbol{V}(\widehat{\sigma^2}) = \sigma^4/(2n)$. **3.137.** c) $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta) \xrightarrow{d} Z \sim N(0,\ 3\theta^2)$; d) $\hat{\theta} = 2{,}0102$; kadangi $\mathbf{E}(R_i)$ neegzistuoja, tai pradinį artinį $\hat{\theta}_0$ galima parinkti, pvz., naudojant empirinę medianą $\hat{\theta}_0 = 1/\hat{x}_{0,5}$; e) $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} = \sqrt{3}\hat{\theta}/\sqrt{n} = 0{,}7785$. **3.138.** $\hat{\lambda}_1 = K/(S_1+(n-K)x_0)$, $\hat{\lambda}_2 = (n-K)/S_2$; $S_1 = \sum_{i=1}^K X_{(i)}$, $S_2 = \sum_{i=K+1}^n (X_{(i)}-x_0)$; K – gedimų, mažesnių už x_0, skaičius; $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_1-\lambda_1) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ \lambda_1^2(1-p))$, $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_2-\lambda_2) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ \lambda_2^2/p)$, $p = \exp\{-\lambda_1 x_0\}$; $\mathbf{Cov}\,(\hat{\lambda}_1,\ \hat{\lambda}_2) \to 0$, kai $n \to \infty$. **3.139.** a) $\hat{\alpha} = \bar{X}/m_2$, $\hat{\gamma} = \bar{X}^2/m_2$; b) $\hat{\theta} = 1/\sqrt{m_2}$, $\hat{a} = \bar{X}+\sqrt{m_2}$; c) $\hat{\alpha} = \bar{X}(1-\bar{X}(1-\bar{X})/m_2)$, $\hat{\beta} = (1-\bar{X})(1-\bar{X}(1-\bar{X})/m_2)$; d) $\hat{\mu} = \bar{Y}$, $\hat{\sigma} = \sqrt{m_2}$, $m_2 = (1/n)\sum_i (Y_i-\bar{Y})$, $Y_i = \ln X_i$, $i = 1,...,n$; e) $\hat{\theta} = \bar{X}$; f) $\hat{p} = \bar{X}/m_2$, $\hat{n} = \bar{X}^2/(m_2-\bar{X})$; g) $-\hat{q}/\hat{p}\ln\hat{p} = \bar{X}$; h) $\hat{k} = \bar{X}$. **3.141.** a) $\hat{\theta} = X_{(1)}$; b) $\hat{\theta} = X_{(1)}$; c) $\hat{\theta} = n/\sum_j \ln(1-X_j)$; d) $\hat{\theta} = n/(n-\sum_j \ln X_j)$, $1/2 < \hat{\theta} < 1$; e) $\hat{\theta} = \hat{x}_{1/2}$; f) $\hat{\theta} = X_{(1)}$; g) $\hat{\theta} = (\sqrt{\bar{X}^2+4a_2}-\bar{X})/2$; h) $\hat{\mu} = X_{(1)}$, $\hat{\sigma} = n/\sum_i (X_i-X_{(1)})$; i) $\hat{\mu} = (1/n)\sum_j \ln X_j = \bar{Y}$, $\hat{\sigma} = [\sum_j (\ln X_j)-\bar{Y})^2/n]^{1/2}$; j) $\hat{\theta} = 0$, kai $2^n\prod_j \sqrt{X_j} > 1$, ir $\hat{\theta} = 1$ priešingu atveju; k) $\hat{\beta} = X_{(n)}$, $\hat{\alpha} = n/(n\ln\hat{\beta}-\sum_j \ln X_j)$; l) $\hat{\theta} = X_{(n)}$, n>1. **3.142.** a) $\hat{\lambda} = \bar{Y}$, $\hat{\mu} = \bar{Z}$; b) $\hat{\lambda} = S/m$, $\hat{\mu} = S/(n-m)$; $S = X_1+...+X_n$, m – skaičius atvejų, kai $\Delta_i = 1$; $\hat{\lambda}$ ir $\hat{\mu}$ asimptotiškai nekoreliuoti ir normalieji: $\sqrt{n}(\hat{\lambda}-\lambda) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ \lambda(\lambda+\mu))$, $\sqrt{n}(\hat{\mu}-\mu) \xrightarrow{d} Z \sim N(0,\ \mu(\lambda+\mu))$. **3.143.** Taip. **3.144.** $ASE = 1$. **3.145.** $\hat{\alpha} = X_{(1)}$, $\hat{\theta} = n/S$, $S = \sum_j (\ln X_j - \ln X_{(1)})$; NMD įvertiniai $\hat{\alpha} = X_{(1)}(1-S/n)$, $\hat{\theta} = (n-1)/S$; $ASE = 1$. **3.146.** $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{X}} \sim N_k(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma}/n)$, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \sum_j (\mathbf{X}_j-\bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_j-\bar{\mathbf{X}})^T/n = \boldsymbol{S}/n$; pažymėkime $\boldsymbol{\theta} = (\sigma_{ij},\ i \le j)$ vektorių, sudarytą iš skirtingų kovariacinės matricos $\boldsymbol{\Sigma}$ elementų, o $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ DT įvertinių (t. y. atitinkamų matricos $\boldsymbol{S}/n$ elementų) vektorių. Tada $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z} \sim N_{k(k-1)/2}(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\Gamma})$; čia kovariacinės matricos $\boldsymbol{\Gamma} = [\gamma_{ijrs}]_{k(k-1)/2\times k(k-1)/2}$ elementai yra $\gamma_{iiii} = 2\sigma_{ii}^2$, $\gamma_{iijj} = 2\sigma_{ij}^2$, $\gamma_{iiij} = 2\sigma_{ii}\sigma_{ij}$, $i \ne j$, $\gamma_{ijrs} = (\sigma_{ir}\sigma_{js}+\sigma_{is}\sigma_{jr})$, $i \ne j \ne r \ne s$. **3.147.** *Nurodymas.* Žr. 3.126 pratimą. **3.148.** $\widehat{\sigma^2} = \sum_j (X_j-\hat{\mu})^2/n$, $\widehat{\tau^2} = \sum_j (Y_j-\hat{\mu})^2/n$, o įvertis $\hat{\mu}$ randamas iš lygties $\hat{\mu} = [\bar{X}\sum_j (Y_j-\hat{\mu})^2 + \bar{Y}\sum_j (X_j-\hat{\mu})^2]/[\sum_j (Y_j-\hat{\mu})^2 + \sum_j (X_j-\hat{\mu})^2]$; šie įverčiai asimptotiškai nekoreliuoti ir normalieji: $\sqrt{n}(\widehat{\sigma^2}-\sigma^2) \xrightarrow{d} Z \sim N(0,\ 2\sigma^4)$, $\sqrt{n}(\widehat{\tau^2}-\tau^2) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ 2\tau^4)$, $\sqrt{n}(\hat{\mu}-\mu) \xrightarrow{d} V \sim N(0,\ \sigma^2\tau^2/(\sigma^2+\tau^2))$.

3.6 skyrelis

3.149. $\hat\mu = \bar X = 424,933$, $\hat\sigma = s = 8,598$; $(\underline{\mu},\ \bar\mu) = (420,172;\ 429,695)$, $(\underline{\sigma},;\ \bar\sigma) = (6,295;\ 13,560)$. **3.150.** $\hat\lambda = \bar X = 0,9288$; $(\underline{\lambda};\ \bar\lambda) = (0,850;\ 1,009)$. **3.151.** 1) Momentų metodu gauname įverčius $\hat\lambda = 1,073$, $\hat\eta = 9,928$; 2) DT įvertis $\hat\lambda = \eta/\bar X$ paslinktasis; NMD įvertis $\hat\lambda = (n\eta - 1)/(n\bar X) = 1,076$; $(\underline{\lambda};\ \bar\lambda) = (0,936;\ 1,236)$. **3.152.** $\hat p = 0,277$; $(\underline{p};\ \bar p) = (0,2495;\ 0,3059)$. **3.154.** $(\underline{p};\ \bar p) = (0,000;\ 0,226)$, $(0,000;\ 0,283)$, $(0,000;\ 0,445)$. **3.155.** $\hat\lambda = 0,00114$; $(\underline{\lambda};\ \bar\lambda) = (0,00096;\ 0,00137)$. **3.156.** 1) $(\underline{\lambda};\ \bar\lambda) = (0,226;\ 0,336)$; 2) $(\underline{\lambda};\ \bar\lambda) = (0,218;\ 0,291)$; 3) $(\underline{\lambda};\ \bar\lambda) = (0,180;\ 0,245)$; 4) $(\underline{\lambda};\ \bar\lambda) = (0,241;\ 0,338)$. Tikėtina. **3.157.** $Q = 2\Phi(2) - 1 \approx 0,9544$. **3.158.** $n \geq 1537$. **3.159.** $\hat p = 0,182$, $(\underline{p};\ \bar p) = (0,055;\ 0,518)$. **3.160.** $(3,428;\ 4,964)$. **3.161.** (a) $\sigma^2 = \pi^2/4$; $(\underline{\theta};\ \bar\theta) \approx (\hat x_{0,5} - z_{\alpha/2}\pi/(2\sqrt{n});\ \hat x_{0,5} + z_{\alpha/2}\pi/(2\sqrt{n}))$; b) DT įvertinys $\hat\theta_n$ asimptotiškai normalusis: $\sqrt{n}(\hat\theta_n - \theta) \xrightarrow{d} Z \sim N(0,\ 2)$; $(\underline{\theta};\ \bar\theta) \approx (\hat x_{0,5} - z_{\alpha/2}\sqrt{2/n};\ \hat x_{0,5} + z_{\alpha/2}\sqrt{2/n})$; c) antrasis. **3.162.** a) $(\underline{\theta};\ \bar\theta) = (2T_1(\mathbf{X})/\chi^2_{\alpha/2}(2n-2);\ 2T_1(\mathbf{X})/\chi^2_{1-\alpha/2}(2n-2))$; $\mathbf{E}(\bar\theta - \underline{\theta}) = 2\theta(n-1)[1/\chi^2_{1-\alpha/2}(2n-2) - 1/\chi^2_{\alpha/2}(2n-2)] \approx 2\theta\sqrt{n-1}/(n-1-z^2_{\alpha/2})$; b) $(\underline{a};\ \bar a) = (T_2(\mathbf{X}) - T_1(\mathbf{X})F_{1-\alpha/2}(2,2n-2)/n(n-1);\ T_2(\mathbf{X}) - T_1(\mathbf{X})F_{\alpha/2}(2,2n-2)/n(n-1))$; $\mathbf{E}(\bar a - \underline{a}) = (2\theta/n)(F_{1-\alpha/2}(2,2n-2) + F_{\alpha/2}(2,2n-2))$. **3.163.** Tegu $T = T(\mathbf{X})$ pasiskirstymo funkcija $F(x+\theta)$ tolydi. Tada $(\underline{\theta};\ \bar\theta) = (F^{-1}(\alpha/2) - T(\mathbf{X});\ F^{-1}(1-\alpha/2) - T(\mathbf{X}))$. Intervalo ilgis yra $F^{-1}(1-\alpha/2) - F^{-1}(\alpha/2)$. **3.164.** a) $(\underline{\lambda};\ \bar\lambda) \approx (\bar X + z^2_{\alpha/2}/(2n) - \sqrt{\bar X z^2_{\alpha/2}/n + z^4_{\alpha/2}/(4n^4)};\ \bar X + z^2_{\alpha/2}/(2n) + \sqrt{\bar X z^2_{\alpha/2}/n + z^4_{\alpha/2}/(4n^2)})$; b) $(\underline{\lambda};\ \bar\lambda) \approx (\bar X - z_{\alpha/2}\sqrt{\bar X/n};\ \bar X + z_{\alpha/2}\sqrt{\bar X/n})$. **3.165.** Tegu $\theta = \mu_1 - \mu_2$. Tada $(\underline{\theta};\ \bar\theta) \approx (\bar X_1 - \bar X_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2};\ \bar X_1 - \bar X_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2})$. **3.166.** $C(Y_1, ..., Y_n) \approx \{(\mu_y,\ \sigma_y^2)\ :\ n[(\bar Y - \mu_y)^2/s^2 + (s^2 - \sigma_y^2)/(m_4 - s^4)] < \chi^2_\alpha(2)\}$. **3.168.** a) $\hat\theta = 34,988$, $\hat\gamma = 81230,195$. b) Naudojant aproksimaciją $\sqrt{n}(\hat\theta - \theta)/(\theta\sqrt{m_2}) \xrightarrow{d} Z \sim N(0.\ 1)$, gauname pasikliovimo intervalą $(\underline{\theta}; \bar\theta) = (\hat\theta/(1 + z_\alpha\sqrt{m_2/n}); \hat\theta/(1 - z_\alpha\sqrt{m_2/n})$, $\alpha = (1-Q)/2$; pagal turimus duomenis randame realizaciją $(\underline{\theta}; \bar\theta) = (24,953;\ 58,524)$. **3.169.** $\hat\theta = (s^2 - \bar Y)/\bar Y$, $\hat\lambda = \bar Y^2/(s^2 - \bar Y)$. **3.170.** a) $\hat\theta = 6,2$, $\hat\lambda = 8,0645$. b) Pagal pirmąją aproksimaciją gauname intervalą $(\underline{\mu}; \bar\mu) = (\hat\mu - z_\alpha s/\sqrt{n}; \hat\mu + z_\alpha s/\sqrt{n})$, o pagal antrąją – intervalą $(\underline{\mu}; \bar\mu) = (\hat\mu + (1+\bar\theta)z_\alpha^2)/(2n) - \sqrt{\hat\mu(1+\hat\theta)z_\alpha^2/n + (1+\hat\theta)^2 z_\alpha^4/(4n)}; \hat\mu + (1+\bar\theta z_\alpha^2)/(2n) + \sqrt{\hat\mu(1+\hat\theta)z_\alpha^2/n + (1+\hat\theta)^2 z_\alpha^4/(4n)}$, $\alpha = (1-Q)/2$. c) Pagal turimus duomenis gauname intervalus $(41,685;\ 58,315)$, $(42,347;\ 59,036)$. **3.171.** a) $\hat\sigma^2 = s^2 = [s_x^2(n_1-1) + s_y^2(n_2-1) + s_z^2(n_3-1)]/\nu$, $\nu = n_1 + n_2 + n_3 - 3$; $s^2\nu/\sigma^2 \sim \chi^2(\nu)$. Remdamiesi turimais duomenimis, gauname realizacijas $s^2 = 3,288$, $(\underline{\sigma}; \bar\sigma) = (\sqrt{s^2\nu/\chi^2_{0,005}(\nu)}; \sqrt{s^2\nu/\chi^2_{0,005}(\nu)}) = (1,528; 2,217)$. b) $\hat\theta = \bar X + \bar Y + \bar Z \sim N(\theta, \sigma^2(1/n_1 + 1/n_2 + 1/n_3))$. Remdamiesi turimais duomenimis gauname realizacijas $\hat\theta = 0,070$, $(\underline{\theta}; \bar\theta) = (-1,087; 1,227)$. **3.172.** a) $\hat\theta = 0,075$, $s_x^2 = 3,9686$, $s_y^2 = 3,8783$; $(\underline{\theta}; \bar\theta) = (-1,355; 1,505)$. Kadangi nulis yra per vidurį šio intervalo, tai darytina išvada, kad a. d. X ir Y vidurkiai nesiskiria. b) $s_z^2 = \sum_i (X_i - Y_i - (\bar X - \bar Y))^2/(n-1) = 0,02867$; $(\underline{\theta}; \bar\theta) = (-0,015; 0,165)$. Intervalas trumpesnis, o nulis yra šio intervalo krašte. Todėl išvada dėl a. d. X ir Y vidurkių lygybės kelia abejonių. c) Pagal prasmę a. d. X ir Y turėtų būti priklausomi (jei bulvė turi daugiau krakmolo, tai abu metodai turėtų duoti didesnes reikšmes ir, atvirkščiai). Todėl lentelės duomenis reikėtų traktuoti kaip dvimačio a. v. $(X,Y)^T$ realizacijas. Taikytina skyrelio 3.7.2 metodika, o formulę (3.7.8) taikyti yra nekorektiška. d) Taškinis koreliacijos koeficiento įvertis $\hat\rho = r = 0,9964$. Remdamiesi (3.7.13) gauname pasikliovimo intervalą $(\underline{\rho}; \bar\rho) = (0,9894; 0,9988)$. A. d. X ir Y yra stipriai priklausomi. **3.173.** $(\underline{\theta}; \bar\theta = (0,9966; 1,0497)$. **3.174.** $\hat\theta = 0,0408$; $(\underline{\theta}; \bar\theta) = (0,0151; 0,0665)$; yra pagrindo tvirtinti, kad $p_1 > p_2$. **3.175.** Taikydami normaliąją aproksimaciją gauname: a) $N \geq 388$; b)

$N \geq 1549$. **3.176.** Randame $\bar{C} = -0,0345$, $\bar{S} = 0,3222$, $\bar{R} = 0,3240$; $\hat{\mu} = 96,1605°$, $\hat{\theta} = 0,6854$. Pasikliovimo intervalai: $(\underline{\mu};\ \hat{\mu}) = (79,6766°;\ 112,6444°)$; $(\overline{\theta};\ \hat{\theta}) = (0,4768;\ 0,8940)$. **3.177.** a) $\hat{C} = -0,0954$, $\hat{S} = -0,0316$, $\hat{R} = 0,1005$; $\hat{\mu} = 198,34°$, $\hat{\theta} = 0,2021$. b) $(\overline{\mu};\ \hat{\mu}) = (163,31°;\ 233,37°)$; $(\overline{\theta};\ \hat{\theta}) = (0,0779;\ 0,3263)$.

4 skyrius

Parametrinių hipotezių tikrinimas

4.1. Statistiniai kriterijai ir jų klasifikavimas

4.1.1. Kriterijų apibrėžimas ir jų klasifikavimas

Šiame skyriuje nagrinėsime parametrinių statistinių hipotezių, t. y. teiginių apie statistinio modelio parametrų reikšmes, priėmimo taisykles (kriterijus).

Tarkime, kad $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra imtis, kurios skirstinys priklauso šeimai $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}},\ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m\}$.

4.1.1 apibrėžimas. Teiginys, kad a. v. $\mathbf{X}$ skirstinys priklauso šeimai $\mathcal{P}_H = \{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_H\}$, $\boldsymbol{\Theta}_H \subset \boldsymbol{\Theta}$, vadinamas *parametrine hipoteze.* Trumpai žymima $H : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_H$. Hipotezė $\bar{H} : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_{\bar{H}} = \boldsymbol{\Theta} \setminus \boldsymbol{\Theta}_H$ vadinama alternatyviąja, arba trumpiau – *alternatyva* (hipotezei H).

4.1.2 apibrėžimas. Jeigu aibei $\boldsymbol{\Theta}_H$ arba $\boldsymbol{\Theta}_{\bar{H}}$ priklauso vienas taškas, tai atitinkama hipotezė ar alternatyva vadinama *paprastąja*, priešingu atveju – *sudėtine*.

4.1.1 pavyzdys. *Paprastoji ir sudėtinės hipotezės, kai yra normalusis skirstinys.* Tarkime, turime modelį

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2),\ \boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)^T \in \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{R} \times (0, \infty) \subset \mathbf{R}^2.$$

Hipotezė $H_1 : \mu = 3, \sigma^2 = 1$, kuri užrašoma $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_{H_1} = \{(3, 1)\} \subset \boldsymbol{\Theta}$, yra paprastoji, nes aibė $\boldsymbol{\Theta}_{H_1}$ susideda iš vieno taško.

Hipotezė $H_2 : \mu = 3$, kuri užrašoma $H_2 : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_{H_2} = \{\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)^T : \boldsymbol{\theta} \in \{3\} \times (0, \infty)\} \subset \boldsymbol{\Theta}$ yra sudėtinė.

Hipotezė $H_3 : \mu \leq 3$, kuri užrašoma $H_3 : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_{H_3} = \{\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)^T : \boldsymbol{\theta} \in (-\infty, 3] \times (0, \infty)\} \subset \boldsymbol{\Theta}$, taip pat yra sudėtinė.

Turint imties realizaciją, atsižvelgiant į jos reikšmę, priimamas vienas iš dviejų sprendimų: d_H – *hipotezė H teisinga* ir $d_{\bar{H}}$ – *hipotezė H klaidinga.* Svarbiausias statistinis uždavinys šioje situacijoje: parinkti optimalią sprendimo priėmimo taisyklę.

4.1.3 apibrėžimas. Sprendimo priėmimo taisyklė, kai hipotezė atmetama, imties realizacijai $\boldsymbol{x}$ patekus į imties galimų reikšmių aibės $\mathcal{X}^n$ poaibį K, o priimama jai patekus į sritį $A = \mathcal{X}^n \backslash K$, vadinama *nerandomizuotu statistiniu kriterijumi.* Poaibis K vadinamas *kritine sritimi*, A – hipotezės *priėmimo sritimi*, o funkcija

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } \boldsymbol{x} \in K, \\ 0, \text{ kai } \boldsymbol{x} \in A, \end{cases}$$

vadinama *kriterijaus funkcija.*

Taigi hipotezė atmetama, kai kriterijaus funkcija įgyja reikšmę 1, o priimama, kai įgyja reikšmę 0.

4.1.2 pavyzdys. *Hipotezė apie binominio skirstinio parametrą.* Tarkime, kad n kartų atliekami Bernulio eksperimentai, kurių metu tikrinama, ar gaminys atitinka kokybės reikalavimus. Reikia patikrinti hipotezę, kad defektinių gaminių dalis visų gaminių populiacijoje p neviršija 5%, t. y. modelyje $X_i \sim B(1,p)$ reikia patikrinti statistinę hipotezę $H : p \leq 0,05$, kai alternatyva yra $\bar{H} : p > 0,05$. Būtų natūralu priimti hipotezę H, jei rastų defektinių gaminių skaičius $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ mažas, ir ją atmesti, jei tas skaičius didelis. Taigi, tinkamai parinkus skaičių $c \in \{1,\dots,n\}$, kritinė sritis turėtų būti $K = \{\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n)^T : \sum\limits_{i=1}^{n} x_i > c\}$, o hipotezės priėmimo sritis $A = \{\boldsymbol{x} : \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq c\}$. Kriterijaus funkcija

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } \sum\limits_{i=1}^{n} x_i > c, \\ 0, \text{ kai } \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq c. \end{cases}$$

Kyla klausimas, ar tokia kritinės srities forma optimali, o jei taip, kaip parinkti skaičių c?

Norint išspręsti pavyzdyje minėtus uždavinius, reikia apibendrinti statistinio kriterijaus sąvoką. Tariama, kad, turint imties realizaciją $\boldsymbol{x}$, sprendimas apie hipotezės priėmimą daromas atlikus *randomizavimą*, t. y. papildomą eksperimentą, kurio metu įvykio pasirodymo tikimybė lygi $\varphi(\boldsymbol{x})$, $0 \leq \varphi(\boldsymbol{x}) \leq 1$. Tada, jeigu įvykis įvyksta, tai hipotezė H atmetama, priešingu atveju – priimama. Paprastai randomizavimas reikalingas tiktai kritinės srities pasienio taškuose.

4.1.4 apibrėžimas. Sprendimo priėmimo taisyklė, kai imčiai $\mathbf{X}$ įgijus reikšmę $\boldsymbol{x}$ hipotezė atmetama su tikimybe $\varphi(\boldsymbol{x})$ ir priimama su tikimybe $1 - \varphi(\boldsymbol{x})$, vadinama *randomizuotu statistiniu kriterijumi.* Funkcija φ vadinama (randomizuoto) *kriterijaus funkcija.*

Jeigu funkcija $\varphi(\boldsymbol{x})$ kiekviename taške $\boldsymbol{x}$ įgyja tik reikšmę 1 arba 0, tai kriterijus tampa nerandomizuotas.

Nagrinėkime įvykį $B = \{\text{Hipotezė atmetama}\}$. Tada sąlyginė tikimybė $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{B \mid \mathbf{X} = \boldsymbol{x}\} = \varphi(\boldsymbol{x})$, todėl pagal pilnosios tikimybės formulę gauname, kad hipotezė atmetama su tikimybe

$$\beta(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{B\} = \int_{\mathcal{X}^n} \varphi(\boldsymbol{x}) dF_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\varphi(\mathbf{X}).$$

4.1.5 apibrėžimas. Hipotezės atmetimo tikimybė

$$\beta(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\varphi(\mathbf{X}),\ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}, \tag{4.1.1}$$

vadinama kriterijaus *galios funkcija*, arba trumpiau – kriterijaus galia.

Reikia pažymėti, kad nerandomizuoto kriterijaus galios funkcija

$$\beta(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{X} \in K\}.$$

Naudodami statistinį kriterijų galime padaryti tokias klaidas:

1. Galime atmesti hipotezę $H : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_H$ tada, kai ji teisinga. Tokia klaida vadinama *pirmosios rūšies klaida*. Jeigu tikroji parametro reikšmė yra $\boldsymbol{\theta}$ ir $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_H$, tai šios klaidos tikimybė yra $\beta(\boldsymbol{\theta})$.

2. Galime pasirinkti hipotezę $H : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_H$ tada, kai ji klaidinga. Tokia klaida vadinama *antrosios rūšies klaida*. Jeigu tikroji parametro reikšmė yra $\boldsymbol{\theta}$ ir $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_{\bar{H}}$, tai šios klaidos tikimybė yra $1 - \beta(\boldsymbol{\theta})$.

Didinant kritinę sritį K pirmosios rūšies klaidos tikimybė $\beta(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{X} \in K\}, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_H$, didėja, bet tada antrosios rūšies klaidos tikimybė $1 - \beta(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_{\bar{H}}$, mažėja. Nerasime srities, kuri minimizuotų abiejų rūšių klaidas. Norint palyginti įvairius kriterijus, parenkamas artimas nuliui skaičius α (paprastai imama 0,1; 0,05; 0,01 ir pan.) ir nagrinėjami tik tokie kriterijai, kurie tenkina sąlygą

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_H} \beta(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha.$$

4.1.6 apibrėžimas. Kriterijus, tenkinantis sąlygą

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_H} \beta(\boldsymbol{\theta}) = \alpha, \tag{4.1.2}$$

vadinamas *reikšmingumo lygmens α kriterijumi*, arba *lygmens α kriterijumi*.

4.1.7 apibrėžimas. Reikšmingumo lygmens α kriterijus φ vadinamas *tolygiai galingiausiu* (TG), o kai alternatyva paprastoji – tiesiog *galingiausiu*, jeigu jis maksimizuoja kriterijaus galią $\beta(\boldsymbol{\theta})$ su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_{\bar{H}}$ reikšmingumo lygmens α kriterijų aibėje.

Tolygiai galingiausieji kriterijai ne visada egzistuoja.

4.1.8 apibrėžimas. Reikšmingumo lygmens α kriterijus φ, vadinamas *nepaslinktuoju*, jeigu

$$\beta(\boldsymbol{\theta}) \geq \alpha, \quad \forall\, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_{\bar{\mathbf{H}}}. \tag{4.1.3}$$

4.1.9 apibrėžimas. Reikšmingumo lygmens α kriterijus φ vadinamas *tolygiai galingiausiu nepaslinktuoju* (TGN), jeigu jis maksimizuoja kriterijaus galią $\beta(\boldsymbol{\theta})$ su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_{\bar{H}}$ nepaslinktųjų reikšmingumo lygmens α kriterijų aibėje.

4.1.10 apibrėžimas. Kriterijus φ vadinamas *pagrįstuoju*, jeigu su visais $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_{\bar{H}}$

$$\beta(\boldsymbol{\theta}) \to 1, \quad \text{kai} \quad n \to \infty. \tag{4.1.4}$$

4.1.2. P reikšmė

Remiantis TG ar TGN kriterijų apibrėžimais, galima daryti išvadą, kad į kritinę sritį K reikia įtraukti tokias imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ realizacijas $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)^T$, kurios, kai hipotezė teisinga, įgyjamos kuo rečiau, o kai teisinga alternatyva – kuo dažniau. Paprastai tai atliekama parenkant tokią statistiką $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\mathbf{X})$, kad jos skirstinys,kai hipotezė teisinga, kuo labiau skirtųsi nuo skirstinio, kai alternatyva teisinga.

Jeigu kriterijus grindžiamas vienamate statistika $T = T(\mathbf{X})$, tai jo kritinė sritis dažniausiai turi vieną iš tokių trijų pavidalų

$$1)\ K_1 = \{\boldsymbol{x} : T(\boldsymbol{x}) \geq c_1\}; \quad 2)\ K_2 = \{\boldsymbol{x} : T(\boldsymbol{x}) \leq c_2\};$$

$$3)\ K_3 = \{\boldsymbol{x} : T(\boldsymbol{x}) \geq d_1 \ \text{ arba } \ T(\boldsymbol{x}) \leq d_2\}. \tag{4.1.5}$$

Nagrinėjant reikšmingumo lygmens α hipotezės $H : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_H$ tikrinimo kriterijus, konstantos c_1, c_2, d_1, d_2 turėtų tenkinti sąlygas

$$1)\ \alpha = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \geq c_1\}; \quad 2)\ \alpha = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \leq c_2\};$$

$$3) \frac{\alpha}{2} = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \geq d_1\} = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \leq d_2\}. \tag{4.1.6}$$

Panagrinėsime paprastą pavyzdį.

4.1.3 pavyzdys. Tarkime, kad gamyba vyko stabiliai, ir per ilgą laikotarpį nustatyta, jog pagamintų gaminių aibėje tam tikro parametro X skirstinys gali būti aprašytas normaliuoju skirstiniu $N(\mu_0, \sigma^2)$. Norint patikrinti, ar technologinis procesas neišsiderino, atsitiktinai atrinkta n gaminių ir pamatuotos parametro X reikšmės $x_1, ..., x_n$. Vektorių $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)^T$ galima interpretuoti kaip paprastosios imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$, gautos stebint a. d. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, realizaciją.

Tegu žinoma, kad dispersija σ^2 nepakito. Tarkime, kad vidurkio μ sumažėjimas nepablogina produkcijos kokybės, o jo padidėjimas yra nepageidautinas. Tada natūralu tikrinti hipotezę $H_1 : \mu \leq \mu_0$, kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : \mu > \mu_0$ (dešininė alternatyva).

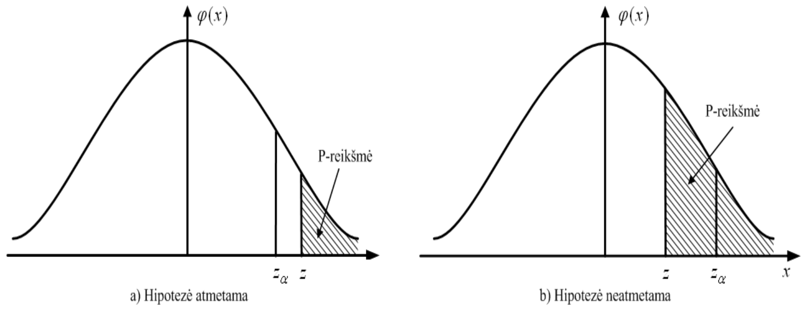
Remiantis 3 skyriumi žinoma, kad aritmetinis vidurkis $\bar{X}$ yra parametro μ NMD įvertinys. Taigi $\bar{X}$ yra sukaupęs visą informaciją apie nežinomą parametrą μ. Natūralu kriterijų hipotezei H tikrinti grįsti statistika $\bar{X}$. Jeigu hipotezė H teisinga ir tikroji vidurkio reikšmė yra $\mu \leq \mu_0$, tai $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$. Jeigu teisinga kuri nors alternatyvioji hipotezė $\bar{H}_1' : \mu = \mu', \ \ \mu' > \mu_0$, tai $\bar{X} \sim N(\mu', \sigma^2/n)$, t. y. skirstinys bus pasislinkęs į dešinę. Taigi kritinė sritis K_1 turėtų būti tokio pavidalo:

$$K_1 = \{\boldsymbol{x} : \bar{x} \geq c_1\}.$$

Remiantis (4.2.1) konstanta c_1 turi būti surasta iš sąlygos

$$\sup_{\mu \leq \mu_0} \mathbf{P}_\mu\{\bar{X} \geq c_1\} = \mathbf{P}_{\mu_0}\{\bar{X} \geq c_1\} = \mathbf{P}_{\mu_0}\{\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \geq c_1'\} = \alpha.$$

Taigi supremumas pasiekiamas kraštiniame taške μ_0. Kai teisinga paprastoji hipotezė $H_0 : \mu = \mu_0$, statistika $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma \sim N(0,\ 1)$, o kai teisinga alternatyvioji hipotezė $\bar{H}_1'$, tai $Z \sim N(\sqrt{n}(\mu' - \mu_0)/\sigma,\ 1)$, t. y. Z skirstinio vidurkis pasislinkęs į dešinę (žr. 4.1.1 pav.). Jeigu kriterijaus reikšmingumo lygmuo yra α, tai konstanta $c_1' = z_\alpha$; čia z_α yra standartinio normaliojo skirstinio lygmens α kritinė reikšmė.



4.1.1 pav. Statistikos Z skirstiniai

Gauname kriterijų: hipotezė H atmetama bet kurios alternatyvos $\bar{H}_1'$ naudai, kai teisinga nelygybė

$$Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \geq z_\alpha. \tag{4.1.7}$$

Kitaip tariant, hipotezė H atmetama, jeigu statistikos Z realizacija z tenkina nelygybę $z \geq z_\alpha$ (žr. 4.1.1 pav. a)); hipotezė H neatmetama, kai Z realizacija z tenkina priešingą nelygybę $z < z_\alpha$ (žr 4.1.1 pav. b)).

Pažymėsime, kad kriterijų galima suformuluoti kitu būdu. Apskaičiuokime tikimybę

$$pv = \mathbf{P}\{Z \geq z | \mu = \mu_0\} = 1 - \Phi(z),$$

kad statistika Z bus ne mažesnė už gautąją realizaciją z, kai hipotezė H_0 yra teisinga. Jeigu $pv \leq \alpha$ (4.1.1 pav. a), užbrūkšniuotas plotas), tai reiškia, kad realizacija z pateko į kritinę sritį, ir hipotezė H atmetama; jeigu $pv > \alpha$ (4.1.1 pav. b), užbrūkšniuotas plotas), tai reiškia, kad realizacija z nepateko į kritinę sritį ir hipotezė H neatmetama.

Kriterijų formuluotės tikimybių pv (P reikšmių) terminais turi savų pranašumų, ypač skaičiavimus atliekant kompiuteriu. Pirma, nereikia į kompiuterio atmintį įvesti reikšmingumo lygmens α. Šiame pavyzdyje kompiuteris pateiktų apskaičiuotąją statistikos Z realizaciją z ir jai atitinkančią P reikšmę pv. Galutinis sprendimas dėl hipotezės priėmimo ar atmetimo paliekamas tyrėjo nuožiūrai. Antra, P reikšmės pv didumas suteikia papildomą informaciją. Jeigu pv daug kartų mažesnė už α, tai būtume labiau linkę atmesti hipotezę H (t. y. hipotezė būtų atmesta ir kai yra kur kas mažesnis reikšmingumo lygmuo). Jeigu $pv \approx \alpha$, tai hipotezės priėmimas ar atmetimas kelia abejonių ir tyrėjas gali nuspręsti, pavyzdžiui, atlikti papildomus tyrimus.

Jeigu tartume, kad vidurkio μ padidėjimas nepablogina produkcijos kokybės, tai tikrintume hipotezę $H_2 : \mu \geq \mu_0$, kai alternatyva yra $\bar{H}_2 : \mu < \mu_0$ (kairinė alternatyva). Samprotaudami analogiškai gautume, kad šiuo atveju kriterijus atrodo taip: hipotezė H atmetama, kai teisinga nelygybė

$$Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \leq -z_\alpha, \tag{4.1.8}$$

arba P reikšmių terminais, kai

$$pv = \mathbf{P}\{Z \leq z | \mu = \mu_0\} = \Phi(z) \leq \alpha.$$

Jeigu yra nepageidaujamas ir vidurkio μ sumažėjimas, ir jo padidėjimas, tai tikrintume hipotezę $H_0 : \mu = \mu_0$, kai alternatyva yra $\bar{H}_3 : \mu \neq \mu_0$ (dvipusė alternatyva). Samprotaudami panašiai gautume, kad šiuo atveju kriterijus atrodo taip: hipotezė H atmetama, kai teisingos nelygybės

$$Z \leq -z_{\alpha/2}, \quad \text{arba} \quad Z \geq z_{\alpha/2}, \tag{4.1.9}$$

arba P reikšmių terminais, kai

$$\begin{aligned} pv &= 2\min(\mathbf{P}\{Z \leq z | \mu = \mu_0\}, \mathbf{P}\{Z \geq z | \mu = \mu_0\}) \\ &= 2\min(\Phi(z), 1 - \Phi(z)) \leq \alpha. \end{aligned}$$

Tolesniuose skyreliuose bus įrodyta, kad kriterijai (4.1.7), (4.1.8) yra tolygiai galingiausieji (TG), o kriterijus (4.1.9) – tolygiai galingiausias nepaslinktasis (TGN).

Grįžtame prie P reikšmės apibrėžimo bendru atveju. Tarkime, kad kriterijus hipotezei $H : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_H$ tikrinti turi vieną iš trijų (4.1.5) pavidalų, o konstantos c_1, c_2, d_1, d_2 tenkina (4.1.6) sąlygas. Pažymėkime $t = T(\boldsymbol{x})$ statistikos T realizaciją, kuri žinoma, jei žinoma imties $\mathbf{X}$ realizacija $\boldsymbol{x}$.

Apibrėžkime P reikšmes tokio tipo kritinėms sritims lygybėmis:

$$1)\ pv = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \geq t\}; \quad 2)\ pv = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \leq t\};$$

$$3)\ pv = 2\min(\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \geq t\}, \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \leq t\}). \tag{4.1.10}$$

4.1.1 pastaba. Dažniausiai

$$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \geq t\} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\{T \geq t\}, \qquad \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \leq t\} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\{T \leq t\},$$

čia $\boldsymbol{\theta}_0$ yra aibių $\boldsymbol{\Theta}_H$ ir $\boldsymbol{\Theta}_{\bar{H}}$ uždarinių sankirta (žr. 4.1.3 pavyzdį).

4.1.1 teorema. *Tarkime, kad kriterijaus kritinė sritis turi vieną iš trijų (4.1.5) pavidalų. Eksperimente, kuriame statistika T įgijo reikšmę t, hipotezė H atmetama reikšmingumo lygmens α kriterijumi tada ir tik tada, kai $pv \leq \alpha$.*

Įrodymas. Remdamiesi (4.1.5), (4.1.6) ir pv apibrėžimais (4.1.10) gauname

$$1) t \geq c_1 \Leftrightarrow pv = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \geq t\} \leq \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \geq c_1\} = \alpha;$$

$$2) t \leq c_2 \Leftrightarrow pv = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \leq t\} \leq \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \leq c_2\} = \alpha;$$

$$3) t \leq d_1 \ \text{ arba } \ t \geq d_2 \Leftrightarrow \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \leq t\} \leq \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \leq d_1\} = \alpha/2 \ \text{ arba}$$

$$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \geq t\} \leq \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \geq d_2\} = \alpha/2 \Leftrightarrow$$

$$pv = 2\min(\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \geq t\}, \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_H} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{T \leq t\}) \leq \alpha.$$

▲

4.2. Paprastosios parametrinės hipotezės tikrinimas

Tarkime, kad sritis $\boldsymbol{\Theta}_H$ susideda iš vienintelio taško $\boldsymbol{\theta}_0$, t. y. tikrinama paprastoji hipotezė $H : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$.

4.2.1. Paprastosios alternatyvos atvejis

Jeigu ne tik hipotezė H, bet ir alternatyva $\bar{H}$ yra paprastoji, pavyzdžiui, $\bar{H}$: $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$, tai visada egzistuoja galingiausias kriterijus hipotezei H, kai alternatyva yra $\bar{H}$, tikrinti. Jį randame naudodamiesi fundamentaliąja Neimano ir Pirsono lema.

4.2.1 teorema. *(*Neimano ir Pirsono lema*). Tarkime, kad turime statistinį modelį $\mathbf{X} \sim \mathbf{P}_\theta$, $\theta \in \{0,1\}$, apimantį tik du skirstinius $\mathbf{P}_0$ ir $\mathbf{P}_1$, kurių tankiai to paties σ-baigtinio mato μ atžvilgiu yra f_0 ir f_1. Jei tikrinama hipotezė $H : \theta = 0$, kai alternatyva $\bar{H} : \theta = 1$, tai:*

1) Su bet kuriuo $\alpha \in (0,1)$ egzistuoja galingiausias lygmens α kriterijus, kuris tenkina sąlygą

$$\mathbf{E}_0\varphi(\mathbf{X}) = \alpha \tag{4.2.1}$$

ir kurio pavidalas yra

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \ \textit{kai} \ f_1(\boldsymbol{x}) > cf_0(\boldsymbol{x}), \\ \gamma, \ \textit{kai} \ f_1(\boldsymbol{x}) = cf_0(\boldsymbol{x}), \\ 0, \ \textit{kai} \ f_1(\boldsymbol{x}) < cf_0(\boldsymbol{x}); \end{cases} \tag{4.2.2}$$

čia $c \geq 0$, $\gamma \in [0,1]$.

2) Jeigu φ^* yra kitas galingiausias α lygmens kriterijus, tai aibėje $\{\boldsymbol{x} : f_1(\boldsymbol{x}) \neq cf_0(\boldsymbol{x})\}$ jis beveik visur mato μ prasme sutampa su φ.

Įrodymas. 1) Ieškosime tokių konstantų c ir γ, kad (4.2.2) pavidalo kriterijus tenkintų (4.2.1) lygybę. Nagrinėkime pasiskirstymo funkciją

$$F(c) = \mathbf{P}_0\left\{\frac{f_1(\mathbf{X})}{f_0(\mathbf{X})} \leq c\right\}, \quad c \geq 0.$$

Atsitiktinis dydis $f_1(\mathbf{X})/f_0(\mathbf{X})$ beveik visur baigtinis, kai teisinga hipotezė H, nes $\mathbf{P}_0\{f_0(\mathbf{X}) > 0\} = 1$. Pasiskirstymo funkcija F tolydi iš dešinės, todėl (4.2.1) lygybė teisinga tada ir tik tada, kai

$$\mathbf{E}_0\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{P}_0\{f_1(\mathbf{X}) > cf_0(\mathbf{X})\} + \gamma\mathbf{P}_0\{f_1(\mathbf{X}) = cf_0(\mathbf{X})\} = \alpha. \tag{4.2.3}$$

Jei egzistuoja toks c_0, kad $F(c_0) = 1 - \alpha$, tai, paėmę $c = c_0$, $\gamma = 0$, iš (4.2.3) gauname (4.2.1) lygybę. Priešingu atveju egzistuoja toks c_0, kad

$$F(c_0 - 0) \leq 1 - \alpha < F(c_0). \tag{4.2.4}$$

Tada imame $c = c_0$, o γ randame iš (4.2.1) lygties remdamiesi (4.2.3) išraiška:

$$\gamma = \frac{F(c_0) - (1-\alpha)}{F(c_0) - F(c_0 - 0)}.$$

Iš (4.2.4) nelygybių išplaukia, kad $\gamma \in [0,1]$. Taigi radome (4.2.2) pavidalo kriterijų, tenkinantį (4.2.1) lygybę.

Imkime kitą kriterijų φ^*, tenkinantį sąlygą $\mathbf{E}_0\varphi^*(\mathbf{X}) \le \alpha$. Tegu S^+ ir S^- yra tokios $\boldsymbol{x}$ reikšmių sritys, kuriose $\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi^*(\boldsymbol{x}) > 0$ ir $\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi^*(\boldsymbol{x}) < 0$. Jeigu $\boldsymbol{x} \in S^+$, tai $\varphi(\boldsymbol{x}) > 0$, todėl ir $f_1(\boldsymbol{x}) \ge cf_0(\boldsymbol{x})$; atvirkščiai, jeigu $\boldsymbol{x} \in S^-$, tai $\varphi(\boldsymbol{x}) < 1$, todėl $f_1(\boldsymbol{x}) \le cf_0(\boldsymbol{x})$. Tada

$$\int (\varphi - \varphi^*)(f_1 - cf_0)d\mu = \int_{S^+ \bigcup S^-} (\varphi - \varphi^*)(f_1 - cf_0)d\mu \ge 0,$$

iš čia

$$\mathbf{E}_1\varphi - \mathbf{E}_1\varphi^* = \int (\varphi - \varphi^*)f_1 d\mu \ge c \int (\varphi - \varphi^*)f_0 d\mu \ge 0.$$

Taigi kriterijus φ yra ne mažiau galingas kaip φ^*.

2) Tarkime, kad φ^* yra kitas galingiausias kriterijus, kurio reikšmingumo lygmuo yra α. Tegu

$$S = \{\boldsymbol{x} : \varphi(\boldsymbol{x}) \ne \varphi^*(\boldsymbol{x}),\ f_1(\boldsymbol{x}) \ne c_0 f_0(\boldsymbol{x}))\} = (S^+ \cup S^-) \cap \{\boldsymbol{x} :\ f_1(\boldsymbol{x}) \ne c_0 f_0(\boldsymbol{x}))\}.$$

Tarkime, kad $\mu(S) > 0$. Kadangi aibėje S sandauga $(\varphi - \varphi^*)(f_1 - cf_0)$ yra teigiama, $\alpha = \mathbf{E}_0\varphi(\mathbf{X}) \ge \mathbf{E}_0\varphi^*(\mathbf{X})$, tai

$$\mathbf{E}_1\varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{E}_1\varphi^*(\mathbf{X}) \ge \mathbf{E}_1\varphi(\mathbf{X}) - c\mathbf{E}_0\varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{E}_1\varphi^*(\mathbf{X}) + c\mathbf{E}_0\varphi^*(\mathbf{X})$$
$$= \int_S (\varphi - \varphi^*)(f_1 - cf_0)d\mu > 0,$$

t. y. kriterijus φ yra galingesnis už φ^*. Gautoji prieštara rodo, kad $\mu(S) = 0$. Tada

$$\mu\{\boldsymbol{x} : \varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi^*(\boldsymbol{x}),\ f_1(\boldsymbol{x}) \ne c_0 f_0(\boldsymbol{x})\}$$
$$= \mu\{\boldsymbol{x} : f_1(\boldsymbol{x}) \ne c_0 f_0(\boldsymbol{x})\} - \mu\{S\} = \mu\{\boldsymbol{x} : f_1(\boldsymbol{x}) \ne c_0 f_0(\boldsymbol{x})\}.$$

Taigi $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi^*(\boldsymbol{x})$ b. v. aibėje $\{\boldsymbol{x} : f_1(\boldsymbol{x}) \ne c_0 f_0(\boldsymbol{x})\}$.

▲

4.2.1 išvada. Tegu $\beta = \beta(1)$ yra galingiausio Neimano–Pirsono kriterijaus, kai reikšmingumo lygmuo $\alpha = \beta(0) \in (0, 1)$, galia. Tada $\beta > \alpha$, jei $\mathbf{P}_0 \ne \mathbf{P}_1$.

Įrodymas. Kadangi kriterijus $\varphi(\boldsymbol{x}) \equiv \alpha$ turi reikšmingumo lygmenį α ir galią α, tai $\beta \ge \alpha$. Tarkime, kad $\alpha = \beta < 1$. Tada kriterijus $\varphi(\boldsymbol{x}) \equiv \alpha$ yra galingiausias (4.2.2) pavidalo ir jis niekur neįgyja reikšmių 1 ir 0. Taigi $\alpha = \mathbf{E}_0\varphi(\mathbf{X}) = \alpha\mathbf{P}_0\{f_1(\mathbf{X}) = cf_0(\mathbf{X})\}$. Iš čia išplaukia lygybė $\mathbf{P}_0\{f_1(\mathbf{X}) = cf_0(\mathbf{X})\} = 1$, todėl $\mu\{f_1(\mathbf{X}) = cf_0(\mathbf{X})\} = 1$. Vadinasi, $f_1 = f_0$ μ-b. v. ir $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_1$.

4.2.1 pastaba. Gautas rezultatas intuityviai akivaizdus. Juk turint imties realizaciją $\boldsymbol{x}$, tikimybinių tankių reikšmės $f_0(\boldsymbol{x})$ ir $f_1(\boldsymbol{x})$ proporcingos tikimybėms, kad imtis $\mathbf{X}$ įgis reikšmę $\boldsymbol{x}$ (diskrečiuoju atveju) arba reikšmę iš $\boldsymbol{x}$ aplinkos (tolydžiuoju atveju), kai teisinga atitinkamai hipotezė $H : \mathbf{X} \sim f_0$ arba alternatyva $\bar{H} : \mathbf{X} \sim f_1$. Taigi hipotezę reikėtų atmesti su tomis reikšmėmis, su kuriomis santykis $f_1(\boldsymbol{x})/f_0(\boldsymbol{x})$ didelis, ir priimti su tomis reikšmėmis, kur jis mažas.

4.2.2 pastaba. Iš teoremos išplaukia, kad galingiausias kriterijus apibrėžiamas vienareikšmiškai visur, išskyrus galbūt taškus, kuriuose $f_1(\boldsymbol{x}) = cf_0(\boldsymbol{x})$. Šiuose kritinės srities krašto taškuose kritinė funkcija φ gali būti parinkta lygi konstantai.

4.2.3 pastaba. Jei aibės $\{\boldsymbol{x} : f_1(\boldsymbol{x}) = cf_0(\boldsymbol{x})\}$ turi μ matą, lygų 0 su bet kuriuo $c \geq 0$, tai kriterijus nerandomizuotas. Apskritai randomizacija kritinės srities krašto taškuose reikalinga tik tam, kad kriterijaus reikšmingumo lygmuo būtų tiksliai lygus α. Dažnai tikslingiau įtraukti aibę $\{\boldsymbol{x} : f_1(\boldsymbol{x}) = cf_0(\boldsymbol{x})\}$ į priėmimo sritį, t. y. šiek tiek sumažinti pirmosios rūšies ir padidinti antrosios rūšies klaidą ir taip apibrėžti nerandomizuotą kriterijų.

4.2.1 pavyzdys. *Paprastosios hipotezės apie normaliojo skirstinio vidurkio reikšmę tikrinimas.* Tarkime, kad paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a.d. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Tegu σ yra žinomas, o vidurkis μ gali įgyti tik dvi reikšmes: μ_0 ir $\mu_1 > \mu_0$. Tikrinant hipotezę $H : \mu = \mu_0$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \mu = \mu_1$, galingiausias kriterijus φ įgis reikšmę 1, kai

$$\frac{f_1(\mathbf{X})}{f_0(\mathbf{X})} = \frac{(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^n (X_j - \mu_1)^2\}}{(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^n (X_j - \mu_0)^2\}} > c.$$

Ši nelygybė yra ekvivalenti nelygybei

$$\overline{X} > c'.$$

Konstantą c' reikia rasti iš sąlygos

$$\mathbf{P}_{\mu_0}\{\overline{X} > c'\} = \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}_{\mu_0}\{\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} > c''\} = \alpha.$$

Atsitiktinis dydis $Z = \sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)/\sigma$ turi standartinį normalųjį skirstinį, todėl konstanta c'' lygi standartinio normaliojo skirstinio kritinei reikšmei z_α. Turime galingiausio kriterijaus kritinę sritį:

$$K = \{\mathbf{X} : Z = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} > z_\alpha\}. \tag{4.2.5}$$

Akivaizdu, kad šiame pavyzdyje galingiausias kriterijus yra nerandomizuotas.

Pažymėkime z statistikos Z realizaciją. Tada kriterijų galime suformuluoti P reikšmių terminais: hipotezė atmetama reikšmingumo lygmens α kriterijumi, kai

$$pv = \mathbf{P}_{\mu_0}\{Z \geq z\} = 1 - \Phi(z) \leq \alpha.$$

4.2.2 pavyzdys. *Paprastosios hipotezės apie binominio skirstinio tikimybės reikšmę tikrinimas.* Tarkime, kad n kartų atliekami Bernulio eksperimentai, t.y. $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$, $X_i \sim B(1, p)$. Taigi

$$f(\mathbf{X}, p) = p^S(1-p)^{n-S}, \quad S = X_1 + \cdots + X_n.$$

Tikriname hipotezę $H : p = p_0$, kai alternatyva yra $\bar{H} : p = p_1$, $0 < p_0 < p_1 < 1$. Santykis

$$\lambda(\mathbf{X}) = \frac{f(\mathbf{X}, p_1)}{f(\mathbf{X}, p_0)} = \left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right)^S \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^n.$$

Galingiausias kriterijus

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } \lambda(\mathbf{X}) > c, \\ \gamma, \text{ kai } \lambda(\mathbf{X}) = c, \\ 0, \text{ kai } \lambda(\mathbf{X}) < c, \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{ kai } S > m, \\ \gamma, \text{ kai } S = m, \\ 0, \text{ kai } S < m, \end{cases}$$

nes λ yra monotoniškai didėjanti pagal S.

Konstantos m ir γ randamos iš sąlygos

$$\alpha = \mathbf{E}_0\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{P}_{p_0}\{S > m\} + \gamma \mathbf{P} p_0\{S = m\} =$$
$$= \sum_{k=m+1}^{n} C_n^k p_0^k (1-p_0)^{n-k} + \gamma C_n^m p_0^m (1-p_0)^{n-m}.$$

Suma dešinėje pusėje yra diskrečioji m atžvilgiu, todėl, imant $\gamma = 0$, dažniausiai neegzistuos toks m, kad ši suma būtų lygi α. Matome, kad daugumai α reikšmių kriterijus bus randomizuotas. Praktiškai vietoje tokio kriterijaus naudojamas nerandomizuotas kriterijus, gaunamas įtraukiant tašką $S = m$ į priėmimo sritį ir taip truputį sumažinant pirmosios rūšies klaidą ir galią.

Tiksliau ieškome tokio didžiausio skaičiaus m, kad

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^k p_0^k (1-p_0)^{n-k} \le \alpha, \quad \sum_{k=0}^{m+1} C_n^k p_0^k (1-p_0)^{n-k} > \alpha.$$

Tada hipotezė atmetama, kai $S \ge m+1$. Šio kriterijaus reikšmingumo lygmuo

$$\alpha' = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p_0^k (1-p_0)^{n-k} = I_{1-p_0}(n-m, m+1) \le \alpha;$$

čia $I_x(\gamma, \eta)$ yra beta skirstinio su parametrais γ ir η pasiskirstymo funkcijos reikšmė taške x.

Tegu s yra statistikos S stebinys. Tada P reikšmių terminais kriterijus formuluojamas taip: hipotezė atmetama, kai teisinga nelygybė

$$pv = \mathbf{P}_{p_0}\{S \ge s\} = I_{1-p_0}(n-s-1, s) \le \alpha.$$

4.2.4 pastaba. Remiantis Neimano ir Pirsono lema, kartais galima tiesiogiai sudaryti TG kriterijų tikrinant paprastąją hipotezę, kai alternatyva yra sudėtinė.

Tarkime, kad tikriname paprastąją hipotezę $H : \theta = \theta_0$, kai sudėtinė alternatyva yra $\bar{H} : \theta \in \Theta_{\bar{H}}$. Parenkame paprastąją alternatyvą $\bar{H}' : \theta = \theta'$ iš alternatyvų klasės $\Theta_{\bar{H}}$. Remdamiesi Neimano ir Pirsono lema randame galingiausią kriterijų paprastai hipotezei $H : \theta = \theta_0$, kai paprastoji alternatyva yra $\bar{H}' : \theta = \theta'$, tikrinti. Jeigu gautasis kriterijus nepriklauso nuo parinktos alternatyvos, t. y. bet kuriai alternatyvai iš aibės $\Theta_{\bar{H}}$ kriterijus yra tas pats, tai darome išvadą, kad rastasis kriterijus yra TG tikrinant hipotezę $H : \theta = \theta_0$, kai alternatyva yra sudėtinė $\bar{H} : \theta \in \Theta_{\bar{H}}$.

Pirmajame pavyzdyje (4.2.5) kriterijus nepriklauso nuo alternatyvos μ_1, todėl šis kriterijus yra TG tikrinant hipotezę $H : \mu = \mu_0$, kai alternatyva $\bar{H} : \mu > \mu_0$ yra sudėtinė. Analogiškai antrame pavyzdyje surastas kriterijus yra TG tikrinant hipotezę $H : p = p_0$, kai sudėtinė alternatyva yra $\bar{H} : p > p_0$.

Toliau reikės apibendrintosios Neimano ir Pirsono lemos, kurioje konstruojamas kriterijus, maksimizuojantis tam tikrą funkcionalą, kai yra daugiau negu vienas apribojimas.

4.2.2 teorema. (Apibendrintoji Neimano ir Pirsono lema). *Tegu $f_1, ..., f_m$, f_{m+1} – realiosios funkcijos, apibrėžtos erdvėje $\mathbf{R}^n$ ir integruojamos σ-baigtinio mato μ atžvilgiu. Tarkime, kad konstantoms $\alpha_1, ..., \alpha_m$ egzistuoja Borelio funkcijos φ, tokios, kad*

$$\int \varphi f_i d\mu = \alpha_i, \quad i = 1, ..., m. \tag{4.2.6}$$

Visų tokių funkcijų φ aibę pažymėkime Φ.

1. Aibėje Φ egzistuoja elementas, maksimizuojantis

$$\int \varphi f_{m+1} d\mu. \tag{4.2.7}$$

2. Jei egzistuoja tokios konstantos $c_1, ..., c_m$, kad

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } f_{m+1}(\boldsymbol{x}) > \sum_{i=1}^m c_i f_i(\boldsymbol{x}), \\ 0, \text{ kai } f_{m+1}(\boldsymbol{x}) < \sum_{i=1}^m c_i f_i(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{4.2.8}$$

tai φ maksimizuoja (4.2.7) integralą.

3. Jeigu elementas $\varphi \in \Phi$ tenkina (4.2.8), kai konstantos $c_1, ..., c_m \geq 0$, tai jis maksimizuoja (4.2.7) integralą platesnėje klasėje funkcijų, tenkinančių sąlygas

$$\int \varphi f_i d\mu \leq \alpha_i, \quad i = 1, ..., m. \tag{4.2.9}$$

4. Taškų su koordinatėmis

$$(\int \varphi f_1 d\mu, ..., \int \varphi f_m d\mu), \quad \varphi \in \Phi,$$

aibė M yra iškila ir uždara. Jeigu $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ yra vidinis M taškas, tai egzistuoja konstantos $c_1, ..., c_m$ ir kriterijus φ, tenkinantis (4.2.6) ir (4.2.8) lygybes, o būtina sąlyga, kad elementas iš Φ maksimizuotų (4.2.7) integralą, yra ta, kad (4.2.8) lygybė būtų teisinga μ-beveik visur.

Įrodymas. Remiantis Lagranžo neapibrėžtųjų daugiklių metodu reikia rasti besąlyginį maksimumą funkcionalo

$$\int \varphi f_{m+1} d\mu - \sum_{i=1}^m c_i \int \varphi f_i d\mu = \int \varphi (f_{m+1} - \sum_{i=1}^m c_i f_i) d\mu \to \max_{\varphi}.$$

Šis integralas bus maksimalus, jeigu pointegralinis reiškinys bus maksimalus kiekviename taške, t. y. jeigu φ bus parinktas (4.2.8) pavidalo.

Visą teoremos įrodymą galima rasti knygoje [12].

4.2.2 išvada. Tegu $f_1, ..., f_m, f_{m+1}$ yra tankiai mato μ atžvilgiu ir $0 < \alpha < 1$. Tada egzistuoja kriterijus φ toks, kad $\mathbf{E}_i(\varphi(\mathbf{X})) = \alpha, i = 1, ..., m$, ir $\mathbf{E}_{m+1}(\varphi(\mathbf{X})) > \alpha$, išskyrus atvejį, kai μ-beveik visur $f_{m+1} = \sum_{i=1}^m c_i f_i$.

4.3. Skirstiniai, priklausantys nuo vieno parametro

4.3.1. Vienpusės alternatyvos

Paprastosios hipotezės H, kai alternatyva $\bar{H}$ yra paprastoji, tikrinimo uždavinys yra įdomus teoriniu požiūriu. Praktiniuose uždaviniuose tenka nagrinėti skirstinių šeimas, priklausančias nuo vieno ar keleto tolydžių parametrų, todėl tiek hipotezės, tiek alternatyvos yra sudėtinės.

Iš pradžių nagrinėsime atvejį, kai tikimybinių skirstinių šeima $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$, $\Theta \subset R$, aprašanti imties $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$ skirstinį, priklauso nuo vienmačio parametro θ. Tarkime, tikriname vienpusę sudėtinę hipotezę $H_1 : \theta \le \theta_0$, kai sudėtinė vienpusė alternatyva yra $\bar{H}_1 : \theta > \theta_0$.

Bendru atveju paprastosios hipotezės $H : \theta = \theta_0$, kai parinkta paprastoji alternatyva yra $\bar{H}' : \theta = \theta' > \theta_0$, tikrinimo galingiausias kriterijus gali priklausyti nuo parinktos alternatyvos θ', todėl jis nebus tolygiai galingiausias. Tačiau kai tikimybiniai skirstiniai $\mathbf{P}_\theta$ tenkina tam tikras sąlygas, tai TG kriterijai egzistuoja.

Tarkime, kad egzistuoja imties $\mathbf{X}$ tikimybinis tankis $f(\boldsymbol{x}, \theta), \theta \in \Theta \subset \mathbf{R}$, σ-baigtinio mato μ atžvilgiu.

4.3.1 apibrėžimas. Sakome, kad skirstinių šeima $f(\boldsymbol{x}, \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}$ turi *monotoninį tikėtinumų santykį* statistikos $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ atžvilgiu, jei su bet kuriomis skirtingomis parametro θ reikšmėmis $\theta_1 \ne \theta_2$ santykis $f(\boldsymbol{x}, \theta_2)/f(\boldsymbol{x}, \theta_1)$ yra monotoninė $T(\boldsymbol{x})$ funkcija.

4.3.1 teorema. *Tegu θ yra vienmatis parametras ir bet kokioms skirtingoms parametro θ reikšmėms $\theta_1 < \theta_2$ santykis $f(\boldsymbol{x}, \theta_2)/f(\boldsymbol{x}, \theta_1)$ yra nemažėjanti $T = T(\boldsymbol{x})$ funkcija. Tada*

1) Tikrinant hipotezę $H_1 : \theta \le \theta_0$, kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : \theta > \theta_0$, egzistuoja lygmens α TG kriterijus, kurio pavidalas

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{kai } T(\boldsymbol{x}) > c, \\ \gamma, & \text{kai } T(\boldsymbol{x}) = c, \\ 0, & \text{kai } T(\boldsymbol{x}) < c; \end{cases} \tag{4.3.1}$$

čia c ir γ parenkami iš sąlygos

$$\beta(\theta_0) = \mathbf{E}_{\theta_0}(\varphi(\mathbf{X})) = \alpha. \tag{4.3.2}$$

2) Šio kriterijaus galios funkcija

$$\beta(\theta) = \mathbf{E}_\theta(\varphi(\mathbf{X}))$$

yra didėjanti visuose taškuose, kuriuose $0 < \beta(\theta) < 1$.

3) Su bet kuriuo θ' kriterijus φ yra tolygiai galingiausias, kai reikšmingumo lygmuo $\alpha' = \beta(\theta')$, hipotezei $H_1' : \theta \le \theta'$, kai alternatyva yra $\bar{H}_1' : \theta > \theta'$, tikrinti.

4) Su visais $\theta < \theta_0$ (4.3.1) kriterijus minimizuoja $\beta(\theta)$, t. y. pirmos rūšies klaidos tikimybę, visų kriterijų, tenkinančių (4.3.2) sąlygą, klasėje.

Įrodymas. 1)–2) Nagrinėkime paprastąją hipotezę $H_0 : \theta = \theta_0$ ir paprastąją alternatyvą $\bar{H}_0 : \theta = \theta_1 > \theta_0$. Remiantis 4.2.1 teorema, egzistuoja galingiausias hipotezės H_0 tikrinimo kriterijus, kuris tenkina sąlygą $\mathbf{E}_{\theta_0}\varphi(\mathbf{X}) = \alpha$ ir kurio pavidalas yra

$$\varphi(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1, & \text{kai } f(\boldsymbol{x}, \theta_1) > c' f(\boldsymbol{x}, \theta_0), \\ \gamma, & \text{kai } f(\boldsymbol{x}, \theta_1) = c' f(\boldsymbol{x}, \theta_0), \\ 0, & \text{kai } f(\boldsymbol{x}, \theta_1) < c' f(\boldsymbol{x}, \theta_0). \end{cases} \tag{4.3.3}$$

Iš monotoninio tikėtinumų santykio apibrėžimo išplaukia, kad šią kriterijaus funkciją galima užrašyti (4.3.1) pavidalu. Gautas kriterijus yra TG hipotezei $H_0 : \theta = \theta_0$, kai sudėtingoji alternatyva yra $\bar{H} : \theta > \theta_0$, tikrinti, nes nepriklauso nuo parinktos θ_1 reikšmės. Norint parodyti, kad kriterijus yra TG ir hipotezei $H : \theta \leq \theta_0$, esant tai pačiai alternatyvai, tikrinti, belieka įsitikinti, kad $\beta(\theta) \leq \alpha$ su visomis $\theta < \theta_0$.

Tarkime, kad $\theta' < \theta''$. Pažymėkime $\alpha' = \beta(\theta')$. Įrodydami Neimano–Pirsono teoremą, įsitikinome, kad kriterijus, kurio pavidalas yra (4.3.3) ir kuris tenkina sąlygą $\mathbf{E}_{\theta'}\varphi(\mathbf{X}) = \alpha'$, yra galingiausias hipotezei $H' : \theta = \theta'$, kai alternatyva yra $\bar{H}' : \theta = \theta''$, tikrinti. Remiantis 4.2.1 išvada, $\beta(\theta') = \alpha' < \beta' = \beta(\theta'')$. Taigi parodėme, kad 2), kartu ir 1), teiginiai teisingi, nes iš funkcijos $\beta(\theta)$ monotoniškumo išplaukia, kad $\beta(\theta) < \alpha$ su visais $\theta < \theta_0$.

3) Jau įsitikinome, kad φ yra galingiausias hipotezės $H' : \theta = \theta'$, kai alternatyva yra $\bar{H}' : \theta = \theta''$, tikrinimo kriterijus. Bet įrodymo pradžioje kaip tik parodėme, kad jei (4.3.3) pavidalo kriterijus turi šią savybę, tai jis yra TG ir sudėtingosios vienpusės hipotezės, kai alternatyva yra sudėtingoji vienpusė, atveju. Tereikia α, θ_0 ir θ_1 pakeisti į α', θ' ir θ''.

4) Tvirtinimas išplaukia iš to, kad kriterijus, minimizuojantis galią tikrinant paprastąją hipotezę, kai alternatyva yra paprastoji, gaunamas pakeitus (4.2.2) formulėje nelygybes priešingomis.

▲

Analogiškai gauname, kad α lygmens TG kriterijus hipotezei $H_2 : \theta \geq \theta_0$, kai alternatyva yra $\bar{H}_2 : \theta < \theta_0$, tikrinti yra

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } T(\mathbf{x}) < c, \\ \gamma, \text{ kai } T(\mathbf{x}) = c, \\ 0, \text{ kai } T(\mathbf{x}) > c, \end{cases} \tag{4.3.4}$$

o konstantos c ir γ randamos iš sąlygos

$$\mathbf{E}_{\theta_0}(\varphi(\mathbf{X})) = \alpha. \tag{4.3.5}$$

4.3.1 pastaba. Jeigu 4.3.1 teoremos sąlygoje santykis $f(\boldsymbol{x}, \theta_2)/f(\boldsymbol{x}, \theta_1)$, kai $\theta_1 < \theta_2$ yra nedidėjanti $T = T(\boldsymbol{x})$ funkcija, tai formulėse (4.3.1) ir (4.3.4) nelygybes reikia pakeisti priešingomis.

4.3.2 pastaba. Tarkime, kad imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ skirstinio tankis σ baigtinio mato atžvilgiu priklauso vienparametrių eksponentinių skirstinių šeimai:

$$f(\boldsymbol{x}, \theta) = e^{\eta(\theta)T(\boldsymbol{x}) - b(\theta)}h(\boldsymbol{x}); \tag{4.3.6}$$

čia $\eta(\theta)$ — yra monotoninė funkcija. Akivaizdu, kad ši šeima turi monotoninį tikėtinumų santykį, todėl, remiantis 4.3.1 teorema ir jos išvada, α lygmens TG kriterijus hipotezei $H_1 : \theta \leq \theta_0$, kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : \theta > \theta_0$, tikrinti turi (4.3.1) pavidalą, jei funkcija $\eta(\theta)$ yra didėjanti. Nelygybes reikia pakeisti priešingomis, kai $\eta(\theta)$ yra mažėjanti.

Vienparametriams eksponentiniams dėsniams priklauso, pavyzdžiui, binominis skirstinys $B(1,\ p)$; neigiamasis binominis skirstinys $B^{-}(1,\ p)$; logaritminis skirstinys; normalusis skirstinys $N(\mu,\ \sigma^2)$, kai vienas iš parametrų yra žinomas; eksponentinis skirstinys $\mathcal{E}(\lambda)$; gama skirstinys $G(\lambda,\ \eta)$, kai vienas iš parametrų yra žinomas; beta skirstinys $Be(\gamma,\ \eta)$, kai vienas iš parametrų yra žinomas, ir kt.

4.3.3 pastaba. Monotoninį tikėtinumų santykį turi ir keletas skirstinių, kurie nepriklauso eksponentinių dėsnių šeimai. Pavyzdžiui, tolygusis skirstinys $U(0,\ \theta)$; tolygusis skirstinys $U(\theta,\ \theta+1)$; logistinis skirstinys $LG(\theta,\ c)$, kai c žinomas; hipergeometrinis skirstinys $H(N,\ M,\ n)$, kai N ir n žinomi, ir kt.

Skirstinio, kuris neturi monotoninio tikėtinumų santykio, pavyzdys gali būti Koši skirstinys $K(\mu,\ \sigma)$.

4.3.2. Dvipusės alternatyvos

Hipotezei $H:\theta=\theta_0$ tikrinti, kai alternatyva dvipusė $\bar{H}:\theta\neq\theta_0$, TG kriterijus paprastai neegzistuoja. Pavyzdžiui, teoremos 4.3.1 sąlygomis tikrinant paprastąją hipotezę $H:\theta=\theta_0$, kai paprastoji alternatyva yra $\bar{H}':\theta=\theta',\ \theta'>\theta_0$ galingiausias kriterijus turi (4.3.1) pavidalą, o kai alternatyva yra $H'':\theta=\theta'',\ \ \theta''<\theta_0$, tai galingiausias kriterijus yra (4.3.4) pavidalo. Neegzistuoja vieno kriterijaus, kuris būtų galingiausias su bet kuria paprastąja alternatyva iš alternatyvų klasės $\bar{H}:\theta\neq\theta_0$. Jeigu dvipusės alternatyvos atveju naudotume kriterijų (4.3.1), tai jo galios funkcija bus mažesnė už α su visais $\theta<\theta_0$ t. y. tokios alternatyvos bus atmetamos dar rečiau negu pati hipotezė. Kitaip tariant, kriterijus (4.3.1) yra paslinktasis. TG kriterijus hipotezei $H:\theta=\theta_0$, kai alternatyva yra $\bar{H}:\theta\neq\theta_0$, tikrinti turėtų su visais $\theta\neq\theta_0$ įgyti reikšmes, ne mažesnes už α, nes jis turi būti ne mažiau galingas negu kriterijus $\varphi(\boldsymbol{x})\equiv\alpha$.

Kai visų kriterijų klasėje TG neegzistuoja, kriterijų klasė siaurinama, kad į ją nepatektų tokie kriterijai, kurie esant kai kurioms alternatyvos reikšmėms ją atmeta su mažesne tikimybe negu pačią hipotezę.

Vienas iš tokių natūralių aibės susiaurinimų yra reikalavimas, kad kriterijus būtų nepaslinktasis.

Remiantis 4.1.8 apibrėžimu α lygmens kriterijus hipotezei $H:\theta=\theta_0$, kai alternatyva yra $\bar{H}:\theta\neq\theta_0$, tikrinti su galios funkcija $\beta(\theta)$ yra *nepaslinktasis*, jei

$$\beta(\theta)\geq\alpha,\ \ \forall\,\theta\neq\theta_0. \tag{4.3.7}$$

TG kriterijai, jeigu jie egzistuoja, yra nepaslinktieji, nes jų galia negali būti mažesnė už nepaslinktojo kriterijaus $\varphi(\boldsymbol{x})\equiv\alpha$ galią.

Jeigu $\beta(\theta)$ yra tolydžioji θ funkcija, tai iš nepaslinktumo išplaukia, kad

$$\beta(\theta_0)=\alpha. \tag{4.3.8}$$

4.3.1 lema. *Jeigu bet kokio α lygmens kriterijaus hipotezei $H:\theta=\theta_0$, kai alternatyva yra $\bar{H}:\theta\neq\theta_0$, tikrinti galios funkcija tolydžioji, tai TG kriterijus*

φ_0, tenkinantis sąlygą $\beta(\theta_0) = \alpha$, yra ir tolygiai galingiausias nepaslinktasis (TGN) kriterijus.

Įrodymas. Klasei kriterijų, tenkinančių (4.3.7) sąlygą, priklauso tie, kurie tenkina (4.3.8) sąlygą, todėl TG kriterijus φ_0 yra tolygiai galingesnis už bet kurį nepaslinktąjį kriterijų. Kita vertus, jis pats yra nepaslinktasis, nes tolygiai ne mažiau galingas kaip kriterijus $\varphi(\boldsymbol{x}) \equiv \alpha$. ▲

4.3.2 teorema. *Tarkime, kad imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ skirstinys priklauso šeimai vienparametrių eksponentinio tipo skirstinių, kurių tankis kanonine forma yra*

$$f(\boldsymbol{x}, \theta) = e^{\theta T(\boldsymbol{x}) - B(\theta)} h(\boldsymbol{x}). \tag{4.3.9}$$

Egzistuoja α lygmens TGN kriterijus hipotezei $H : \theta = \theta_0$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \theta \neq \theta_0$, tikrinti, kuris nusakomas lygybėmis

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } T(\boldsymbol{x}) < c_1 \text{ arba } T(\boldsymbol{x}) > c_2, \\ \gamma_i, \text{ kai } T(\boldsymbol{x}) = c_i, \quad i = 1, 2, \\ 0, \text{ kai } c_1 < T(\boldsymbol{x}) < c_2. \end{cases} \tag{4.3.10}$$

Konstantos $c_i, \ \gamma_i, \ i = 1, 2$, randamos iš sąlygų

$$\mathbf{E}_{\theta_0}(\varphi(\mathbf{X})) = \alpha, \tag{4.3.11}$$

$$\mathbf{E}_{\theta_0}(T(\mathbf{X})\varphi(\mathbf{X})) = \alpha \, \mathbf{E}_{\theta_0}(T(\mathbf{X})). \tag{4.3.12}$$

Įrodymas. Iš pradžių įrodysime, kad bet kuris nepaslinktasis kriterijus turi tenkinti (4.3.11) ir (4.3.12) sąlygas. Prisiminus 3.3.4 pastabą, funkcija

$$\beta(\theta) = \mathbf{E}_\theta \varphi(\mathbf{X}) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}, \theta) \mu(d\boldsymbol{x})$$

yra diferencijuojama ir diferencijuoti galima po integralo ženklu. Iš funkcijos $\beta(\theta)$ tolydumo ir kriterijaus nepaslinktumo išplaukia (4.3.11) lygybė. Kadangi θ_0 yra funkcijos $\beta(\theta)$ minimumo taškas, tai $\dot{\beta}(\theta_0) = 0$. Diferencijuodami po integralo ženklu, gauname

$$0 = \dot{\beta}(\theta_0) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(\boldsymbol{x}) \dot{f}(\boldsymbol{x}, \theta_0) \mu(d\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(\boldsymbol{x})(T(\boldsymbol{x}) - \dot{B}(\theta_0)) f(\boldsymbol{x}, \theta_0) \mu(d\boldsymbol{x})$$

$$= \mathbf{E}_{\theta_0}(T(\mathbf{X})\varphi(\mathbf{X})) - \dot{B}(\theta) \, \mathbf{E}_{\theta_0} \varphi(\mathbf{X}). \tag{4.3.13}$$

Remiantis 3.3.2 teorema, $\dot{B}(\theta_0) = \mathbf{E}_{\theta_0}(T(\mathbf{X}))$, todėl iš (4.3.13) lygybės išplaukia (4.3.12) sąlyga.

Spręsdami funkcionalo

$$\mathbf{E}_{\theta'}(\varphi(\mathbf{X})) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}, \theta') \mu(d\boldsymbol{x}), \quad \theta' \neq \theta_0,$$

maksimizavimo φ atžvilgiu uždavinį, kai yra (4.3.11) ir (4.3.12) apribojimai, pritaikysime 4.2.2 teoremą, kai $m = 2$, $f_1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}, \theta_0)$, $\alpha_1 = \alpha$, $f_2(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}, \theta_0)$, $\alpha_2 = \alpha \mathbf{E}_{\theta_0} T(\mathbf{X})$, $f_3(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}, \theta')$.

Remiantis šia teorema, egzistuoja konstantos k_1 ir k_2, kad funkcionalą maksimizuojanti funkcija yra

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } f(\boldsymbol{x}, \theta') > (k_1 + k_2 T(\boldsymbol{x}))f(\boldsymbol{x}, \theta_0), \\ 0, \text{ kai } f(\boldsymbol{x}, \theta') < (k_1 + k_2 T(\boldsymbol{x}))f(\boldsymbol{x}, \theta_0), \end{cases} \tag{4.3.14}$$

o aibėje $\{\boldsymbol{x} : f(\boldsymbol{x}, \theta') = (k_1 + k_2 T(\boldsymbol{x}))f(\boldsymbol{x}, \theta_0)\}$ funkcija $\varphi(\boldsymbol{x})$ parenkama taip, kad būtų tenkinamos (4.3.11) ir (4.3.12) sąlygos.

Kadangi

$$f(\boldsymbol{x}, \theta')/f(\boldsymbol{x}, \theta_0) = e^{(\theta' - \theta_0)T(\boldsymbol{x})},$$

tai $\varphi(\boldsymbol{x}) = 1$, kai

$$e^{(\theta' - \theta_0)T(\boldsymbol{x})} > k_1 + k_2 T(\boldsymbol{x}). \tag{4.3.15}$$

Rodiklinė funkcija $\exp\{(\theta' - \theta_0)t\}$ ir tiesinė funkcija $k_1 + k_2 t$ kertasi ne daugiau kaip dviejuose taškuose. Jei jos kertasi dviejuose taškuose, tai (4.3.15) nelygybė ekvivalenti nelygybėms $T(\boldsymbol{x}) < c_1$ arba $T(\boldsymbol{x}) > c_2$. Jei jos kertasi viename taške, tai (4.3.15) nelygybė ekvivalenti kuriai nors vienai iš nelygybių $T(\boldsymbol{x}) < c$ arba $T(\boldsymbol{x}) > c$. Bet kriterijų, tenkinančių (4.3.11) sąlygą, galios funkcija monotoninė. Todėl toks kriterijus negali būti nepaslinktasis. Taigi šis variantas negalimas. Jei funkcijos nesikerta, tai (4.3.15) nelygybė visada tenkinama. Bet tada $\varphi(\boldsymbol{x}) \equiv 1$, taigi netenkinama (4.3.11) sąlyga, nes imame $\alpha < 1$.

Vadinasi, galingiausias kriterijus, tenkinantis (4.3.11) ir (4.3.12) sąlygas, yra (4.3.10) pavidalo. Jo išraiška nepriklauso nuo $\theta' \neq \theta_0$.

Palyginę su kriterijumi $\phi(t) \equiv \alpha$, įsitikiname, kad jis yra nepaslinktasis. Jis taip pat yra TGN, nes kriterijai, tenkinantys (4.3.11) ir (4.3.12) sąlygas, apima visų nepaslinktųjų kriterijų klasę.

▲

4.3.4 pastaba. Kriterijaus paiešką galima supaprastinti, jeigu T skirstinys, kai $\theta = \theta_0$, yra simetrinis kurio nors taško a atžvilgiu:

$$\mathbf{P}_{\theta_0}\{T < a - u\} = \mathbf{P}_{\theta_0}\{T > a + u\}, \quad u \in \mathbf{R}.$$

Kai kriterijus yra simetrinis taško a atžvilgiu,

$$\mathbf{E}_{\theta_0}[T(\mathbf{X})\varphi(\mathbf{X})] = \mathbf{E}_{\theta_0}[(T(\mathbf{X}) - a)\varphi(\mathbf{X})] + a\mathbf{E}_{\theta_0}(\varphi(\mathbf{X})) = a\,\alpha = \alpha\,\mathbf{E}_{\theta_0}T(\mathbf{X}).$$

Taigi sąlyga (4.3.12) visada tenkinama. Tuo atveju galima imti $\gamma_2 = \gamma_1$, o c_2 – simetrinį a atžvilgiu, t. y. $c_2 = 2a - c_1$. Konstantas c_1 ir γ_1 galima rasti iš sąlygos

$$\mathbf{E}_{\theta_0}\varphi(\mathbf{X})/2 = \mathbf{P}_{\theta_0}\{T < c_1\} + \gamma_1 \mathbf{P}_{\theta_0}\{T = c_1\} = \frac{\alpha}{2}. \tag{4.3.16}$$

4.3.1 pavyzdys. *Hipotezės apie normaliojo skirstinio vidurkio reikšmę, kai alternatyva dvipusė, tikrinimas.* Tarkime, kad imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

σ – žinomas. Šis skirstinys priklauso vienparametrių eksponentinio tipo skirstinių šeimai su pakankamąja statistika $T = \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$. Tikrinant hipotezę $H : \mu = \mu_0$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \mu \neq \mu_0$, TGN kriterijaus kritinė sritis nusakoma taip:

$$K = \{\bar{X} : \bar{X} < c_1 \ \text{ arba } \ \bar{X} > c_2\}.$$

Kadangi, kai $\mu = \mu_0$, a.d. $\bar{X}$ skirstinys yra simetrinis μ_0 atžvilgiu, tai konstantos c_1 ir c_2 randamos iš (4.3.16) sąlygos. Perėję prie standartinio normaliojo skirstinio, gauname TGN kriterijaus kritinę sritį

$$K = \{\bar{X} : |Z| = \sqrt{n}\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\sigma} > z_{\alpha/2}\}; \tag{4.3.17}$$

čia z_P – standartinio normaliojo skirstinio P-oji kritinė reikšmė.

Tegu z yra statistikos Z realizacija. Tada kriterijų galime suformuluoti P reikšmių terminais: hipotezė atmetama, kai

$$pv = 2\min(\Phi(z), 1 - \Phi(z)) = 2(1 - \Phi(|z|)) < \alpha.$$

4.3.2 pavyzdys. *Hipotezės apie binominio skirstinio tikimybės reikšmę, kai alternatyva yra dvipusė, tikrinimas.* Tarkime, kad imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a.d. $X \sim B(1, \ \ p)$. Šis skirstinys priklauso vienparametrių eksponentinio tipo skirstinių šeimai su pakankamąja statistika $T(\mathbf{X}) = X_1 + \cdots + X_n \sim B(n, \ p)$. Tikrinant hipotezę $H : p = p_0$, kai alternatyva yra $\bar{H} : p \neq p_0$, TGN kriterijaus kritinė sritis nusakoma taip:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } T(\mathbf{X}) < m_1 \text{ arba } T(\mathbf{X}) > m_2, \\ \gamma_i, \text{ kai } T(\mathbf{X}) = m_i, \ \ i = 1, 2, \\ 0, \text{ kai } m_1 < T(\mathbf{X}) < m_2. \end{cases}$$

Konstantas $m_i, \gamma_i, \ i = 1, 2$ randame iš (4.3.11) ir (4.3.12) sąlygų. Sąlygą (4.3.11) galima užrašyti taip:

$$1 - \alpha = \mathbf{E}_{p_0}(1 - \varphi(\boldsymbol{x})) = \sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} C_n^k p_0^k q_0^{n-k} + \sum_{i=1}^{2}(1 - \gamma_i) C_n^{m_i} p_0^{m_i} q_0^{n-m_i}, \ \ q_0 = 1 - p_0. \tag{4.3.18}$$

Pasinaudojus lygybėmis

$$\alpha \mathbf{E}_{p_0} T(\mathbf{X}) = n\alpha p_0,$$

$$\mathbf{E}_{p_0} T(\mathbf{X})\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{E}_{p_0} T(\mathbf{X}) - \mathbf{E}_{p_0} T(\mathbf{X})(1 - \varphi(\mathbf{X})) = np_0 - \mathbf{E}_{p_0} T(\mathbf{X})(1 - \varphi(\mathbf{X})),$$

(4.3.12) sąlyga užrašoma taip

$$n\alpha p_0 = np_0 - \mathbf{E}_{p_0} T(\mathbf{X})(1 - \varphi(\mathbf{X})) = np_0 - \sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} kC_n^k p_0^k q_0^{n-k}$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} m_i(1 - \gamma_i) C_n^{m_i} p_0^{m_i} q_0^{n-m_i}.$$

Dabar, pasinaudoję tapatybe

$$kC_n^k p_0^k q_0^{n-k} = np_0 C_{n-1}^{k-1} p_0^{k-1} q_0^{n-k},$$

suvedame į tokį pavidalą

$$\sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} C_{n-1}^{k-1} p_0^{k-1} q_0^{n-k} + \sum_{i=1}^{2}(1 - \gamma_i) C_{n-1}^{m_i - 1} p_0^{m_i - 1} q_0^{n-m_i} = 1 - \alpha. \tag{4.3.19}$$

Minėjome, kad dažniau naudojami nerandomizuoti kriterijai, gaunami šiek tiek sumažinus reikšmingumo lygmenį. Tada nereikia spręsti lygčių sistemos (4.3.18), (4.3.19) ir kriterijus formuluojamas paprasčiau.

Tegu m_1 ir m_2 yra sveikieji skaičiai, gaunami iš sąlygų

$$m_1 = \max\{k : \mathbf{P}_{p_0}\{T(\mathbf{X}) \leq k\} \leq \alpha/2\} = \max\{k : \sum_{m=0}^{k} C_n^m p_0^m q_0^{n-m} \leq \alpha/2\},$$

$$m_2 = \min\{k : \mathbf{P}_{p_0}\{T(\mathbf{X}) \geq k\} \leq \alpha/2\} = \min\{k : \sum_{m=k}^{n} C_n^m p_0^m q_0^{n-m} \leq \alpha/2\}.$$

Tada hipotezė H atmetama, kai teisingos nelygybės

$$T(\mathbf{X}) \leq m_1 \quad \text{arba} \quad T(\mathbf{X}) \geq m_2. \tag{4.3.20}$$

Faktinis tokio kriterijaus reikšmingumo lygmuo

$$\alpha' = \sum_{m=0}^{m_1} C_n^m p_0^m q_0^{n-m} + \sum_{m=m_2}^{n} C_n^m p_0^m q_0^{n-m} = I_{1-p_0}(n-m_1, m_1+1) + I_{p_0}(m_2, n-m_2+1) \leq \alpha.$$

Tegu t yra statistikos T stebinys. Tada P reikšmių terminais kriterijus (4.3.20) formuluojamas taip: hipotezė H atmetama, kai

$$pv = 2\min(\mathbf{P}_{p_0}\{T \leq t\}, \mathbf{P}_{p_0}\{T \geq t\}) = 2\min(I_{1-p_0}(n-t, t+1), I_{p_0}(t, n-t+1)) \leq \alpha. \tag{4.3.21}$$

Jeigu n pakankamai didelis, o p_0 nėra artimas 0 arba 1, tai esant teisingai hipotezei a. d. $(T - np_0)/\sqrt{np_0q_0}$ skirstinį galima aproksimuoti standartiniu normaliuoju skirstiniu. Tada gauname asimptotinį kriterijų: hipotezė H atmetama, kai

$$\frac{|T(\boldsymbol{x}) - np_0|}{\sqrt{np_0q_0}} > z_{\alpha/2}.$$

Šį kriterijų galime užrašyti asimptotinių P reikšmių terminais: hipotezė atmetama, kai

$$pv_a = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{|t - np_0|}{\sqrt{np_0q_0}}\right)\right) \leq \alpha.$$

Kitas kriterijų formulavimo būdas susijęs su hipotezių tikrinimo ir pasikliovimo intervalų sudarymo uždavinių sąryšiais, kuriuos nagrinėsime 4.5 skyrelyje.

4.4. Hipotezės apie daugiaparametrių skirstinių parametrus

Yra daug praktiškai svarbių uždavinių, kai tenka tikrinti tokias sudėtines hipotezes: formuluojami tvirtinimai apie vieną parametrą, o pats stebimo a. d. skirstinys priklauso ir nuo kitų parametrų. Juos vadiname *trukdančiaisiais*. Tokiu atveju kartais egzistuoja TGN kriterijai, kurie sudaromi kaip sąlyginiai, kai yra fiksuota pakankamoji statistika. Tada kriterijai gaunami panašiai kaip ir vienparametrių skirstinių šeimoms.

4.4.1. Panašumas ir pilnumas

Hipotezėms apie daugiaparametrių eksponentinių skirstinių šeimų parametrus tikrinti ieškosime TG kriterijų *panašiųjų kriterijų* klasėje, kuri truputį platesnė už TGN kriterijų klasę.

Tarkime, kad tikrinama skirstinių šeimos $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$ hipotezė $H : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_H$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_{\bar{H}} = \boldsymbol{\Theta} \setminus \boldsymbol{\Theta}_H$. Pažymėkime ω aibių $\boldsymbol{\Theta}_H$ ir $\boldsymbol{\Theta}_{\bar{H}}$ pasienio taškų aibę, t. y. aibių $\boldsymbol{\Theta}_H$ ir $\boldsymbol{\Theta}_{\bar{H}}$ uždarinių sankirtą.

4.4.1 apibrėžimas. Kriterijai φ, tenkinantys sąlygą

$$\beta(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\varphi(\mathbf{X}) = \alpha, \quad \forall\, \boldsymbol{\theta} \in \omega,$$

vadinami *panašiaisiais* ω atžvilgiu.

Kaip ir 4.3.1 lemoje, jeigu visų TGN kriterijų galios funkcijos $\beta(\boldsymbol{\theta})$ yra tolydžios, tai jie yra panašieji.

Įvesime dar vieną truputį siauresnę už panašiųjų kriterijų klasę.

Tegu $\boldsymbol{T}$ yra pakankamoji šeimos $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \omega\}$ statistika ir $\mathcal{P}^{\boldsymbol{T}} = \{\mathbf{P}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \omega\}$ yra statistikos $\boldsymbol{T}$ skirstinių šeima.

4.4.2 apibrėžimas. Kriterijai φ, tenkinantys sąlygą

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi(\mathbf{X})|\boldsymbol{T}) = \alpha \quad \text{b.v.} \quad \mathbf{P}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{\theta}}, \quad \forall\, \boldsymbol{\theta} \in \omega, \tag{4.4.1}$$

vadinami *Neimano struktūros* kriterijais pakankamosios statistikos $\boldsymbol{T}$ atžvilgiu.

Neimano struktūros kriterijai yra panašieji, nes

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi(\mathbf{X})) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}[\mathbf{E}(\varphi(\mathbf{X})|\boldsymbol{T})] = \alpha, \quad \forall\, \boldsymbol{\theta} \in \omega.$$

Tarp Neimano struktūros kriterijų dažnai galima rasti TG sprendžiant optimizavimo uždavinį kiekviename paviršiuje $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}$. Toks kriterijus yra TG tarp panašiųjų (kartu ir tarp nepaslinktųjų) kriterijų, jeigu jie visi yra Neimano struktūros.

Neimano struktūros kriterijų egzistavimas glaudžiai susijęs su pilnumo sąvoka.

4.4.1 teorema. *Tegu* $\mathbf{X}$ *yra atsitiktinė imtis, kurios skirstinys priklauso šeimai* $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}},\ \boldsymbol{\theta} \in \omega\}$, *o* $\boldsymbol{T}$ *yra pakankamoji statistika, kurios skirstinys priklauso šeimai* $\mathcal{P}^{\boldsymbol{T}} = \{\mathbf{P}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{\theta}},\ \ \boldsymbol{\theta} \in \omega\}$. *Visi panašieji kriterijai yra Neimano struktūros tada ir tik tada, kai šeima* $\mathcal{P}^{\boldsymbol{T}}$ *yra aprėžtai pilna.*

Įrodymas. *Pakankamumas.* Tarkime, kad šeima $\mathcal{P}^{\boldsymbol{T}}$ yra aprėžtai pilna: jeigu aprėžta mačioji funkcij $h(\boldsymbol{t})$ tenkina sąlygą

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}} h(\boldsymbol{T}) = 0,\ \ \forall\, \boldsymbol{\theta} \in \omega,$$

tai $h(\boldsymbol{t}) = 0$ beveik visur $\mathbf{P}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{\theta}}$, $\forall\, \boldsymbol{\theta} \in \omega$ atžvilgiu.

Tegu $\varphi(\mathbf{X})$ yra panašusis ω atžvilgiu kriterijus. Tada

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\varphi(\mathbf{X}) - \alpha = 0, \quad \forall\, \boldsymbol{\theta} \in \omega.$$

Be to, jeigu $\psi(\boldsymbol{t}) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi(\mathbf{X}) \mid \boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}) - \alpha$, tai iš sąlyginio vidurkio savybių išplaukia

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\psi(\boldsymbol{T})) = 0, \quad \forall\, \boldsymbol{\theta} \in \omega.$$

Iš čia gauname, kad $\psi(\boldsymbol{t}) = 0$ ir $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi(\mathbf{X})|\boldsymbol{T}) = \alpha$ b.v. $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}$, $\forall\, \boldsymbol{\theta} \in \omega$. Taigi panašusis kriterijus φ yra Neimano struktūros.

Būtinumas. Tarkime, kad visi panašieji kriterijai yra Neimano struktūros, bet šeima $\mathcal{P}^{\boldsymbol{T}}$ nėra aprėžtai pilna. Tada atsiras tokia funkcija f, kad $|f| \le M$, čia M – konstanta, ir $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(f(\boldsymbol{T})) = 0$, $\forall\ \mathbf{P}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{\theta}} \in \mathcal{P}^{\boldsymbol{T}}$, o $f(\boldsymbol{T}) \ne 0$ su teigiama tikimybe bent vienam skirstiniui $\mathbf{P}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{\theta}}$.

Pažymėkime $\varphi(\boldsymbol{T}) = cf(\boldsymbol{T}) + \alpha, \quad c = \min(\alpha,\ 1-\alpha)/M$. Tada φ yra panašusis kriterijus, nes $0 \le \varphi(t) \le 1$ ir $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\varphi(T) = \alpha, \ \forall\, \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{T}} \in \mathcal{P}^{\boldsymbol{T}}$. Tačiau φ nėra Neimano struktūros, nes $\varphi(\boldsymbol{T}) \neq \alpha$ su teigiama tikimybe bent jau vienam $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{T}} \in \mathcal{P}^{\boldsymbol{T}}$. Taigi, padarę prielaidą, kad šeima $\mathcal{P}^{\boldsymbol{T}}$ nėra aprėžtai pilna, rastume panašųjį kriterijų, kuris nėra Neimano struktūros. To negali būti. Prielaida buvo neteisinga.

▲

4.4.2. Daugiaparametrių eksponentinio tipo šeimų TGN kriterijai

Tarkime, kad imties $\mathbf{X}$ skirstinio $\mathbf{P}_{\theta,\boldsymbol{\vartheta}}$ tankis σ-baigtinio mato $\boldsymbol{\mu}$ atžvilgiu yra

$$\exp\{\theta U(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\vartheta}^T \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) - B(\theta, \boldsymbol{\vartheta})\}; \tag{4.4.2}$$

čia θ – vienmatis, o $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, ..., \vartheta_k)^T$ – k-matis parametrai, $(\theta,\ \boldsymbol{\vartheta}) \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^{k+1}$. Tokia tikimybinių skirstinių šeima vadinama $(k+1)$-parametre *eksponentinio tipo skirstinių šeima.*

Nagrinėsime hipotezių H_i, kai alternatyvos yra $\bar{H}_i,\ i = 1, 2, 3$, tikrinimo uždavinius. Čia

$$H_1 : \theta \le \theta_0, \quad \text{kai} \quad \bar{H}_1 : \theta > \theta_0; \qquad H_2 : \theta \ge \theta_0, \quad \text{kai} \quad \bar{H}_2 : \theta < \theta_0;$$

$$H_3 : \theta = \theta_0, \quad \text{kai} \quad \bar{H}_3 : \theta \neq \theta_0.$$

Tarsime, kad taškas $(\theta_0, \boldsymbol{\vartheta}_0)$ yra parametrų $(\theta,\ \boldsymbol{\vartheta})$ kitimo srities Θ (remiantis 3.3.2 teorema, ji yra iškila) vidinis taškas.

Pakankamoji statistika $(U, \boldsymbol{T})$ turi $(k+1)$-parametrį eksponetinio tipo skirstinį, kurio tankis σ-baigtinio mato ν atžvigiu yra

$$\exp\{\theta u + \boldsymbol{\vartheta}^T \boldsymbol{t} - B(\theta, \boldsymbol{\vartheta})\}, \tag{4.4.3}$$

o sąlyginis U skirstinys, kai $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}$ fiksuotas, yra vienparametris eksponentinio tipo ir jo tankis σ-baigtinio mato $\nu_{\boldsymbol{t}}$ atžvilgiu yra

$$\exp\{\theta u - g(\theta)\}. \tag{4.4.4}$$

1. Remiantis 4.2.1 teorema, eksponentinio tipo skirstinių (4.4.4) šeimai egzistuoja TG lygmens α hipotezės H_1, kai alternatyva yra $\bar{H}_1$, tikrinimo kriterijus

$$\varphi_1(u,\ \boldsymbol{t}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } u > c_0(\boldsymbol{t}), \\ \gamma_0(\boldsymbol{t}), \text{ kai } u = c_0(\boldsymbol{t}), \\ 0, \text{ kai } u < c_0(\boldsymbol{t}); \end{cases} \tag{4.4.5}$$

čia su visais $\boldsymbol{t}$ konstantos $c_0(\boldsymbol{t})$ ir $\gamma_0(\boldsymbol{t})$ randamos iš sąlygos

$$\mathbf{E}_{\theta_0}(\varphi_1(U,\ \boldsymbol{T}) | \boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}) = \alpha. \tag{4.4.6}$$

2. Egzistuoja TG lygmens α kriterijus φ_2 hipotezei H_2, kai alternatyva yra $\bar{H}_2$, tikrinti, apibrėžtas (4.4.5) ir (4.4.6) sąlygomis, kuriose nelygybes reikia pakeisti priešingomis.

3. Remiantis 4.2.2 teorema, sąlyginiam skirstiniui (4.4.4) egzistuoja TGN lygmens α kriterijus hipotezei H_3, kai alternatyva yra $\bar{H}_3$, tikrinti, nusakomas nelygybėmis

$$\varphi_3(u,\ \boldsymbol{t}) = \begin{cases} 1, \quad \text{kai} \quad u < c_1(\boldsymbol{t}) \quad \text{arba} \quad u > c_2(\boldsymbol{t}), \\ \gamma_i(\boldsymbol{t}), \quad \text{kai} \quad u = c_i(\boldsymbol{t}), \quad i = 1,\ 2, \\ 0, \quad \text{kai} \quad c_1(\boldsymbol{t}) < u < c_2(\boldsymbol{t}); \end{cases} \tag{4.4.7}$$

čia konstantos $c_i(\boldsymbol{t}),\ \gamma_i(\boldsymbol{t}), i = 1, 2$, randamos iš sąlygų

$$\mathbf{E}_{\theta_0}(\varphi_3(U, \boldsymbol{T})|\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}) = \alpha, \quad \mathbf{E}_{\theta_0}[U\varphi_3(U,\ \boldsymbol{T})|\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}] = \alpha\mathbf{E}_{\theta_0}(U|\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}). \tag{4.4.8}$$

Kriterijai, apibrėžiami (4.4.5)–(4.4.8) formulėmis, yra sąlyginiai paviršiuose $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}$. Interpretuokime juos kaip besąlyginius, priklausančius nuo statistikos $(U,\ \boldsymbol{T})$, t. y. kaip kriterijus pradiniuose hipotezių H_1–H_3 tikrinimo uždaviniuose.

4.4.2 teorema. *Kriterijai (4.4.5)–(4.4.8) hipotezėms H_i, kai alternatyvos yra $\bar{H}_i$, $i = 1, 2, 3$, (4.4.4) modelyje tikrinti yra TGN kriterijai toms pačioms hipotezėms (4.4.3) modelyje tikrinti.*

Įrodymas. Statistika $\boldsymbol{T}$ yra pakankamoji parametro $\boldsymbol{\vartheta}$ statistika kiekvienam fiksuotam θ. Todėl $\boldsymbol{T}$ yra (4.4.3) skirstinių šeimos, apibrėžtos aibėje

$$\omega_0 = \{(\theta, \boldsymbol{\vartheta}) : (\theta, \boldsymbol{\vartheta}) \in \Theta, \theta = \theta_0\},$$

pakankamoji statistika.

Su visais $(\theta, \boldsymbol{\vartheta}) \in \omega_0$ statistikos $\boldsymbol{T}$ skirstinys yra k-parametris eksponentinio tipo, kurio tankis σ-baigtinio mato ν_0 atžvigiu yra

$$\exp\{\boldsymbol{\vartheta}^T\boldsymbol{t} - B(\theta_0, \boldsymbol{\vartheta})\}. \tag{4.4.9}$$

Kadangi Θ yra iškila $(k+1)$-matė aibė, kurios vidinis taškas yra $(\theta_0, \boldsymbol{\vartheta}_0)$, tai ω_0 yra iškila k-matė aibė, kurios vidinis taškas yra $\boldsymbol{\vartheta}_0$. Remiantis 3.3.3 teorema, statistika $\boldsymbol{T}$ yra pilnoji (4.4.9) šeimos su parametrų erdve ω_0 statistika. Todėl panašieji kriterijai yra Neimano struktūros ir

$$\mathbf{E}_{\theta_0}(\varphi(U,\ \boldsymbol{T})|\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}) = \alpha, \ \ (\theta,\ \boldsymbol{\vartheta}) \in \omega_0.$$

1. Nagrinėkime hipotezę H_1. Kriterijaus φ_1 yra panašusis, nes imdami (4.4.6) lygybės reiškinių abiejose pusėse vidurkius, turime

$$\mathbf{E}_{\theta_0,\boldsymbol{\vartheta}}\varphi_1(U, \boldsymbol{T}) = \alpha \quad \text{su visais} \quad \boldsymbol{\vartheta}.$$

Jis ir nepaslinktasis. Jei įrodysime, kad φ_1 yra visų panašiųjų ω_0 atžvilgiu kriterijų klasės TG, tai jis tuo labiau bus nepaslinktųjų kriterijų klasės TG.

Panagrinėkime besąlyginę kriterijaus φ_1 galią: su visais $\boldsymbol{T}$

$$\beta(\theta,\ \boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{E}_{\theta,\ \boldsymbol{\vartheta}}\varphi_1(U,\ \boldsymbol{T}) = \mathbf{E}_{\theta,\ \boldsymbol{\vartheta}}(\mathbf{E}_\theta(\varphi_1(U,\ \boldsymbol{T}) \mid \boldsymbol{T}). \tag{4.4.10}$$

Su visomis alternatyvomis $\theta > \theta_0$ ir su bet kuriuo $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}$ kriterijus φ_1 maksimizuoja sąlyginę kriterijų, tenkinančių (4.4.6) sąlygą, galią, todėl jis maksimizuoja sąlyginę visų panašiųjų kriterijų klasės galią. Kartu jis maksimizuoja ir besąlyginę visų panašiųjų kriterijų klasės galią.

2. Hipotezės H_2 atveju įrodymas analogiškas.

3. Kriterijaus φ_3 panašumas išplaukia iš pirmosios (4.4.8) lygybės lygiai taip pat kaip kriterijaus φ_1 panašumas gaunamas iš (4.4.6). Suvidurkinę reiškinius abiejose antrosios (4.4.8) lygybės pusėse, gauname, kad kriterijus φ_3 tenkina ir tokią sąlygą:

$$\mathbf{E}_{\theta_0,\boldsymbol{\vartheta}}(U\varphi_3(U,\boldsymbol{T})) = \alpha\mathbf{E}_{\theta_0}U$$

su visais $\boldsymbol{\vartheta}$.

Besąlyginė kriterijaus galia nagrinėjama lygiai taip pat kaip φ_1 atveju, todėl gauname, kad jis su visais $\theta \neq \theta_0$ maksimizuoja besąlyginę visų panašiųjų, kartu ir nepaslinktųjų kriterijų klasės galią.

Galima parodyti, kad (4.4.5) ir (4.4.7) formulėse $c_i(\boldsymbol{t})$ ir $\gamma_i(\boldsymbol{t})$ yra Borelio funkcijos (žr.[12]).

▲

4.4.1 pastaba. Kriterijai φ_1 ir φ_2 lieka TGN ir tuo atveju, kai hipotezes $H_1 : \theta \leq \theta_0$ ir $H_2 : \theta \geq \theta_0$ pakeičiame hipoteze $H : \theta = \theta_0$.

4.4.1 pavyzdys. *Dviejų Puasono skirstinių parametrų lygybės hipotezės TGN kriterijus.* Tarkime, kad turime dvi nepriklausomas paprastąsias Puasono imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_m)^T$ ir $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^n$, $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $Y_i \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$. Reikia patikrinti hipotezę $H : k = \lambda_2/\lambda_1 = 1$, kai alternatyva yra $\bar{H} : k \neq 1$. Jungtinės imties tikėtinumo funkcija

$$L(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1^{\sum_{i=1}^m X_i}}{X_1! \dots X_m!} e^{-\lambda_1 \sum_{i=1}^m X_i} \frac{\lambda_2^{\sum_{i=1}^n Y_i}}{Y_1! \dots Y_n!} e^{-\lambda_2 \sum_{i=1}^n Y_i}.$$

Pakankamoji statistika yra dvimatė: (S_1, S_2); čia $S_1 = \sum_{i=1}^m X_i \sim \mathcal{P}(m\lambda_1)$ ir $S_2 = \sum_{i=1}^n Y_i \sim \mathcal{P}(n\lambda_2)$ yra n. a. d. Atsitiktinio vektoriaus (S_1, S_2) tankis skaičiuojančio mato atžvilgiu yra eksponentinio tipo:

$$f(s_1, s_2; \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1^{s_1}}{s_1!} e^{-\lambda_1 s_1} \frac{\lambda_2^{s_2}}{s_2!} e^{-\lambda_2 s_2} =$$

$$= \frac{1}{s_1! s_2!} \exp\{s_1 \ln \lambda_1 + s_2 \ln \lambda_2 - n\lambda_1 - n\lambda_2\}.$$

Norint pritaikyti teoremos rezultatus, reikia modelį užrašyti kanonine forma, kad dominančio parametro $k = \lambda_2/\lambda_1$ monotoninė funkcija būtų padauginta iš pakankamosios statistikos komponentės. Nagrinėjamu atveju tai pavyksta padaryti:

$$f(s_1, s_2; \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{s_1! s_2!} \exp\{s_1 \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + (s_1 + s_2) \ln \lambda_1 - m\lambda_1 - n\lambda_2$$

$$= \frac{1}{s_1! s_2!} \exp\{\theta s_1 + \vartheta(s_1 + s_2) - B(\theta, \vartheta)\}.$$

Taigi turime dviparametrę eksponentinio tipo kanoninės formos skirstinių šeimą su parametru $\theta = \ln(\lambda_2/\lambda_1)$, trukdančiu parametru $\vartheta = \ln \lambda_1$ ir pakankamąja statistika (U, T), $U = S_1$, $T = S_1 + S_2$. Hipotezė $H : k = 1$, kai alternatyva yra $\bar{H} : k \neq 1$, užrašoma ekvivalenčia forma: $H : \theta = 0$ ir $\bar{H} : \theta \neq 0$.

Statistikos $U = S_1$ sąlyginis skirstinys su sąlyga $T = S_1 + S_2$ yra binominis $B(T,\ p)$, $p = m\lambda_1/(m\lambda_1 + n\lambda_2)$. Tada hipotezė ir alternatyva yra

$$H : p = \frac{m}{m+n}, \qquad \bar{H} : p \neq \frac{m}{m+n}.$$

Taigi sąlyginiai kriterijai sudaromi analogiškai vienparametriam eksponentinio tipo skirstiniui (šiuo atveju binominiam) apie tikimybės p reikšmes. Interpretuodami sąlyginius kriterijus kaip besąlyginius, gauname hipotezės $H : k = \lambda_2/\lambda_1 = 1$ tikrinimo kriterijus.

Sudarant kriterijų, reikia turėti omenyje, kad Bernulio eksperimentų skaičius lygus S_1+S_2, o teigiamo įvykio įvykimų skaičius yra S_1.

4.4.2 pastaba. Pateiktas sąlyginių kriterijų sudarymo metodas yra nepatogus normaliesiems ir kai kuriems kitiems tolydiesiems skirstiniams. Šiuo atveju naudojamas kitas metodas: jeigu egzistuoja statistika $V = h(U, \boldsymbol{T})$, kurios skirstinys nepriklauso nuo $\boldsymbol{T}$, kai $\theta = \theta_0$, tai kriterijus hipotezėms H_1, H_2, H_3 tikrinti kartais galima suformuluoti tiesiogiai statistikos V terminais.

4.4.3 teorema. *Tegu* $\mathbf{X}$ *skirstinys priklauso (4.4.2) šeimai ir statistikos* $V = h(U, \boldsymbol{T})$ *skirstinys, kai* $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}$, *nepriklauso nuo* $\boldsymbol{t}$, *kai* $\theta = \theta_0$. *Tada:*

1) Jeigu funkcija $v = h(u, \boldsymbol{t})$ *didėja pagal* u, *tai*

$$\varphi_1(v) = \begin{cases} 1, & \text{kai } v > c_0, \\ \gamma_0, & \text{kai } v = c_0, \\ 0, & \text{kai } v < c_0, \end{cases} \tag{4.4.11}$$

čia c_0 *ir* γ_0 *nepriklauso nuo* $\boldsymbol{t}$ *ir randami iš sąlygos*

$$\mathbf{E}_{\theta_0}\varphi_1(V) = \alpha, \tag{4.4.12}$$

yra α *lygmens TGN kriterijus hipotezei* $H_1 : \theta \leq \theta_0$, *kai alternatyva yra* $\bar{H}_1 : \theta > \theta_0$, *tikrinti. Tikrinant hipotezę* $H_2 : \theta \geq \theta_0$, *(4.4.11) nelygybės keičiamos priešingomis.*

2) Jeigu funkcija h *yra tiesinė pagal* u, *t. y.* $h(u, \boldsymbol{t}) = a(\boldsymbol{t})u + b(\boldsymbol{t})$, $a(\boldsymbol{t}) > 0$, *tai kriterijus*

$$\varphi_3(v) = \begin{cases} 1, & \text{kai } v < c_1, \text{ arba } v > c_2, \\ \gamma_i, & \text{kai } v = c_i,\ i = 1,\ 2, \\ 0, & \text{kai } c_1 < v < c_2, \end{cases} \tag{4.4.13}$$

čia konstantos $c_1, \gamma_1, c_2, \gamma_2$ *nepriklauso nuo* $\boldsymbol{t}$ *ir randamos iš sąlygų*

$$\mathbf{E}_{\theta_0}\varphi_3(V) = \alpha, \quad \mathbf{E}_{\theta_0}(V\varphi_3(V)) = \alpha\mathbf{E}_{\theta_0}(V), \tag{4.4.14}$$

yra α *lygmens TGN kriterijus hipotezei* $H_3 : \theta = \theta_0$, *kai alternatyva* $\bar{H}_3 : \theta \neq \theta_0$, *tikrinti.*

Įrodymas. 1) Sąlyginio (4.4.5) kriterijaus funkcijos $c_0(\boldsymbol{t})$ ir $\gamma_0(\boldsymbol{t})$ randamos iš (4.4.6) sąlygos, kurią galima užrašyti taip

$$\mathbf{P}_{\theta_0}\{U > c_0(\boldsymbol{t}) | \boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}\} + \gamma_0(\boldsymbol{t})\,\mathbf{P}_{\theta_0}\{U = c_0(\boldsymbol{t}) | \boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}\} = \alpha. \tag{4.4.15}$$

Jei $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}$, tai nelygybė $U > c_0(\boldsymbol{t})$ ekvivalenti nelygybei $V = h(U,T) > h(c_0(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})$, kurią galima užrašyti $V > c(\boldsymbol{t})$, čia $c(\boldsymbol{t}) = h(c_0(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})$. Taigi (4.4.15) sąlygą galima užrašyti

$$\mathbf{P}_{\theta_0}\{V > c(\boldsymbol{t})|\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}\} + \gamma_0(\boldsymbol{t})\mathbf{P}_{\theta_0}\{V = c(\boldsymbol{t})|\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}\} = \alpha. \tag{4.4.16}$$

Kadangi V skirstinys nepriklauso nuo $\boldsymbol{T}$, kai $\theta = \theta_0$, tai $c(\boldsymbol{t})$ ir $\gamma_0(\boldsymbol{t})$ galima parinkti nepriklausomus nuo $\boldsymbol{t}$, (4.4.6) kriterijų užrašyti pavidalu (4.4.11) (vėl naudojant pažymėjimą φ, nors argumentas yra kitas), o (4.4.16) lygybę – (4.4.12) pqavidalu. Taigi 1) pirmas teiginys įrodytas.

2) Analogiškai kaip 1) teiginio atveju įrodoma, kad (4.4.7) kriterijų galima užrašyti pavidalu (4.4.13), čia konstantos $c_i(\boldsymbol{t}), \gamma_i(\boldsymbol{t}), i = 1, 2$ kol kas dar priklauso nuo $\boldsymbol{t}$.

Toliau dvi skirtingas kriterijaus formas žymėsime skirtingai, nes argumentai skirtingi: $\varphi_3^*(v)$, kai kriterijus yra (4.4.13) pavidalo ir $\varphi_3(u, \boldsymbol{t})$, kai kriterijus yra (4.4.7) pavidalo. Kadangi $V = h(U, \boldsymbol{T}) = a(\boldsymbol{T})U + b(\boldsymbol{T})$, tai naudodamiesi sąlyginio vidurkio savybėmis ir pirmąja (4.4.8) lygybe, gauname:

$$\mathbf{E}_{\theta_0}\varphi_3^*(V) = \mathbf{E}_{\theta_0,\boldsymbol{\vartheta}}\varphi_3^*(V) = \mathbf{E}_{\theta_0,\boldsymbol{\vartheta}}\{\mathbf{E}_{\theta_0,\boldsymbol{\vartheta}}\{\varphi_3(U, \boldsymbol{T}) \mid \boldsymbol{T}\}\} = \alpha.$$

Analogiškai, naudodamiesi sąlyginio vidurkio savybėmis ir (4.4.8) antrąja lygybe, gauname

$$\mathbf{E}_{\theta_0}(V\,\varphi_3^*(V)) = \mathbf{E}_{\theta_0,\boldsymbol{\vartheta}}\{\mathbf{E}_{\theta_0,\boldsymbol{\vartheta}}\{[a(\boldsymbol{T})U + b(\boldsymbol{T})]\varphi_3(U, \boldsymbol{T}) \mid \boldsymbol{T}\}\}$$

$$= \mathbf{E}_{\theta_0,\boldsymbol{\vartheta}}\{a(\boldsymbol{T})\mathbf{E}_{\theta_0,\boldsymbol{\vartheta}}\{U\varphi_3(U, \boldsymbol{T}) \mid \boldsymbol{T}\} + b(\boldsymbol{T})\mathbf{E}_{\theta_0,\boldsymbol{\vartheta}}\{\varphi_3(U, \boldsymbol{T}) \mid \boldsymbol{T}\}\}$$

$$= \mathbf{E}_{\theta_0,\boldsymbol{\vartheta}}\{a(\boldsymbol{T})\alpha\,\mathbf{E}_{\theta_0,\boldsymbol{\vartheta}}\{U \mid \boldsymbol{T}\} + b(\boldsymbol{T})\,\alpha \mid \boldsymbol{T}\}\}$$

$$= \alpha\mathbf{E}_{\theta_0,\boldsymbol{\vartheta}}\{\mathbf{E}_{\theta_0,\boldsymbol{\vartheta}}\{a(\boldsymbol{T})\,U + b(\boldsymbol{T}) \mid \boldsymbol{T}\}\} = \alpha\mathbf{E}_{\theta_0}V.$$

Taigi gavome (4.4.14) lygybes. Statistikos V skirstinys, žinant $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}$, nepriklauso nuo $\boldsymbol{t}$, kai $\theta = \theta_0$, todėl konstantos $c_i(\boldsymbol{t}), \gamma_i(\boldsymbol{t}), i = 1,\ 2$, kurios randamos iš šių lygybių, taip pat nepriklauso nuo $\boldsymbol{t}$.

▲

4.4.3 pastaba. Statistikų $V = h(U,\, \boldsymbol{T})$ skirstinio, žinant $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}$, nepriklausomumui nuo $\boldsymbol{t}$ tikrinti, kartu funkcijos $V = h(U,\, \boldsymbol{T})$ pavidalui parinkti naudinga tokia teorema.

4.4.4 teorema. *Tegu $\mathcal{P}$ yra eksponetinio tipo skirstinių šeima, gaunama iš (4.4.2), kai $\boldsymbol{\theta}$ fiksuotas. Tada statistikos $V = h(U,\, \boldsymbol{T})$ skirstinys, žinant $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}$, nepriklauso nuo $\boldsymbol{t}$, jeigu V skirstinys nepriklauso nuo $\boldsymbol{\vartheta}$.*

Įrodymas. Kadangi V skirstinys nepriklauso nuo $\boldsymbol{\vartheta}$, tai visoms Borelio aibėms A tikimybė $p = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\vartheta}}(V \in A)$ nepriklauso nuo $\boldsymbol{\vartheta}$. Statistika $\boldsymbol{T}$ yra pakankamoji šeimos $\mathcal{P}$ statistika, todėl

$$f(\boldsymbol{t}) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\vartheta}}(\mathbf{1}_A(V) \mid \boldsymbol{T} = \boldsymbol{t})\} - p$$

yra tiktai $\boldsymbol{t}$ funkcija ir nepriklauso nuo $\boldsymbol{\vartheta}$. Tada

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\vartheta}} f(\boldsymbol{T}) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\vartheta}}\{\mathbf{E}_{\boldsymbol{\vartheta}}(\mathbf{1}_A(V) \mid \boldsymbol{T} = \boldsymbol{t})\} - p = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\vartheta}} \mathbf{1}_A(V) - \mathbf{P}_{\boldsymbol{\vartheta}}(V \in A) = 0.$$

Iš šeimos pilnumo išplaukia, kad $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\vartheta}}(V \in A \mid \boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}) - p = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\vartheta}}(\mathbf{1}_A(V) \mid \boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}) - p = 0$. Taigi a. d. V sąlyginis skirstinys, žinant $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}$, nepriklauso nuo $\boldsymbol{t}$.

▲

4.4.2 pavyzdys. *TGN kriterijai hipotezėms apie normaliojo skirstinio dispersijos reikšmes tikrinti.* Tegu paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$, gauta stebint normalųjį a. d. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Atsitiktinio vektoriaus $\mathbf{X}$ skirstinio tankis

$$(2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{n\mu}{\sigma^2}\bar{X}\} \tag{4.4.17}$$

priklauso dviparametrių eksponentinio tipo skirstinių (4.4.2) šeimai, kai $\theta = -1/2\sigma^2$, trukdantysis parametras $\vartheta = n\mu/\sigma^2$, $U = \sum X_i^2$, $T = \bar{X}$. Todėl egzistuoja TGN kriterijai hipotezėms H_1, H_2, H_3 apie parametrą θ arba (tai ekvivalentu) apie parametrą σ^2 tikrinti.

Statistika $V = h(U,\, T) = U - nT^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2$ yra tiesinė U atžvilgiu, o jos skirstinys, kai σ fiksuotas, nepriklauso nuo ϑ. Taigi jis nepriklauso ir nuo $T = \bar{X}$. Todėl TGN kriterijus galime sudaryti remdamiesi (4.4.11)–(4.4.14) formulėmis.

Pavyzdžiui, tikrinant hipotezę $H_1 : \sigma^2 \le \sigma_0^2$ (arba $\sigma^2 = \sigma_0^2$), kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$, α lygmens TGN kriterijaus kritinė sritis yra

$$V > c_0;$$

čia konstanta c_0 ieškoma iš sąlygos

$$\mathbf{P}_{\sigma_0}(V > c_0) = \alpha.$$

Pasinaudoję tuo, kad a. d. $V/\sigma_0^2 = \sum_i (X_i - \bar{X})^2/\sigma_0^2 \sim \chi^2(n-1)$, kai $\sigma^2 = \sigma_0^2$, gauname $c_0 = \sigma_0^2 \chi_\alpha^2(n-1)$; čia $\chi_\alpha^2(\nu)$ yra chi kvadrato skirstinio su ν laisvės laipsniais α kritinė reikšmė. Taigi TGN kriterijus yra toks: hipotezė H_1 atmetama, kai

$$\frac{V}{\sigma_0^2} = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2(n-1). \tag{4.4.18}$$

Tegu v yra statistikos V stebinys. Tada kriterijų (4.4.18) galima suformuluoti P reikšmių terminais: hipotezė H_1 atmetama, kai teisinga nelygybė

$$pv = \mathbf{P}_{\sigma_0^2}\left\{\frac{V}{\sigma_0^2} > \frac{v}{\sigma_0^2}\right\} = \mathbf{P}\left\{\chi_{n-1}^2 > \frac{v}{\sigma_0^2}\right\} \le \alpha.$$

Analogiškai, tikrinant hipotezę $H_2 : \sigma^2 \ge \sigma_0^2$ (arba $\sigma^2 = \sigma_0^2$), kai alternatyva yra $\bar{H}_2 : \sigma^2 < \sigma_0^2$, lygmens α TGN kriterijus nusakomas nelygybe

$$\frac{V}{\sigma_0^2} = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha}^2(n-1),$$

arba P reikšmių terminais nelygybe

$$pv = \mathbf{P}\left\{\chi_{n-1}^2 < \frac{v}{\sigma_0^2}\right\} \le \alpha.$$

Tikrinant hipotezę $H_3 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, kai alternatyva $\bar{H}_3 : \sigma^2 \ne \sigma_0^2$ yra dvipusė, α lygmens TGN kriterijumi apibrėžiama hipotezės H_3 priėmimo sritis yra

$$c_1 < V < c_2, \tag{4.4.19}$$

o konstantos, randamos iš sąlygų

$$\mathbf{E}_{\sigma_0^2}\varphi(V) = \mathbf{P}_{\sigma_0^2}(V < c_1) + \mathbf{P}_{\sigma_0^2}(V > c_2) = \alpha, \quad \mathbf{E}_{\sigma_0^2}(V\varphi(V)) = \alpha \mathbf{E}_{\sigma_0^2} V.$$

Pažymėkime $c_i^* = c_i/\sigma_0^2$. Tada $\mathbf{P}_{\sigma_0^2}(V < c_1) = \mathbf{P}\{\chi^2_{n-1} < c_1^*\}$, $\mathbf{E}_{\sigma_0^2} V = (n-1)\alpha\,\sigma_0^2$,

$$\mathbf{E}_{\sigma_0^2}(V\varphi(V)) = \mathbf{E}_{\sigma_0^2}(\mathbf{1}_{\{V<c_1\}}V) + \mathbf{E}_{\sigma_0^2}(\mathbf{1}_{\{V>c_2\}}V),$$

$$\mathbf{E}_{\sigma_0^2}(\mathbf{1}_{\{V<c_1\}}V) = \sigma_0^2 \int_0^{c_1^*} x f(x|n-1)dx = \int_0^{c_1^*} x \, \frac{x^{\frac{n-1}{2}-1}}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})} e^{-\frac{x}{2}}\, dx$$

$$= (n-1)\sigma_0^2 \int_0^{c_1^*} f(x|n+1)dx = (n-1)\sigma_0^2 \mathbf{P}\{\chi^2_{n+1} < c_1^*\}.$$

Taigi konstantos c_i^* randamos iš lygčių sistemos

$$\begin{cases} \mathbf{P}\{c_1^* < \chi^2_{n-1} < c_2^*\} = 1-\alpha, \\ \mathbf{P}\{c_1^* < \chi^2_{n+1} < c_2^*\} = 1-\alpha. \end{cases} \tag{4.4.20}$$

Vadinasi, TGN kriterijumi hipotezė H_3 priimama, kai

$$c_1^* < \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} < c_2^*, \tag{4.4.21}$$

o konstantos randamos iš (4.4.20) sąlygų.

4.4.3 pavyzdys. *Simetrinis kriterijus hipotezei apie normaliojo skirstinio dispersijos reikšmę tikrinti.* Atkreipsime dėmesį, kad, užuot naudojus kriterijų, kurio priėmimo sritis nusakoma (4.4.21) formule, dažniau renkamasi paslinktąjį, tačiau paprasčiau surandamą simetrinį kriterijų, kai konstantų c_i^* ieškoma tik iš pirmosios (4.4.20) sąlygos, ir reikalaujama, kad įvykių $\frac{\sum (X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2} < c_1^*$ ir $\frac{\sum (X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2} > c_2^*$ tikimybės, kai $\sigma^2 = \sigma_0^2$, sutaptų. Tada α lygmens kriterijaus hipotezės priėmimo sritis yra

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \tag{4.4.22}$$

arba P reikšmių terminais hipotezė atmetama, kai

$$\mathbf{P}\{\chi^2_{n-1} < v/\sigma_0^2\} \le \alpha/2, \quad \text{arba} \quad \mathbf{P}\{\chi^2_{n-1} > v/\sigma_0^2\} \le \alpha/2,$$

čia v yra statistikos V stebinys. Išvardintųjų kriterijų galia išreiškiama chi kvadrato skirstinio pasiskirstymo funkcija. Pavyzdžiui, (4.4.18) kriterijaus galia yra

$$\beta(\mu,\sigma^2) = \mathbf{P}_{\mu,\sigma^2}\{\frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_\alpha(n-1)\} = \mathbf{P}_{\mu,\sigma^2}\{\frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} > \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_\alpha(n-1)\}$$

$$= \mathbf{P}\{\chi^2_{n-1} > \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_\alpha(n-1)\}. \tag{4.4.23}$$

Galios funkcija didėja pagal σ intervale $(0,\infty)$, $\lim_{\sigma\downarrow 0}\beta(\mu,\,\sigma^2) = 0$, $\beta(\mu,\,\sigma_0^2) = \alpha$, $\lim_{\sigma\to\infty}\beta(\mu,\,\sigma^2) = 1$. Taigi kuo didesnė tikroji σ reikšmė, tuo didesne tikimybe atmetama hipotezė $H : \sigma \le \sigma_0$. Jei σ reikšmė labai artima 0, tai hipotezė beveik niekada neatmetama, ir, atvirkščiai, jei ji labai didelė, tai hipotezė beveik visada atmetama. Jei $\sigma = \sigma_0$, tai hipotezė atmetama su tikimybe α.

4.4.4 pavyzdys. *TGN kriterijai hipotezėms apie normaliojo skirstinio vidurkio reikšmes tikrinti.* Tarkime, kad turime 4.4.2 pavyzdžio duomenis. Nagrinėtą metodą pritaikysime hipotezėms $H_1 : \mu \le \mu_0$, $H_2 : \mu \ge \mu_0$, $H_3 : \mu = \mu_0$ apie vidurkio reikšmes tikrinti. Pereidami prie atsitiktinių dydžių $X_i - \mu_0$, $i = 1,...,n$, nesiaurindami prasmės galime tarti, kad $\mu_0 = 0$. Tankio (4.4.17) formulėje pažymėkime $\theta = n\mu/\sigma^2$, trukdantįjį parametrą imkime $\vartheta = -1/2\sigma^2$, $U = \bar{X}$, $T = \sum X_i^2$. Tada, remiantis 4.4.2 teorema, egzistuoja TGN kriterijai hipotezėms $\theta \le 0$, $\theta \ge 0$, $\theta = 0$, kurios ekvivalenčios hipotezėms H_1, H_2, H_3 apie parametrą μ, tikrinti. Kai $\mu = 0$, statistikos

$$V = h(U,\,T) = \frac{\sqrt{n(n-1)}U}{\sqrt{T - nU^2}} = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{s} \sim S(n-1),$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$

skirstinys (Stjudento skirstinys su $n-1$ laisvės laipsnių) nepriklauso nuo ϑ ir monotoninis pagal U, todėl, remiantis 4.4.3 teorema, α lygmens TGN kriterijus hipotezei $H_1 : \mu \le 0$ tikrinti, kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : \mu > 0$, nusakomas kritine sritimi:

$$t(\mathbf{X}) = V = \sqrt{n}\frac{\bar{X}}{s} > t_\alpha(n-1), \tag{4.4.24}$$

čia $t_\alpha(\nu)$ – Stjudento skirstinio su ν laisvės laipsnių α kritinė reikšmė.

Analogiškai, tikrinant hipotezę H_2, lygmens α TGN kriterijaus kritinė sritis yra

$$t(\mathbf{X}) < -t_\alpha(n-1). \tag{4.4.25}$$

Kai $\mu \neq 0$, statistika $t(\mathbf{X}) = \sqrt{n}\bar{X}/s$ turi necentrinį Stjudento skirstinį su $n-1$ laisvės laipsnių ir necentriškumo parametras $\delta = \sqrt{n}\mu/\sigma$, nes $\sqrt{n}\bar{X}/\sigma \sim N(\delta, 1)$, o $s/\sigma = \sqrt{\chi^2_{n-1}/(n-1)}$. Todėl kriterijaus galios funkcija

$$\beta(\mu, \sigma^2) = \mathbf{P}_{\mu,\sigma^2}\{t(\mathbf{X}) > t_\alpha(n-1)\} = \mathbf{P}\{t_{\delta,n-1} > t_\alpha(n-1)\}.$$

Necentrinio Stjudento skirstinio pasiskirstymo funkcija mažėja nuo 1 iki 0, kai necentriškumo parametras δ kinta nuo 0 iki ∞. Taigi su bet kuriuo fiksuotu σ ir n galia didėja nuo 0 iki 1, kai parametras μ perbėga intervalą $(0, \infty)$, $\beta(0, \sigma^2) = \alpha$.

Jei $\mu \neq 0$ fiksuotas, tai, didėjant dispersijai σ^2, galia mažėja ir artėja prie reikšmingumo lygmens α, kai $\sigma \to \infty$. Taigi kriterijus neskiria hipotezės nuo alternatyvos. Tai suprantama, pastebėjus, kad skirstiniai $N(0,\ \sigma^2)$ ir $N(\mu,\ \sigma^2)$ praktiškai neatskiriami, jeigu σ pakankamai didelis.

Pereiname prie hipotezės $H_3 : \mu = 0$, kai alternatyva $H_3 : \mu \neq 0$ yra dvipusė, tikrinimo. Kadangi statistikos

$$W = \frac{U}{\sqrt{T}} = \frac{\bar{X}}{\sqrt{\sum X_i^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i/\sigma)}{n\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i/\sigma)^2}}$$

skirstinys, kai $\mu = 0$, nepriklauso nuo $\vartheta = \sigma^2$ ir ji tiesinė U atžvilgiu, tai, remiantis (4.4.13), TGN kriterijaus hipotezės priėmimo sritis yra

$$c_1 < W < c_2. \tag{4.4.26}$$

Kadangi W skirstinys, kai $\mu = 0$, yra simetrinis 0 atžvilgiu, tai $\mathbf{E}_0 W = 0$. Todėl, naudojantis (4.4.14) formulėmis, konstantos c_1 ir c_2 randamos iš sąlygų:

$$\mathbf{P}_0\{W < c_1\} + \mathbf{P}_0\{W > c_2\} = \alpha, \quad \mathbf{E}_0\{W\mathbf{1}_{(-\infty,\ c_1)}(W) + \mathbf{1}_{(c_2,\ \infty)}(W)\} = 0.$$

Iš paskutinės sąlygos išplaukia (žymime $f_W(x, \mu)$ a. d. W tankį Lebego mato atžvilgiu)

$$\int_{-\infty}^{c_1} x f_W(x, 0)dx = -\int_{c_2}^{\infty} x f_W(x, 0)dx = \int_{-\infty}^{-c_2} x f_W(x, 0)dx,$$

todėl $c_1 = -c_2 = -c$, o konstanta c randama iš sąlygos

$$\mathbf{P}_0(W > c) = \frac{\alpha}{2}.$$

Vadinasi, TGN kriterijaus kritinė sritis yra $|W| > c$.

Statistikos W ir $t(\mathbf{X})$ susietos lygybe

$$t(\mathbf{X}) = \frac{W\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{1 - nW^2}},$$

iš kurios matome, kad $|t|$ yra didėjanti $|W|$ funkcija. Todėl α lygmens kriterijaus kritinę sritį $|W| > c$ galima perrašyti taip:

$$|t(\mathbf{X})| > t_{\alpha/2}(n-1). \tag{4.4.27}$$

Kriterijai hipotezėms $H_1 : \mu \leq \mu_0$, $H_2 : \mu \geq \mu_0$, $H_3 : \mu = \mu_0$ tikrinti gaunami iš nagrinėtų, a. d. X_i pakeitus $X_i - \mu_0$, t. y. (4.4.24), (4.4.25) ir (4.4.27) nelygybėse imant

$$t(\mathbf{X}) = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{s}. \tag{4.4.28}$$

Tegu t yra statistikos $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/s$ stebinys. Tada P reikšmių terminais hipotezės H_1, H_2, H_3 atmetamos, kai atitinkamai teisingos nelygybės

$$pv = 1 - F(t|n-1) < \alpha, \quad pv = F(t|n-1) < \alpha, \quad pv = 2(1 - F(|t||n-1)) < \alpha,$$

čia $F(t|n-1)$ yra Stjudento skirstinio su $(n-1)$ laisvės laipsniu pasiskirstymo funkcija.

4.5. Parametrinių hipotezių kriterijai ir pasikliovimo sritys

Parametrinių hipotezių kriterijų ir pasikliovimo sričių ar intervalų radimo uždaviniai yra glaudžiai susiję. Jų klasifikavimas, pateikiamas 3.6.2 ir 4.5.1 skyreliuose, nusakomas tais pačiais terminais. Statistinių kriterijų ir pasikliovimo sričių sąryšį apibūdina tokia teorema.

4.5.1 teorema. *Tarkime, kad turime statistinį modelį* $\mathbf{X} \sim \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m$.

1. Tegu $\varphi_{\boldsymbol{\theta}_0}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{\theta}_0 \in \boldsymbol{\Theta}$ *yra* α *lygmens kriterijus hipotezei* $H_{\boldsymbol{\theta}_0} : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$, *kai alternatyva yra* $\bar{H}$, *tikrinti. Pažymėkime*

$$A(\boldsymbol{\theta}_0) = \{\mathbf{X} : \varphi_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathbf{X}) \neq 1\}$$

hipotezės $H_{\boldsymbol{\theta}_0}$ *„priėmimo sritį" (nerandomizuotųjų kriterijų atveju sritis* $A(\boldsymbol{\theta}_0)$ *yra priėmimo sritis). Apibrėžkime atsitiktinę aibę*

$$C(\mathbf{X}) = \{\boldsymbol{\theta} : \mathbf{X} \in A(\boldsymbol{\theta})\} \subset \boldsymbol{\Theta}. \tag{4.5.1}$$

Tada $C(\mathbf{X})$ *yra parametro* $\boldsymbol{\theta}$ *pasikliovimo sritis, kai pasikliovimo lygmuo* $Q = 1 - \alpha$.

2. Tegu $C(\mathbf{X})$ *yra parametro* $\boldsymbol{\theta}$ *pasikliovimo sritis ir pasikliovimo lygmuo* $Q = 1 - \alpha$. *Tada su bet kuriuo fiksuotu* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \boldsymbol{\Theta}$

$$\varphi_{\boldsymbol{\theta}_0}(\boldsymbol{x}) = 1 - \mathbf{1}_{C(\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{\theta}_0) \tag{4.5.2}$$

yra α *lygmens kriterijus hipotezei* $H : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ *tikrinti. Kai kriterijus nerandomizuotas,* $A(\boldsymbol{\theta}_0) = \{\mathbf{X} : \boldsymbol{\theta}_0 \in C(\mathbf{X})\}$ *yra šio kriterijaus hipotezės priėmimo sritis.*

3. Jeigu $\varphi_{\boldsymbol{\theta}_0}(\boldsymbol{x})$ *yra nepaslinktasis hipotezės* $H : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ *tikrinimo kriterijus, tai* $C(\mathbf{X})$ *– nepaslinktoji pasikliovimo sritis. Atvirkščiai, jei* $C(\mathbf{X})$ *yra nepaslinktoji pasikliovimo sritis, tai kriterijus* $\varphi_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathbf{X}) = 1 - \mathbf{1}_{A(\boldsymbol{\theta}_0)}(\mathbf{X})$ *yra nepaslinktasis.*

4. Jeigu tikrinant hipotezę $H_{\boldsymbol{\theta}_0} : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ *kriterijus* $\varphi_{\boldsymbol{\theta}_0}(\boldsymbol{x})$, *kurio hipotezės priėmimo sritis* $C(\mathbf{X})$, *galingesnis už kriterijų* $\tilde{\varphi}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\boldsymbol{x})$, *kurio hipotezės priėmimo sritis* $\tilde{C}(\mathbf{X})$, *tai pasikliovimo sritis* $C(\mathbf{X})$ *yra tikslesnė už pasikliovimo sritį* $\tilde{C}(\mathbf{X})$. *Teisingas ir atvirkščias teiginys.*

Įrodymas. 1. Nagrinėkime aibę $C(\mathbf{X})$, apibrėžtą (4.5.1) lygybe. Su visais $\boldsymbol{\theta}_0 \in \boldsymbol{\Theta}$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\{\boldsymbol{\theta}_0 \in C(\mathbf{X})\} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\{\mathbf{X} \in A(\boldsymbol{\theta})\} = 1 - \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\{\varphi_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathbf{X}) = 1\} =$$

$$= 1 - \int\limits_{\{\boldsymbol{x}:\, \varphi_{\boldsymbol{\theta}_0}(\boldsymbol{x})=1\}} \varphi_{\boldsymbol{\theta}_0}(\boldsymbol{x})\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}(d\boldsymbol{x}) \geq 1 - \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\varphi_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathbf{X}) \geq 1 - \alpha.$$

2. Nagrinėkime kriterijų $\varphi_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathbf{X})$, apibrėžtą (4.5.2) lygybe. Su visais $\boldsymbol{\theta}_0 \in \boldsymbol{\Theta}$

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}\varphi_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathbf{X}) = 1 - \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\{\boldsymbol{\theta}_0 \in C(\mathbf{X})\} \leq \alpha.$$

3. Reikia įrodyti, kad

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\varphi_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathbf{X}) \geq \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\boldsymbol{\theta}_0 \in C(\mathbf{X})\} \leq 1 - \alpha$$

su visais $\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$. Įrodoma analogiškai, tikimybės ir vidurkio indeksuose $\boldsymbol{\theta}_0$ pakeitus $\boldsymbol{\theta}$.

4. Reikia įrodyti, kad

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\varphi_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathbf{X}) \geq \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}\tilde{\varphi}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathbf{X}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\boldsymbol{\theta}_0 \in C(\mathbf{X})\} \leq \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\boldsymbol{\theta}_0 \in \tilde{C}(\mathbf{X})\}$$

su $\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}$. Tinka ta pati pastaba kaip ir 3 punkte.

▲

4.5.1 pastaba. Minėjome, kad praktiškai randomizacija nėra atliekama. Jeigu neegzistuoja nerandomizuotas α lygmens kriterijus, tai parenkamas nerandomizuotas kriterijus, kurio reikšmingumo lygmuo $\alpha' < \alpha$ yra kuo artimesnis α. Tada, remiantis tokiais kriterijais, sudarytos pasikliovimo srities $C(\mathbf{X})$ pasikliovimo lygmuo $Q' = 1 - \alpha' > Q = 1 - \alpha$.

4.5.2 pastaba. Jeigu parametras θ yra vienmatis arba, kai yra daugiamatis parametras, bet intervalinis įvertinys sudaromas atskirai $\boldsymbol{\theta}$ koordinatei (likusios koordinatės yra trukdantieji parametrai), tai pasikliovimo sritys paprastai tampa vienpusiais arba dvipusiais pasikliovimo intervalais.

4.5.1 pavyzdys. *Normaliojo skirstinio dispersijos pasikliovimo intervalas ir hipotezės apie dispersijos reikšmę tikrinimo kriterijus.* Tikrindami hipotezę $H: \sigma^2 = \sigma_0^2$ pagal didumo n paprastąją imtį, gautą stebint a.d. $\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$, gavome (4.4.22) kriterijų, kurio reikšmingumo lygmuo yra α ir hipotezės priėmimo sritis

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)\,s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1).$$

Remdamiesi 4.5.1 teorema, iš čia randame parametro σ^2 pasikliovimo intervalą

$$\underline{\sigma}^2 = \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} = \bar{\sigma}^2,$$

kai pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - \alpha$.

4.5.2 pavyzdys. *Binominio skirstinio parametro pasikliovimo intervalas ir hipotezės apie šio parametro reikšmę tikrinimo kriterijus.* Stebint a. d. $X \sim B(1, p)$ pagal didumo n paprastąją imtį 3.7.6 skyrelyje sudarytas parametro p pasikliovimo intervalas

$$\underline{p} = X_{1-\alpha/2}(T,\ n-T+1) < p < X_{\alpha/2}(T+1,\ n-T) = \bar{p};$$

čia $T = X_1 + \cdots + X_n$, o $X_\alpha(\gamma, \eta)$ yra beta skirstinio su parametrais γ ir η lygmens α kritinė reikšmė. Remdamiesi 4.5.1 teorema, gauname hipotezės $H : p = p_0$ tikrinimo kriterijų: H atmetame, kai

$$p_0 < \underline{p} \text{ arba } p_0 > \bar{p}.$$

4.6. Parametrinių hipotezių tikrinimas, kai imtys didelės

4.6.1. Tikėtinumų santykio kriterijaus sąvoka

Išnagrinėjome TG ir TGN kriterijų sudarymo metodus hipotezėms apie eksponentinio tipo skirstinių parametrų reikšmes tikrinti. Šie metodai remiasi Neimano ir Pirsono lema ir jos apibendrinimais. TG ir TGN kriterijai gaunami ir kai kurių neeksponentinio tipo, pavyzdžiui, tolygiųjų skirstinių atveju. Vis dėlto daugumai skirstinių šeimų tokie kriterijai neegzistuoja. Net kai yra eksponentinio tipo šeimos TG ir TGN kriterijai egzistuoja tik kai kurioms išskirtinėms hipotezėms.

Kaip ir atliekant parametrų vertinimą, yra metodų, kuriais gaunami tam tikra prasme optimalūs kriterijai asimptotiniu atveju, kai imties didumas $n \to \infty$. Dažnai esant ir baigtinėms imtims jais gaunami tie patys kriterijai, kuriuos gavome naudodamiesi Neimano ir Pirsono lema. Šie metodai remiasi DT įvertiniais, šių įvertinių ir tikėtinumų santykio asimptotinėmis savybėmis.

Tarkime, kad imties $\mathbf{X}$ skirstinio tankis σ-baigtinio mato μ atžvilgiu yra $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^m$ ir jo tikėtinumo funkcija

$$L(\boldsymbol{\theta}) = L_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}). \tag{4.6.1}$$

Norime patikrinti hipotezę $H : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_1$, $\boldsymbol{\Theta}_0 \cup \boldsymbol{\Theta}_1 = \boldsymbol{\Theta}$. Tikėtinumų santykis yra

$$\Lambda = \frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0} L(\boldsymbol{\theta})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}} L(\boldsymbol{\theta})} = \frac{L(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{L(\hat{\boldsymbol{\theta}})}; \tag{4.6.2}$$

čia $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ – parametro $\boldsymbol{\theta}$ didžiausiojo tikėtinumo įvertinys, o $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ – parametro $\boldsymbol{\theta}$ didžiausiojo tikėtinumo įvertinys, rastas, kai $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0$.

Tikėtinumų santykis įgyja reikšmes iš intervalo $[0, 1]$, nes sąlyginis maksimumas yra ne didesnis už globalųjį maksimumą. DT įvertinių reikšmės susitelkia apie tikrąją parametro reikšmę. Kai hipotezė H teisinga, tai abiejų įvertinių $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ir $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ reikšmės susitelkia apie tą pačią reikšmę. Todėl sąlyginis ir globalusis maksimumai turėtų būti artimi. Vadinasi, (4.6.2) trupmenos reikšmės turėtų būti artimos 1. Jeigu hipotezė H neteisinga, tai tikroji parametro reikšmė, arti kurios ir turėtų būti globalusis maksimumas, nepriklauso sričiai $\boldsymbol{\Theta}_0$. Taigi sąlyginio maksimumo reikšmė turėtų būti mažesnė. Hipotezės H tikrinimo kriterijaus kritinė sritis turėtų būti

$$\Lambda < c_\alpha; \tag{4.6.3}$$

čia c_α yra didžiausia konstanta (priklausanti nuo reikšmingumo lygmens α), tenkinanti sąlygą

$$c_\alpha: \quad \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}\{\Lambda < c_\alpha\} \le \alpha, \quad \forall\, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0. \tag{4.6.4}$$

4.6.1 apibrėžimas. Statistinis α lygmens kriterijus, apibrėžiamas (4.6.3) ir (4.6.4) formulėmis, vadinamas *tikėtinumų santykio kriterijumi.*

4.6.1 pavyzdys. *Tikėtinumų santykio kriterijus hipotezei apie normaliojo skirstinio vidurkio reikšmę tikrinti.* Tegu imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Tikriname hipotezę $H: \mu = \mu_0$, kai alternatyva yra $\bar{H}: \mu \ne \mu_0$. Taigi aibė $\boldsymbol{\Theta}$ yra pusplokštumė $\boldsymbol{\Theta} = \{(\mu,\ \sigma): -\infty < \mu < \infty,\ \sigma > 0\}$, o aibė $\boldsymbol{\Theta}_0$ – pustiesė $\boldsymbol{\Theta}_0 = \{\mu = \mu_0,\ \sigma > 0\}$.

Tikėtinumo funkcija

$$L(\mu,\ \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2\},$$

o DT įvertiniai yra

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 = \frac{(n-1)}{n} s^2.$$

Besąlyginis L maksimumas

$$L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\{-\frac{n}{2}\}.$$

Kai hipotezė H teisinga, nežinomo parametro σ^2 DT įvertinys ir sąlyginis maksimumas yra

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (X_j - \mu_0)^2, \quad L(\mu_0, \tilde{\sigma}^2) = (2\pi\tilde{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\{-\frac{n}{2}\}.$$

Taigi tikėtinumų santykis

$$\Lambda = \left[\frac{\hat{\sigma}^2}{\tilde{\sigma}^2}\right]^{n/2} = \left[\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2 + (\bar{X} - \mu_0)^2}\right]^{n/2}, \quad \text{arba} \quad \Lambda^{2/n} = \frac{1}{1 + t^2/(n-1)};$$

čia $t = t(\mathbf{X})$ yra Stjudento (4.4.28) statistika. Kadangi Λ yra monotoniškai mažėjanti $|t|$ atžvilgiu, tai kritinė (4.6.3) sritis yra ekvivalenti sričiai

$$|t| > t_{\alpha/2}(n-1).$$

Matome, kad šiame pavyzdyje tikėtinumų santykio kriterijus sutampa su TGN kriterijumi, gautu 4.4.2 skyrelyje.

Analogiškai šiam pavyzdžiui, kai egzistuoja TG ar TGN kriterijai, tai tikėtinumų santykio kriterijus dažniausiai sutampa su jais. Tačiau ne visada statistikos Λ skirstinį galima suvesti prie žinomo ir rasti (4.6.3) kritinę sritį. Tokiais atvejais taikomi apytiksliai kriterijai, gaunami aproksimuojant Λ skirstinį, kai imtis pakankamai didelė. Tikėtinumų santykio asimptotiką nagrinėjome 3.5.4 skyrelyje.

4.6.2. Asimptotiniai tikėtinumų santykio, Valdo ir informantinis kriterijai

1. Paprastoji hipotezė

Nagrinėsime paprastąją parametrinę hipotezę

$$H: \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \boldsymbol{\theta}_0 = (\boldsymbol{\theta}_{10}, ..., \boldsymbol{\theta}_{m0})^T.$$

Šiuo atveju $\boldsymbol{\Theta}_0 = \{\boldsymbol{\theta}_0\}$ susideda iš vieno taško, todėl DT funkcijos maksimumo taškas aibėje $\boldsymbol{\Theta}_0$ yra $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}_0$.

Remiantis 3.5.4 teorema, kai hipotezė H teisinga ir modelis tenkina gana bendras reguliarumo sąlygas,

$$R_{TS} = R_{TS}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_0) = -2\ln\Lambda(\boldsymbol{\theta}_0) = -2\ln\frac{L(\boldsymbol{\theta}_0)}{L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)} \xrightarrow{d} \chi^2_m. \tag{4.6.5}$$

Taigi *asimptotinio tikėtinumų santykio kriterijaus*, kai reikšmingumo lygmuo α, kritinė sritis apibrėžiama lygybe

$$K_{TS} = \{\mathbf{X} : R_{TS}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_0) > \chi^2_\alpha(m)\}; \tag{4.6.6}$$

čia $\chi^2_\alpha(m)$ – chi kvadrato skirstinio su m laisvės laipsnių α kritinė reikšmė.

Remiantis 3.5.1 išvada, kai teisinga hipotezė H ir išpildytos tos pačios sąlygos,

$$R_V = R_V(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_0) = -(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)^T \ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \chi^2_m. \tag{4.6.7}$$

Vietoje $-\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)$ galima rašyti $-\ddot{\ell}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ arba $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}_0)$, $\boldsymbol{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$, nes nuo to ribinis dėsnis nepakinta.

Taigi *asimptotinio Valdo kriterijaus*, kai reikšmingumo lygmuo α, kritinė sritis apibrėžiama lygybe

$$K_V = \{\mathbf{X} : R_V(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_0) > \chi^2_\alpha(m)\}. \tag{4.6.8}$$

Remiantis 3.5.2 išvada, kai teisinga hipotezė H, statistika

$$R_I = R_I(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_0) = -\dot{\ell}^T(\boldsymbol{\theta}_0)\ddot{\ell}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \chi^2_m \tag{4.6.9}$$

Vietoje $-\ddot{\ell}(\boldsymbol{\theta}_0)$ galima rašyti $-\ddot{\ell}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ arba $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}_0)$, $\boldsymbol{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$, nes nuo to ribinis dėsnis nepakinta.

Taigi *asimptotinio informantinio kriterijaus*, kai reikšmingumo lygmuo α, kritinė sritis apibrėžiama lygybe

$$K_I = \{\mathbf{X} : R_I(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_0) > \chi^2_\alpha(m)\}. \tag{4.6.10}$$

4.6.1 pastaba. Informantinei (4.6.9) statistikai apskaičiuoti nereikia parametro $\boldsymbol{\theta}$ DT įvertinio $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$.

4.6.2 pastaba. Galima parodyti, kad, imant alternatyvų seką $\bar{H}_n : \boldsymbol{\theta}_n = \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{h}/\sqrt{n}$, ribinis visų statistikų dėsnis yra necentrinis chi kvadrato dėsnis su m laisvės laipsnių ir necentriškumo parametru $\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{h}$. Tai išplaukia iš to, kad esant teisingai $\bar{H}_n$,

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) = \sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_n) + \boldsymbol{h} \xrightarrow{d} N_m(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)).$$

Fiksuotam $\boldsymbol{\theta}$ pažymėkime $\boldsymbol{h} = \sqrt{n}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)$. Tada, kai n dideli, apytikslė galios funkcijos turi išraiška

$$\beta(\boldsymbol{\theta}) \approx \mathbf{P}\{\chi^2_{\delta,m} > \chi^2_\alpha(m)\}; \tag{4.6.11}$$

čia

$$\delta = \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{h} = n(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)^T \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\theta}_0)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0).$$

4.6.2 pavyzdys. *Asimptotiniai tikėtinumų santykio, Valdo ir informantinis kriterijai hipotezei apie Koši skirstinio padėties parametro reikšmę tikrinti.* Tarkime, kad paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim K(\mu,\ 1)$. Tankis ir tikėtinumo funkcija yra

$$f(x,\ \mu) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1 + (x - \mu)^2}, \quad L(\mu) = \frac{1}{\pi^n}\prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + (X_i - \mu)^2}.$$

Reikia patikrinti hipotezę $H : \mu = \mu_0$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \mu \neq \mu_0$.

Iš 3.5.7 pavyzdžio žinome, kad parametro μ DT įvertinys $\hat{\mu}_n$ tenkina lygtį $\dot{\ell}(\mu) = 0$, o funkcijos $\ell(\mu) = \ln L(\mu)$, $\dot{\ell}(\mu)$ Fišerio informacija $\boldsymbol{I}(\mu)$ yra tokia

$$\ell(\mu) = -n\ln\pi - \sum_{i=1}^n \ln(1 + (X_i - \mu)^2), \quad \dot{\ell}(\mu) = \sum_{i=1}^n \frac{2(X_i - \mu)}{1 + (X_i - \mu)^2}, \quad \boldsymbol{I}(\mu) = \frac{n}{2}.$$

Tikėtinumų santykio statistika

$$R_{TS} = -2(\ell(\mu_0)) - \ell(\hat{\mu}_n)) = 2\sum_{i=1}^n \ln\frac{1 + (X_i - \mu_0)^2}{1 + (X_i - \hat{\mu}_n)^2},$$

Valdo ir informantinė statistika yra

$$R_V = \frac{n}{2}(\hat{\mu}_n - \mu_0)^2, \quad R_I = \frac{2}{n}\dot{\ell}^2(\mu_0).$$

Kai n dideli, visų jų apytiksliejі skirstiniai yra $\chi^2(1)$. Hipotezė atmetama, kai bet kuri iš šių statistikų viršija $\chi^2_\alpha(1)$.

Kriterijaus galia aproksimuojama (žr. (4.6.11))

$$\beta(\boldsymbol{\theta}) \approx \mathbf{P}\{\chi^2_{\delta,1} > \chi^2_\alpha(1)\};$$

čia

$$\delta = \frac{n}{2}(\mu - \mu_0)^2.$$

2. Sudėtinės hipotezės

Nagrinėkime sudėtinę hipotezę

$$H : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0; \quad \boldsymbol{\Theta}_0 = \{\boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\theta} = \varphi(\boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{G}\}, \quad \boldsymbol{G} \subset \mathbf{R}^{m-k}, \quad k < m,$$

čia $\varphi : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{\Theta}$ yra tolydžiai diferencijuojamas atvaizdis.

Jau 3.5.4 skyrelyje sužinojome, kad dauguma hipotezių, kurių gali iškilti praktiniuose uždaviniuose, gali būti užrašytos tokiu pavidalu. Pavyzdžiui, taip gali būti užrašytos hipotezės:

$$H_1 : (\theta_{j_1}, \ldots, \theta_{j_k}) = (\theta_{j_1 0}, \ldots, \theta_{j_k 0}), \quad H_2 : \theta_{j_1} = \cdots = \theta_{j_k}, \tag{4.6.12}$$

$$1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m.$$

Remiantis 3.5.6 teorema, kai hipotezė H teisinga ir modelis tenkina gana bendras reguliarumo sąlygas,

$$R_{TS} = -2\ln\frac{\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_0} L(\boldsymbol{\theta})}{\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}} L(\boldsymbol{\theta})} = -2\ln\frac{L(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)}{L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)} \xrightarrow{d} \chi^2(k). \tag{4.6.13}$$

Primename, kad $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ yra parametro $\boldsymbol{\theta}$ didžiausiojo tikėtinumo įvertinys, o $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n$ yra parametro $\boldsymbol{\theta}$ didžiausiojo tikėtinumo įvertinys, rastas, kai $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0$.

Taigi *tikėtinumų santykio kriterijaus*, kai reikšmingumo lygmuo α, kritinė sritis apibrėžiama taip:

$$K_{TS} = \{\mathbf{X} : R_{TS}(\mathbf{X}) > \chi^2_\alpha(k)\}. \tag{4.6.14}$$

Kai yra hipotezė $H_1 : (\theta_{j_1}, \ldots, \theta_{j_k}) = (\theta_{j_1 0}, \ldots, \theta_{j_k 0})$, sritis $\boldsymbol{G}$ yra $(m-k)$-matė (žr. 3.5.4 skyrelį). Tai akivaizdu, nes kai hipotezė teisinga, lieka $m-k$ nežinomų parametrų. Taigi ribinės chi kvadrato statistikos laisvės laipsnių skaičius lygus k. Hipotezės $H_2 : \theta_{j_1} = \cdots = \theta_{j_k}$ atveju sritis $\boldsymbol{G}$ yra $(m-k+1)$-matė, nes kai hipotezė teisinga, lieka $m-k+1$ nežinomų parametrų. Taigi ribinės chi kvadrato statistikos laisvės laipsnių skaičius $k-1$. Hipotezės $\theta_1 = \theta_2$ atveju laisvės laipsnių skaičius lygus 1.

Remdamiesi 3.5.5 išvada, kai tikrinama hipotezė $H_1 : (\theta_{j_1}, \ldots, \theta_{j_k}) = (\theta_{j_1 0}, \ldots, \theta_{j_k 0})$, gauname:

$$R_V = (\hat{\theta}_{j_1} - \theta_{j_1 0}, \ldots, \hat{\theta}_{j_k} - \theta_{j_k 0}) A^{-1}_{j_1 \ldots j_k}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)(\hat{\theta}_{j_1} - \theta_{j_1 0}, \ldots, \hat{\theta}_{j_k} - \theta_{j_k 0})^T \xrightarrow{d} \chi^2_k; \tag{4.6.15}$$

čia $A_{j_1 \ldots j_k}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)$ yra matricos $-\ddot{\ell}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)$ dalinė matrica, esanti $(j_1, \ldots, j_k)$-ųjų eilučių ir $(j_1, \ldots, j_k)$-ųjų stulpelių sankirtoje. Vietoje $-\ddot{\ell}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)$ galima imti ir $\boldsymbol{I}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)$, nuo to ribinis dėsnis nepakinta.

Taigi *asimptotinio Valdo kriterijaus*, kai reikšmingumo lygmuo α, kritinė sritis šiai hipotezei tikrinti apibrėžiama lygybe

$$K_V = \{\mathbf{X} : R_V(\mathbf{X}) > \chi^2_\alpha(k)\}, \tag{4.6.16}$$

Remiantis 3.5.6 išvada, kai hipotezė H teisinga ir išpidytos tos pačios sąlygos,

$$R_I = -\dot{\ell}^T(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)\ddot{\ell}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)\dot{\ell}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n) \xrightarrow{d} \chi^2_k. \tag{4.6.17}$$

Vietoje $-\ddot{\ell}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)$ galima imti ir $\boldsymbol{I}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)$, nes nuo to ribinis dėsnis nepakinta.

Taigi *asimptotinio informantinio kriterijaus*, kai reikšmingumo lygmuo α, kritinė sritis apibrėžiama lygybe

$$K_I = \{\mathbf{X} : R_I(\mathbf{X}) > \chi^2_\alpha(k)\}. \tag{4.6.18}$$

Remiantis 3.5.11 pastaba, kai tikrinama hipotezė $H_1 : (\theta_{j_1}, \ldots, \theta_{j_k}) = (\theta_{j_1 0}, \ldots, \theta_{j_k 0})$, statistika R_I užrašoma taip:

$$R_I = (\dot{\ell}_{j_1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n), \ldots, \dot{\ell}_{j_k}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)) A_{j_1 \ldots j_k}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)(\dot{\ell}_{j_1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n), \ldots, \dot{\ell}_{j_k}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n))^T,$$

čia $\dot{\ell}_i$ yra i-oji vektoriaus $\dot{\ell}$ komponentė.

4.6.3 pastaba. Visi nurodyti kriterijai yra asimptotiniai ir naudotini tik kai n dideli. Daugelio konkrečių hipotezių kriterijus pavyksta modifikuoti, įvedant papildomą daugiklį taip, kad modifikuotos statistikos konvergavimo greitis į ribinį chi kvadrato skirstinį būtų didesnis ir išvados būtų tikslesnės. Tai dažniausiai padaroma šitaip: jei pavyksta tikėtinumų santykio statistikos vidurkį (kuris, kai n baigtinis, dažniausiai nesutampa su chi kvadrato su k laisvės laipsnių vidurkiu k) užrašyti

$$\mathbf{E}_{\theta_0} R_{TS} = k(1 + \frac{a}{n} + \mathrm{O}(\frac{1}{\mathrm{n}^2})), \quad \mathrm{n} \to \infty,$$

čia a – konstanta, tai, apibrėžus $W = (1 - a/n)R_{TS}$, gaunama

$$\mathbf{E}_{\theta_0} W = k + \mathrm{O}(\frac{1}{\mathrm{n}^2}),$$

t. y. statistikos W vidurkis mažiau skiriasi nuo a. d. χ^2_k vidurkio. Statistikos W konvergavimo į ribinį dėsnį greitis paprastai didesnis už statistikos R_{TS}.

Galima aproksimuoti dar tiksliau, naudojantis išraiška

$$\mathbf{E}_{\theta_0}(R_{TS}) = k(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \mathrm{O}(\frac{1}{\mathrm{n}^3}))$$

ir imant statistiką $W_1 = (R_{TS} - \frac{ak}{n})(1 - \frac{b}{n^2})$. Tada

$$\mathbf{E}_{\theta_0} W_1 = k + \mathrm{O}(\frac{1}{\mathrm{n}^3}).$$

4.6.3 pavyzdys. *Tikėtinumų santykio, Valdo ir Bartleto kriterijai kelių normaliųjų imčių dispersijų lygybei tikrinti.* Tarkime, turime nepriklausomų atitinkamai didumų $n_1, ..., n_k$ imčių,

$$\mathbf{X}_i = (X_{i1}, ..., X_{in_i})^T, \quad i = 1, ..., k,$$

gautų stebint nepriklausomus normaliuosius a.d. $X_i \sim N(\mu_i,\ \sigma_i^2)$, $i = 1, ..., k$; bendras stebėjimų skaičius $n = n_1 + \cdots + n_k$.

Tikriname sudėtinę hipotezę

$$H : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2,$$

kai uždedama $k - 1$ apribojimų parametrams $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2 = \sigma^2$; čia σ^2 — bendra nežinoma dispersijos reikšmė.

Tikėtinumo funkcija

$$L(\mu_1, \ldots, \mu_k, \sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^k \sigma_i^{n_i}} \exp\left\{ - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(X_{ij} - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right\},$$

jos logaritmas

$$\ell = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k n_i \ln \sigma_i^2 - (n/2)\ln(2\pi) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(X_{ij} - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}$$

ir informantinio vektoriaus komponentės

$$\dot{\ell}_{\mu_i} = \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \mu_i) = \frac{n_i}{\sigma_i^2}(\bar{X}_i - \mu_i), \quad \dot{\ell}_{\sigma_i^2} = -\frac{n_i}{2\sigma_i^2} + \frac{1}{2\sigma_i^4} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \mu_i)^2.$$

Parametrų įvertiniai be apribojimų

$$\hat{\mu}_i = \bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, \ \ \hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2,$$

o besąlyginis didžiausio tikėtinumo funkcijos maksimumas

$$L(\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_k, \hat{\sigma}_1^2, \ldots, \hat{\sigma}_k^2) = (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^{k} (\hat{\sigma}_i^2)^{-n_i/2} \exp\{-\frac{n}{2}\}.$$

Kai hipotezė H teisinga, tikėtinumo funkcijoje visi σ_i^2 pakeičiami į σ^2. Gauname įvertinius

$$\tilde{\mu}_i = \hat{\mu}_i, \quad \tilde{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i \hat{\sigma}_i^2 / n$$

ir sąlyginį didžiausio tikėtinumo funkcijos maksimumą

$$L(\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_k, \tilde{\sigma}^2, \ldots, \tilde{\sigma}^2) = (2\pi)^{-n/2} (\tilde{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\{-\frac{n}{2}\}.$$

Tikėtinumų santykis

$$\Lambda = \frac{L(\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_k, \tilde{\sigma}^2, \ldots, \tilde{\sigma}^2)}{L(\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_k, \hat{\sigma}_1^2, \ldots, \hat{\sigma}_k^2)} = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\hat{\sigma}_i^2}{\tilde{\sigma}^2} \right)^{n_i/2}.$$

Taigi tikėtinumų santykio kriterijaus statistika

$$R_{TS} = -2 \ln \Lambda = n \ln \tilde{\sigma}^2 - \sum_{i=1}^{k} n_i \ln \hat{\sigma}_i^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i \ln \frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_i^2}.$$

Jeigu n_i dideli, tai hipotezė atmetama apytiksliu reikšmingumo lygmens α kriterijumi, jei $R_{TS} > \chi_\alpha^2(k-1)$.

Rasime informantinio kriterijaus statistiką. Gauname

$$\dot{\ell}_{\mu_i}(\tilde{\mu}_i, \tilde{\sigma}^2) = \frac{n_i}{\tilde{\sigma}^2} (\bar{X}_i - \tilde{\mu}_i) = 0, \tag{4.6.19}$$

$$\dot{\ell}_{\sigma_i^2}(\tilde{\mu}_i, \tilde{\sigma}^2) = -\frac{n_i}{2\tilde{\sigma}^2} + \frac{1}{2\tilde{\sigma}^4} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \tilde{\mu}_i)^2 = \frac{n_i}{2\tilde{\sigma}^4} (\hat{\sigma}_i^2 - \tilde{\sigma}^2).$$

Dauguma funkcijos $\ell(\mu_1, \ldots, \mu_k, \sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2)$ antrosios eilės mišriųjų išvestinių lygios nuliui. Nenulinės yra tiktai

$$\ddot{\ell}_{\mu_i^2} = -\frac{n_i}{\sigma_i^2}, \quad \ddot{\ell}_{\mu_i \sigma_i^2} = -\frac{n_i}{\sigma_i^4} (\bar{X}_i - \mu_i), \quad \ddot{\ell}_{(\sigma_i^2)^2} = \frac{n_i}{2\sigma_i^4} - \frac{1}{\sigma_i^6} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \mu_i)^2.$$

Informacinė matrica diagonali, nes

$$-\mathbf{E}\ddot{\ell}_{\mu_i^2} = \frac{n_i}{\sigma_i^2}, \quad -\mathbf{E}\ddot{\ell}_{\mu_i \sigma_i^2} = 0, \quad -\mathbf{E}\ddot{\ell}_{(\sigma_i^2)^2} = \frac{n_i}{2\sigma_i^4}.$$

Matrica $\boldsymbol{I}^{-1}(\tilde{\mu}_i, \tilde{\sigma}^2)$ diagonali, jos įstrižainės elementai yra

$$\frac{\tilde{\sigma}^2}{n_1}, \ldots, \frac{\tilde{\sigma}^2}{n_k}, \frac{2\tilde{\sigma}^4}{n_1}, \ldots, \frac{2\tilde{\sigma}^4}{n_k}.$$

Remiantis (4.6.19), informančių vektoriaus pirmosios k komponentės lygios nuliui. Taigi informantinio kriterijaus (4.6.17) statistika (naudojama informacinė matrica, nes ji paprasta) yra

$$R_I = \sum_{i=1}^{k} (\frac{n_i}{2\tilde{\sigma}^4} (\hat{\sigma}_i^2 - \tilde{\sigma}^2))^2 \frac{2\tilde{\sigma}^4}{n_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} n_i (\frac{\hat{\sigma}_i^2}{\tilde{\sigma}^2} - 1)^2.$$

Jeigu n_i dideli, tai hipotezė atmetama apytiksliu reikšmingumo lygmens α kriterijumi, jei $R_I > \chi_\alpha^2(k-1)$.

Modifikuosime statistiką $R_{TS} = \sum_{i=1}^{k} n_i \ln(\hat{\sigma}_i^2 / \tilde{\sigma}^2)$, atsižvelgdami į 4.6.3 pastabą. Žinome, kad dispersijos σ^2 didžiausio tikėtinumo įvertis $\hat{\sigma}^2$ yra paslinktasis. Nepaslinktąjį įvertinį s^2 gauname įvedę pataisą $s^2 = n\hat{\sigma}^2/(n-1)$. Todėl Bartletas pasiūlė iš dalies modifikuoti statistiką R_{TS}, įrašant joje nepaslinktuosius dispersijų įvertinius ir pakeičiant n_i į $\nu_i = n_i - 1$, o n į $\nu = n - k$. Taigi

$$\tilde{R}_{TS} = \nu \ln s^2 - \sum_{i=1}^{k} \nu_i \ln s_i^2.$$

Kai $n_i \to \infty$ ir hipotezė teisinga, statistikos $\tilde{R}_{TS}$ ir R_{TS} asimptotiškai turi tą patį chi kvadrato skirstinį su $k-1$ laisvės laipsniu.

Apskaičiuokime statistikos $\tilde{R}_{TS}$ vidurkį. Kai hipotezė H teisinga, tai kiekviena statistika $(\nu_i s_i^2)/2\sigma^2$ turi gama skirstinį $G(1,\ \nu_i/2)$, o statistika $(\nu s^2)/2\sigma^2$ – gama skirstinį $G(1,\ \nu/2)$. Jeigu turime a. d. $X \sim G(1,\ p)$, tai

$$\mathbf{E}(\ln(aX)) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \ln(ax) e^{-x} x^{p-1} dx = \ln a + \frac{d}{dp} \ln \Gamma(p).$$

Pritaikę gama funkcijos logaritmo skleidinį (žr. [1]), turėsime

$$\mathbf{E}(\ln(aX)) = \ln a + \ln p - \frac{1}{2p} - \frac{1}{12p^2} + \mathrm{O}(\frac{1}{\mathrm{p}^3})$$

ir

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\tilde{R}_{TS} &= \nu\{\ln \frac{2\sigma^2}{\nu} + \ln \frac{\nu}{2} - \frac{1}{\nu} - \frac{1}{3\nu^2} + \mathrm{O}(\frac{1}{\nu^3})\} \\ &- \sum_{j=1}^{k} \nu_j \{\ln \frac{2\sigma^2}{\nu_j} + \ln \frac{\nu_j}{2} - \frac{1}{\nu_j} - \frac{1}{3\nu_j^2} + \mathrm{O}(\frac{1}{\nu_{\mathrm{j}}^3})\} \\ &= -\nu\{\frac{1}{\nu} + \frac{1}{3\nu^2} + \mathrm{O}(\frac{1}{\nu^3})\} + \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{k}} \nu_{\mathrm{j}}\{\frac{1}{\nu_{\mathrm{j}}} + \frac{1}{3\nu_{\mathrm{j}}^2} + \mathrm{O}(\frac{1}{\nu_{\mathrm{j}}^3})\} \\ &= k - 1 + \frac{1}{3}(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\nu_j^2} - \frac{1}{\nu^2}) + \mathrm{O}(\min \frac{1}{\nu_{\mathrm{j}}^3}).\end{aligned}$$

Imame statistiką

$$W_1 = \tilde{R}_{TS}(1 - \frac{1}{3(k-1)}(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\nu_j^2} - \frac{1}{\nu^2})).$$

Kai hipotezė teisinga, tai

$$\mathbf{E}W_1 = k - 1 + \mathrm{O}(\min \frac{1}{\nu_{\mathrm{j}}^3}).$$

Jei n nėra labai didelis, statistikos W_1 skirstinys tiksliau aproksimuojamas $\chi^2(k-1)$ skirstiniu.

4.6.3. Asimptotinė kriterijų galia. Asimptotinis santykinis efektyvumas

Iš dviejų kriterijų, kurių reikšmingumo lygmuo tas pats, tikslesnis tas, kurio galia tolygiai didesnė. Tačiau dažnai pasitaiko, kad su vienomis alternatyvomis vieno kriterijaus galia didesnė už kito, o su kitomis alternatyvomis, atvirkščiai. Suprantama, kad informacija apie kriterijaus galią reikalinga, kad kiekvienu konkrečiu atveju būtų galima pasirinkti tinkamesnį kriterijų. Tačiau rasti kriterijaus galią dažnai sudėtinga. Todėl natūralu ieškoti skaitinių charakteristikų, kurios apibūdintų kriterijų tinkamumą ir leistų paprasčiau juos palyginti tarpusavyje. Aišku, tos charakteristikos turėtų būti asimptotinės, kai imties didumas auga.

Kai imties didumas neaprėžtai auga, pagrįstojo (praktiškai tik tokie ir taikomi) kriterijaus galia artėja prie 1 kiekvienai alternatyvoje nusakytai parametro reikšmei. Todėl kriterijų negalima apibūdinti jų galios riba. Tačiau, kad ir kokia didelė būtų imtis, atsiras alternatyvių parametrų reikšmių (galbūt labai artimų hipotezėje nusakomoms reikšmėms), su kuriomis kriterijaus galia bus mažesnė už vienetą. Taigi reikėtų tirti kriterijaus galios kitimą hipotezėje nurodytos parametro reikšmės aplinkoje, t. y. kitimą, kai imties didumas $n \to \infty$, o parametro reikšmė artėja prie hipotetinės.

4.6.4 pavyzdys. *Empirine mediana ir empiriniu vidurkiu grįstų kriterijų hipotezei apie vidurkio reikšmes tikrinti pagrįstumas ir asimptotinės galios funkcijos.* Tegu paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a.d. $X \sim N(\theta,\ \sigma^2)$. Tikriname hipotezę $H : \theta \leq \theta_0$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \theta > \theta_0$. TG kriterijus nerandomizuotas. Hipotezė atmetama, kai

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_0)}{s} > t_\alpha(n-1).$$

Kai parametro reikšmė $\theta > \theta_0$ fiksuota ir $n \to \infty$,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_0)}{s} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{s} + \frac{\sqrt{n}(\theta - \theta_0)}{s} \xrightarrow{P} \infty,$$

nes $s \xrightarrow{P} \sigma$, $\sqrt{n}(\theta - \theta_0) \to \infty$, $\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)/s \xrightarrow{d} Y \sim N(0,1)$. Be to, $t_\alpha(n-1) \to z_\alpha$. Taigi kriterijaus galia

$$\beta(\theta) = \mathbf{P}_\theta\{\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_0)}{s} > t_\alpha(n-1)\} \to 1.$$

Nagrinėkime kitą (asimptotinį) kriterijų, gautą remiantis empirine mediana $\tilde{X}$. Žinome, kad

$$\frac{\sqrt{n}(\tilde{X} - \theta_0)}{s\sqrt{\pi/2}} \xrightarrow{d} Y \sim N(0,1).$$

Nerandomizuotas asimptotinis reikšmingumo lygmens α kriterijus atmeta hipotezę, jei

$$\frac{\sqrt{n}(\tilde{X} - \theta_0)}{s\sqrt{\pi/2}} > z_\alpha.$$

Taške θ_0 šio kriterijaus galia $\tilde{\beta}(\theta_0) \to \alpha$. Visiškai analogiškai, kaip ir pirmojo kriterijaus, su kiekvienu fiksuotu $\theta > \theta_0$ galia $\tilde{\beta}(\theta) \to 1$.

Abu kriterijai pagrįsti. Kuris iš jų geresnis? Norint juos palyginti, vietoje fiksuotos alternatyvos $\theta > \theta_0$ nagrinėkime *artėjančių alternatyvų* seką

$$H_n:\ \theta_n = \theta_0 + \frac{h}{\sqrt{n}}, \quad h \geq 0.$$

Tada

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_0)}{s} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_n)}{s} + \frac{h}{s} \xrightarrow{d} Y \sim N(h/\sigma, 1). \tag{4.6.20}$$

Kriterijaus galia

$$\beta(\theta_n) \to \mathbf{P}_\theta(Y > z_\alpha) = 1 - \Phi(z_\alpha - h/\sigma).$$

Antrojo kriterijaus galia

$$\tilde{\beta}(\theta_n) \to 1 - \Phi(z_\alpha - \sqrt{2/\pi}\, h/\sigma).$$

Turime $\lim \beta(\theta_n) > \lim \tilde{\beta}(\theta_n)$ su visais $h > 0$. Vadinasi, pirmasis TG kriterijus asimptotiškai yra tolygiai galingesnis už antrąjį.

Apibendrindami tarkime, kad α lygmens kriterijus hipotezei $\theta \leq \theta_0$, kai alternatyva yra $\theta > \theta_0$, sudaromas naudojantis statistika T_n ir kritinė sritis yra

$$\frac{\sqrt{n}(T_n - \mu(\theta_0))}{\sigma(\theta_0)} > c_{n,\alpha}. \tag{4.6.21}$$

Tegu $H_n : \theta = \theta_n = \theta_0 + \frac{h}{\sqrt{n}}$ yra artėjančių alternatyvų seka ir

$$\frac{\sqrt{n}(T_n - \mu(\theta_n))}{\sigma(\theta_n)} \xrightarrow{d} Y \sim N(0,1). \tag{4.6.22}$$

Dažnai $\mu(\theta) = \mathbf{E}_\theta T_n$, $\sigma^2(\theta) = \boldsymbol{V}_\theta T_n$, bet nebūtinai. Ką tik 4.6.4 pavyzdyje nagrinėto pirmojo kriterijaus atveju imame $T_n = \bar{X}/s$. Tada iš (4.6.20) formulės išplaukia, kad

$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}-\theta_n}{s} - \frac{\theta_n - \theta_0}{\sigma}\right) = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}-\theta_n}{s}\right) - \frac{h}{\sigma} \xrightarrow{d} Y \sim N(0,1).$$

Šiuo atveju $\mu(\theta) = (\theta - \theta_0)/\sigma$, $\sigma(\theta) = 1$.

4.6.1 teorema. *Tarkime, kad su visais* $h \geq 0$ *teisinga (4.6.22) formulė. Be to, funkcija* μ *diferencijuojama, o funkcija* σ *tolydi taške* θ_0*. Tada, kai yra artėjančių alternatyvų seka, kriterijaus, nusakomo (4.6.21) kritine sritimi, galios funkcijos riba*

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n(\theta_n) = 1 - \Phi\left(z_\alpha - h\frac{\dot{\mu}(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)}\right).$$

Įrodymas. Ribinis reikšmingumo lygmuo yra α, todėl $c_{n,\alpha} \to z_\alpha$. Be to, $\sqrt{n}(\mu(\theta_n) - \mu(\theta_0)) \to \dot{\mu}(\theta_0)h$. Tada

$$\beta_n(\theta_n) = \mathbf{P}_{\theta_n}\{\frac{\sqrt{n}(T_n - \mu(\theta_0))}{\sigma(\theta_0)} > c_{n,\alpha}\}$$

$$= \mathbf{P}_{\theta_n}\{\frac{\sqrt{n}(T_n - \mu(\theta_n))}{\sigma(\theta_n)} > \frac{c_{n,\alpha}\sigma(\theta_0)}{\sigma(\theta_n)} - \frac{\sqrt{n}(\mu(\theta_n) - \mu(\theta_0))}{\sigma(\theta_n)}\} \to$$

$$\to 1 - \Phi\left(z_\alpha - h\frac{\dot{\mu}(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)}\right).$$

▲

4.6.4 pastaba. Fiksuotam θ imkime $h = \sqrt{n}(\theta - \theta_0)$. Kai n dideli, apytikslė galios funkcijos išraiška yra

$$\beta_n(\theta) \approx 1 - \Phi\left(z_\alpha - \sqrt{n}(\theta - \theta_0)\frac{\dot{\mu}(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)}\right). \tag{4.6.23}$$

4.6.5 pastaba. Tikėtinumų santykio, Valdo ir informantinio asimptotinių kriterijų galios funkcijų ribos, kai yra artėjančios alternatyvos, užrašomos ne normaliojo, o necentrinio chi kvadrato skirstinio terminais.

Tarkime, kad turime kelis (4.6.21) pavidalo kriterijus. Jų asimptotinį efektyvumą galima gauti, palyginus asimptotines galios funkcijas. Įvesime asimptotinio santykinio efektyvumo sąvoką, kuri taip pat vartojama asimptotiniam kriterijų efektyvumui palyginti.

Tarkime, kad turime parametro θ reikšmių seką $\theta_m \downarrow \theta_0$, kai $n \to \infty$. Fiksuokime reikšmingumo lygmenį $\alpha \in (0,1)$ ir $\gamma \in (\alpha, 1)$. Kiekvienam kriterijui ieškome tokio mažiausio imties didumo n_m, kad kriterijaus galia tenkintų sąlygą:

$$\beta_{n_m}(\theta_0) \leq \alpha, \quad \beta_{n_m}(\theta_m) \geq \gamma. \tag{4.6.24}$$

Tarkime, kad turime du kriterijus, kuriems šiomis formulėmis apibrėžtos imčių didumų sekos yra n_{1m} ir n_{2m}.

4.6.2 apibrėžimas. Jei egzistuoja riba

$$E_{12} = \lim_{m\to\infty} \frac{n_{2m}}{n_{1m}},$$

tai ji vadinama pirmojo kriterijaus *asimptotiniu santykiniu efektyvumu* (ASE) antrojo atžvilgiu.

Ši sąvoka ypač prasminga, kai riba nepriklauso nuo α,γ ir sekos θ_m parinkimo. Tada E_{12} parodo didelių imčių didumų, reikalingų užtikrinti tą pačią lyginamų kriterijų galią, santykį. Pateiksime gana bendras sąlygas, kuriomis taip yra.

4.6.2 teorema. *Tarkime, kad imties* $\mathbf{X}$ *tankis* $f(\boldsymbol{x}, \theta, \boldsymbol{\vartheta})$ σ*-baigtinio mato* μ *atžvilgiu yra toks, kad*

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\ f(\boldsymbol{x}, \theta, \boldsymbol{\vartheta}) - f(\boldsymbol{x}, \theta_0, \boldsymbol{\vartheta})\ |\ \mu(d\boldsymbol{x}) \to 0, \quad \textit{kai} \quad \theta \downarrow \theta_0,$$

su visais n. *Statistikos* T_{1n} *ir* T_{2n} *apibrėžia (4.6.21) kritines sritis ir su bet kuria seka* $\theta_n \downarrow \theta_0$ *teisinga (4.6.22) formulė, o funkcijos* $\mu_i(\theta)$ *ir* $\sigma_i(\theta)$ *tenkina 4.6.1 teoremos sąlygas ir* $\dot{\mu}_i(\theta_0) \neq 0$. *Tada asimptotinis santykinis efektyvumas* E_{12} *nepriklauso nuo* α, γ *ir sekos* θ_m *parinkimo ir*

$$E_{12} = \lim_{m\to\infty} \frac{n_{2m}}{n_{1m}} = \left(\frac{\dot{\mu}_1(\theta_0)/\sigma_1(\theta_0)}{\dot{\mu}_2(\theta_0)/\sigma_2(\theta_0)} \right)^2.$$

Įrodymas. Pirmiausia parodysime, kad $n_{im} \to \infty$, kai $m \to \infty$. Kriterijų galios tenkina (4.6.23) sąlygą, todėl kiekvieno iš jų galios funkcija $\beta_{n_m}(\theta)$ (kol kas indekso i nerašome) tenkina nelygybę

$$\beta_{n_m}(\theta_0) + 1 - \beta_{n_m}(\theta_m) \leq \alpha + 1 - \gamma < 1. \tag{4.6.25}$$

Jei K_n yra kritinė sritis, tai

$$\beta_{n_m}(\theta_0) + 1 - \beta_{n_m}(\theta_m) = 1 + \int_{K_n} (f(\boldsymbol{x}, \theta_0, \boldsymbol{\vartheta}) - f(\boldsymbol{x}, \theta_m, \boldsymbol{\vartheta}))\mu(d\boldsymbol{x})$$

$$\geq 1 + \int_{f(\boldsymbol{x},\theta_0,\boldsymbol{\vartheta}) - f(\boldsymbol{x},\theta_m,\boldsymbol{\vartheta}) < 0} (f(\boldsymbol{x}, \theta_0, \boldsymbol{\vartheta}) - f(\boldsymbol{x}, \theta_m, \boldsymbol{\vartheta}))\mu(d\boldsymbol{x})$$

$$= 1 + \int\limits_{f(\boldsymbol{x},\theta_0,\boldsymbol{\vartheta})+f(\boldsymbol{x},\theta_m,\boldsymbol{\vartheta})<0} \mid f(\boldsymbol{x},\theta_m,\boldsymbol{\vartheta}) - f(\boldsymbol{x},\theta_0,\boldsymbol{\vartheta}) \mid \mu(d\boldsymbol{x}) \to 1, \text{ kai } m \to \infty.$$

Todėl, paėmę bet kokį baigtinį $c > 0$, gauname

$$\min_{n_m \le c} (\beta_{n_m}(\theta_0) + 1 - \beta_{n_m}(\theta_m)) \to 1, \text{ kai } m \to \infty.$$

Iš čia išplaukia, kad jei (4.6.24) nelygybės tenkinamos su visais θ_m, tai $n_m \to \infty$.

Kadangi ribinis kriterijaus statistikos dėsnis yra normalusis, o n_m apibrėžiami kaip minimalūs stebėjimų skaičiai, kuriems užtikrinamas reikšmingumo lygmuo α ir galingumas, ne mažesnis kaip γ, tai $c_{n,\alpha} \to z_\alpha$, o $\beta_{n_m}(\theta_m) \to \gamma$. Todėl

$$\beta_{n_m}(\theta_m) = \mathbf{P}_{\theta_m}\{\frac{\sqrt{n_m}(T_{n_m} - \mu(\theta_0))}{\sigma(\theta_0)}) > c_{n_m,\alpha}\}$$

$$= \mathbf{P}_{\theta_m}\{\frac{\sqrt{n_m}(T_{n_m} - \mu(\theta_m))}{\sigma(\theta_m)} > \frac{c_{n_m,\alpha}\sigma(\theta_0)}{\sigma(\theta_m)} - \frac{\sqrt{n_m}(\mu(\theta_m) - \mu(\theta_0))}{\sigma(\theta_m)}\}$$

$$= \mathbf{P}_{\theta_m}\{\frac{\sqrt{n_m}(T_{n_m} - \mu(\theta_m))}{\sigma(\theta_m)} > z_\alpha + \mathrm{o}(1) - \frac{\sqrt{\mathrm{n_m}}(\theta_\mathrm{m} - \theta_0)\dot{\mu}(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)}(1 + \mathrm{o}(1))\} \to$$

$$\to \gamma = 1 - \Phi(z_\gamma), \quad \text{kai} \quad m \to \infty.$$

Tada

$$\frac{\sqrt{n_m}(\theta_m - \theta_0)\dot{\mu}(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)} \to z_\alpha - z_\gamma \quad \Longleftrightarrow \quad n_m(\theta_m - \theta_0)^2 \to \left(\frac{(z_\alpha - z_\gamma)\sigma(\theta_0)}{\dot{\mu}(\theta_0)}\right)^2.$$

Iš čia gaunamas teoremos teiginys.

▲

4.6.5 pavyzdys. *Empirine mediana grįsto kriterijaus asimptotinis santykinis efektyvumas empiriniu vidurkiu grįsto kriterijaus atžvilgiu.* Nagrinėto 5.6.4 pavyzdžio kriterijų, grindžiamų empiriniu vidurkiu ir empirine mediana, $\mu_1(\theta) = (\theta - \theta_0)/\sigma$, $\sigma_1(\theta) = 1$, $\mu_2(\theta) = (\theta - \theta_0)/\sqrt{\pi/2}\sigma$, $\sigma_2(\theta) = 1$, taigi $\dot{\mu}_1(\theta_0)/\sigma_1(\theta_0) = 1$, $\dot{\mu}_2(\theta_0)/\sigma_2(\theta_0) = \sqrt{2/\pi}$. Vadinasi,

$$E_{12} = (\sqrt{\pi/2})^2 > 1.$$

Taigi pirmasis kriterijus efektyvesnis. Kai imtys didelės, vietoje $\bar{X}$ imant empirinę medianą $\tilde{X}$ reikės apie $\pi/2 \approx 1,57$ karto didesnės imties, kad išvadų tikslumas būtų toks pat.

4.6.6 pastaba. Jei pirmosios išvestinės $\dot{\mu}(\theta_0) = 0$, tai ASE apibrėžimą reikia keisti naudojant mažiausios eilės nenulines išvestines.

4.6.7 pastaba. Keletą kitokių kriterijų palyginimo rodiklių galima rasti knygoje [15], 7a.7 skyrelyje.

4.7. Parametrinių hipotezių tikrinimo pavyzdžiai

Remdamiesi tuo, kas išdėstyta, pateiksime dažniausiai naudojamų modelių parametrinių hipotezių tikrinimo pavyzdžių.

Iš pradžių detaliau aptarsime parametrinių hipotezių apie normaliojo skirstinio parametrų reikšmes tikrinimo kriterijus. Normalusis skirstinys svarbus ne tik todėl, kad juo dažnai aprašomi stebimų a. d. skirstiniai, bet ir dėl to, kad daugelio statistikų, kuriais grindžiami kriterijai, skirstiniai aproksimuojami normaliuoju skirstiniu.

4.7.1. Vienmatis normalusis skirstinys

Tarkime, paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint normalųjį a. d. $X \sim N(\mu,\ \sigma^2),\ \ -\infty < \mu < +\infty,\ \sigma > 0$.

1. Hipotezių apie vidurkio reikšmes tikrinimas

a) *Dispersijos reikšmė žinoma.* Tegu parametrų kitimo sritis yra $-\infty < \mu < +\infty,\ \sigma = \sigma_0$. Tikrinkime hipotezę $H_1 : \mu = \mu_0$, kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : \mu > \mu_0$. Kadangi skirstinys priklauso vienparametrei eksponentinio tipo skirstinių šeimai, $T = \bar{X}$ yra pakankamoji statistika, tai egzistuoja (4.3.1) pavidalo TG kriterijus (žr. 4.2.4 pastabą). Reikšmingumo lygmens α kriterijaus kritinė sritis

$$K_1 = \{\mathbf{X} : Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0} > z_\alpha\}. \tag{4.7.1}$$

Kriterijaus galia

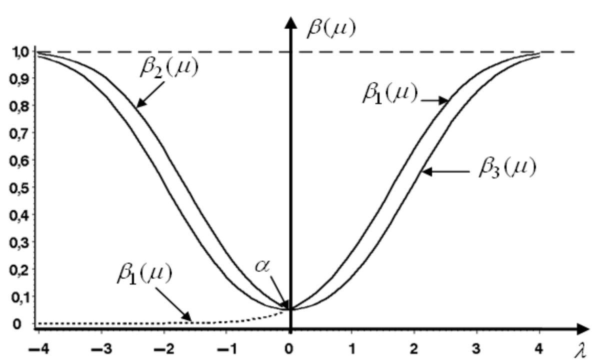
$$\beta_1(\mu) = \mathbf{P}_\mu\{\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0} > z_\alpha\} = \mathbf{P}_\mu\{\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_0} > z_\alpha - \lambda\}$$

$$= \Phi(\lambda - z_\alpha), \quad \lambda = \sqrt{n}\frac{\mu - \mu_0}{\sigma_0}. \tag{4.7.2}$$

Kriterijaus galios funkcija $\beta_1(\mu)$, argumentu imant λ, pavaizduota 4.7.1 paveiksle ($\alpha = 0,05$)

Tarkime, z yra statistikos Z realizacija. Tada P reikšmių terminais kriterijus (4.7.1) formuluojamas taip: hipotezė H atmetama lygmens α kriterijumi, kai

$$pv = \mathbf{P}_{\mu_0}\{Z > z\} = 1 - \Phi(z) < \alpha.$$



4.7.1 pav. Galios funkcijų pavyzdžiai

Kaip ir 4.2.1 pavyzdyje įsitikiname, kad, tikrinant hipotezę $H_2 : \mu = \mu_0$, kai alternatyva yra $\bar{H}_2 : \mu < \mu_0$, TG kriterijaus kritinė sritis yra

$$K_2 = \{\mathbf{X} : Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0} < -z_\alpha\}, \tag{4.7.3}$$

arba P reikšmių terminais, hipotezė atmetama, kai

$$pv = \Phi(z) < \alpha.$$

Šio kriterijaus galia

$$\beta_2(\mu) = \mathbf{P}_\mu\{\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0} < -z_\alpha\} = \Phi(-\lambda - z_\alpha) \tag{4.7.4}$$

monotoniškai artėja prie 1, kai $\mu - \mu_0 \to -\infty$ (žr. 4.7.1 pav.).

Palyginę (4.7.2) ir (4.7.4) kriterijų galias, matome, kad funkcija $\beta_2(\mu)$ simetrinė funkcijai $\beta_1(\mu)$ taško $\mu = \mu_0$ (arba $\lambda = 0$) atžvilgiu.

Tikrinant hipotezę $H_3 : \mu = \mu_0$, kai alternatyva $\bar{H}_3 : \mu \neq \mu_0$ yra dvipusė, tolygiai galingiausias kriterijus neegzistuoja. Jeigu šiai alternatyvai taikytume (4.7.2) kriterijų, tai galios funkcija $\beta_1(\mu)$, apibrėžta visiems $-\infty < \mu < \infty$, būtų mažesnė už reikšmingumo lygmenį, kai $\mu < \mu_0$ (žr. 4.7.1 pav. brūkšninė linija), t. y. kriterijus, kurio kritinė sritis (4.7.1), būtų paslinktasis. Apsiribojus nepaslinktaisiais kriterijais, TGN kriterijus pateiktas 4.3.1 pavyzdyje. Jo kritinė sritis

$$K_3 = \{\mathbf{X} : |Z| = \sqrt{n}\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\sigma_0} > z_{\alpha/2}\}, \tag{4.7.5}$$

o galios funkcija

$$\beta_3(\mu) = \Phi(-\lambda - z_{\alpha/2}) + \Phi(\lambda - z_{\alpha/2}) \tag{4.7.6}$$

artėja prie 1, kai $|\mu - \mu_0| \to \infty$ (arba $|\lambda| \to \infty$). TGN kriterijaus (4.7.5) galia $\beta_3(\mu)$, suprantama, yra mažesnė už TG kriterijų galią $\beta_1(\mu)$ arba $\beta_2(\mu)$ srityse, kuriose šios funkcijos apibrėžtos. Tai matyti iš 4.7.1 paveikslo.

Kriterijus (4.7.5) P reikšmių terminais formuluojamas taip: hipotezė atmetama, kai

$$pv = 2\min(\Phi(z), 1 - \Phi(z)) = 2(1 - \Phi(|z|)) < \alpha.$$

4.7.1 pastaba. Remiantis 4.5.3 skyrelio rezultatais galima tvirtinti, kad (4.7.1) ir (4.7.3) kriterijai yra TG ir sudėtinėms hipotezėms $H_1 : \mu \leq \mu_0$ arba $H_2 : \mu \geq \mu_0$ tikrinti, kai alternatyvos atitinkamai yra $\bar{H}_1 : \mu > \mu_0$ arba $\bar{H}_2 : \mu < \mu_0$.

4.7.2 pastaba. Pagal 4.5 skyrelio medžiagą, (4.7.1), (4.7.3) ir (4.7.5) kriterijus galima perrašyti pasikliovimo intervalų terminais. Būtent patekti į kritinę sritį K_1 yra ekvivalentu nelygybei $\mu_0 < \underline{\mu}$, o patekti į K_2 – nelygybei $\mu_0 > \overline{\mu}$; čia $\underline{\mu}$ ir $\overline{\mu}$ yra parametro μ pasikliovimo intervalo, kai pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - 2\alpha$, viršutinis ir apatinis rėžiai. Patekti į kritinę sritį K_3 ekvivalentu nelygybėms $\mu_0 < \underline{\mu}$ arba $\mu_0 > \overline{\mu}$, kai intervalo pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - \alpha$.

4.7.1 pavyzdys. *Hipotezės apie normaliojo skirstinio vidurkio reikšmes tikrinimas.* Tarkime, pagal didumo $n = 50$ paprastąją imtį, gautą stebint a. d. $X \sim N(\mu, 4)$, surasta empirinio vidurkio realizacija $\bar{X} = 1,51$. Reikia patikrinti hipotezę $H : \mu \le 1$, kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : \mu > 1$, o kriterijaus reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0,05$.

Remdamiesi (4.7.1) randame statistikos Z realizaciją

$$z = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - 1}{\sigma} = 1,803$$

ir palyginame ją su kritine reikšme $z_{0,05} = 1,645$. Kadangi Z realizacija z didesnė už 1,645, tai hipotezė H atmetama.

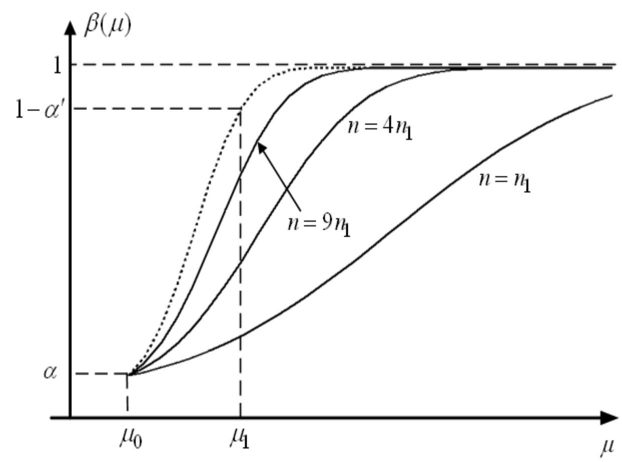
Kriterijų galime suformuluoti P reikšmių terminais. Randame P reikšmę $pv = 1 - \Phi(z) = 1 - \Phi(1,803) = 0,0357$. Kadangi P reikšmė mažesnė už reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0,05$, tai hipotezė atmetama.

Remiantis 4.5 skyreliu, kriterijų galima suformuluoti pasikliovimo intervalų terminais. Randame parametro μ pasikliovimo lygmens $Q = 1 - 2\alpha = 0,9$ pasikliovimo intervalą

$$(\underline{\mu};\ \overline{\mu}) = (\bar{X} - z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{X} + z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (1,045;\ 1,975).$$

Kadangi $\mu_0 = 1 < \underline{\mu} = 1,045$, t. y. pasikliovimo intervalas pasislinkęs į dešinę nuo hipotetinės reikšmės $\mu_0 = 1$, tai hipotezė H atmetama.

4.7.3 pastaba. Atkreipkime dėmesį į (4.7.2), (4.7.4) ir (4.7.6) formules – galia priklauso ne tik nuo alternatyvios parametro reikšmės, bet ir nuo imties didumo n. Jeigu kriterijus pagrįstasis, tai su kiekviena alternatyvia parametro reikšme jo galia artėja prie 1, kai $n \to \infty$. Kriterijaus (4.7.1) galios priklausomybė nuo imties didumo n grafiškai pavaizduota 4.7.2 paveiksle.



4.7.2 pav. Kriterijaus galios priklausomybė nuo imties didumo

Remiantis kriterijaus galios priklausomybe nuo imties didumo, galima taip planuoti eksperimentą, t. y. parinkti tokį imties didumą n, kad tas kriterijus turėtų reikiamą galią. Tuo įsitikinsime panagrinėję tokį pavyzdį.

4.7.2 pavyzdys. *Imties didumo parinkimas.* Remdamiesi (4.7.1) kriterijumi tikriname hipotezę $H_1 : \mu = \mu_0$, kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : \mu > \mu_0$. Iš galios pavidalo matome, kad jei skirtumas $\mu - \mu_0$ yra mažas, tai prireiks labai didelio n, kad neteisinga hipotezė būtų atmesta. Praktiškai tokio klaidingo sprendimo pasekmės gali būti nedidelės, palyginti su pasekmėmis, kai H_1 priimama tikrajai μ reikšmei daug skiriantis nuo μ_0. Sakykime, reikia parinkti tokį imties didumą n, kad tikimybė, jog hipotezė H_1 bus priimta, kai tikroji parametro reikšmė μ yra intervale $[\mu_1, \infty)$, būtų ne didesnė už α'. Tada, ieškant imties didumo, n atžvilgiu reikia išspręsti nelygybę (žr. 4.7.2 pav., brūkšninė linija)

$$\beta_1(\mu_1) = \Phi(\sqrt{n}\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0} - z_\alpha) \geq 1 - \alpha'.$$

Iš čia gauname, kad imties didumas n tenkina nelygybę

$$n \geq \frac{\sigma_0^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}(z_{\alpha'} + z_\alpha)^2. \tag{4.7.7}$$

Matome, kad imties didumas tiesiog proporcingas dispersijai ir atvirkščiai proporcingas atstumo $\mu_1 - \mu_0$ kvadratui.

4.7.3 pavyzdys. (**4.7.1** pavyzdžio tęsinys). *Imties didumo radimas.* Tarkime, kad 4.7.1 pavyzdžio sąlygomis reikia rasti tokį imties didumą, kad tikimybė atmesti hipotezę $H : \mu \leq 1$ būtų ne mažesnė už 0,99, kai tikroji parametro μ reikšmė tenkina nelygybę $\mu \geq 1,5$.

Remiantis (4.7.7) imties didumas n turi tenkinti nelygybę

$$n \geq \frac{\sigma_0^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}(z_\alpha + z_{\alpha'})^2 = \frac{4}{0,5^2}(z_{0,05} + z_{0,01})^2 = 252,33.$$

Taigi imties didumas turi būti ne mažesnis už 253.

b) *Dispersijos σ^2 reikšmė nežinoma.* Šiuo atveju stebimo a. d. skirstinys priklauso dviparametrių eksponentinio tipo skirstinių šeimai. Tikrinama hipotezė dėl vieno parametro reikšmių, o kitas parametras yra trukdantysis. Todėl reikia remtis 4.5.4 skyrelio medžiaga.

Hipotezių dėl vidurkio μ reikšmių tikrinimo kriterijų sudarymas detaliai išnagrinėtas 4.4.4 pavyzdyje.

Tikrinant hipotezę $H_1 : \mu = \mu_0$ (arba $\mu \leq \mu_0$), kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : \mu > \mu_0$, hipotezę $H_2 : \mu = \mu_0$ (arba $\mu \geq \mu_0$), kai alternatyva yra $\bar{H}_2 : \mu < \mu_0$, hipotezę $H_3 : \mu = \mu_0$, kai alternatyva $\bar{H}_3 : \mu \neq \mu_0$ yra dvipusė, egzistuoja TGN kriterijai, kurių kritinės sritys atitinkamai

$$K_1 = \{\mathbf{X} : \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{s} > t_\alpha(n-1)\},$$

$$K_2 = \{\mathbf{X} : \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{s} < -t_\alpha(n-1)\}, \tag{4.7.8}$$

$$K_3 = \{\mathbf{X} : \sqrt{n}\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{s} > t_{\alpha/2}(n-1)\}.$$

Jeigu tikroji parametro reikšmė yra $\mu \neq \mu_0$, tai a. d.

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{s} = \frac{\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} + \sqrt{n}\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}}{\sqrt{\frac{s^2}{\sigma^2}}}$$

$$= \frac{Z + \lambda}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\chi^2_{n-1}}} = t_{n-1;\lambda}$$

yra trupmena, kurios skaitiklyje $Z+\lambda \sim N(\lambda,\ 1)$, o vardiklyje pošaknyje nepriklausantis nuo skaitiklio a. d. χ^2_{n-1} padalytas iš savo laisvės laipsnių. Tokio santykio skirstinys vadinamas necentriniu Stjudento skirstiniu su $n-1$ laisvės laipsnių ir necentriškumo parametru $\lambda = \sqrt{n}(\mu-\mu_0)/\sigma$. Taigi (4.7.8) kriterijų galia išreiškiama necentrinio Stjudento skirstinio pasiskirstymo funkcija. Kai $\mu=\mu_0$, tai necentriškumo parametras 0 ir kriterijaus galia lygi α.

Kai $\lambda\to\infty$ hipotezės H_1 atveju, $\lambda\to-\infty$ hipotezės H_2 atveju arba $|\lambda|\to\infty$ hipotezės H_3 atveju, tai kriterijaus galia artėja prie 1.

Pavyzdyje 4.4.4 buvo pastebėta, kad kai n ir μ fiksuoti, o dispersija σ^2 didėja, kriterijaus galia artėja prie reikšmingumo lygmens, nes necentriškumo parametras $\lambda\to 0$.

Pažymėkime t statistikos $T=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/s$ realizaciją ir tegu $F(x|\nu)$ yra Stjudento skirstinio su ν laisvės laipsniais pasiskirstymo funkcija. Tada P reikšmių terminais kriterijai (4.7.8) formuluojami taip: hipotezės H_1, H_2, H_3 atmetamos, kai atitinkamai teisingos nelygybės

$$pv = 1-F(t|n-1)\le\alpha,\quad pv=F(t|n-1)\le\alpha,$$

$$pv = 2\min(1-F(t|n-1), F(t|n-1)) = 2(1-F(|t||n-1))\le\alpha.$$

4.7.4 pavyzdys.(*Hipotezės apie vidurkio reikšmę tikrinimas. Imties didumo parinkimas*) Tarkime, kad 4.7.1 pavyzdyje dispersija σ^2 nežinoma, o jos NMD įvertis $s^2=4$. a) Patikrinsime hipotezę $H:\mu\le 1$, kai alternatyva yra $\bar{H}_1:\mu>1$, o kriterijaus reikšmingumo lygmuo $\alpha=0,05$. b) Rasime tokį imties didumą, kad hipotezė H būtų atmesta su tikimybe, ne mažesne už 0,99, kai tikroji parametro μ reikšmė tenkina nelygybę $(\mu-1)/\sigma\ge 0,25$.

a) Remdamiesi (4.7.8) randame statistikos T realizaciją

$$t=\sqrt{n}\frac{\bar{X}-1}{s}=1,803$$

ir palyginame ją su kritine reikšme $t_{0,05}(49)=1,6766$. Kadangi T realizacija didesnė už 1,6766, tai hipotezė H atmetama. Randame P reikšmę $pv=1-F(1,803|49)=0,0388$. Kadangi P reikšmė $pv=0,0388$ yra mažesnė už reikšmingumo lygmenį $\alpha=0,05$, tai hipotezė atmetama.

b) Imties didumui rasti turime nelygybę

$$\mathbf{P}\{t_{n-1;\lambda}>t_\alpha(n-1)\}\ge 0,99,\quad \lambda=\sqrt{n}(\mu-\mu_0)/\sigma=\sqrt{n}/4.$$

Tegu $F(x|\nu;\lambda)=\mathbf{P}\{t_{\nu;\lambda}\le x\}$ yra necentrinio Stjudento skirstinio su ν laisvės laipsniais ir necentriškumo parametru λ pasiskirstymo funkcija. Tada reikia rasti mažiausiąjį sveiką skaičių n, tekinantį nelygybę

$$1-F(t_\alpha(n-1)|n-1;\sqrt{n}/4)\le 0,01.$$

Naudodami SAS arba SPSS paketus randame, kad $1-F(t_{0,05}(252)|252;\sqrt{253}/4)=0,01015>0,01$, o $1-F(t_{0,05}(253)|253;\sqrt{254}/4)=0,00993<0,01$. Taigi imties didumas n turi tenkinti nelygybę $n\ge 254$.

Kai nėra galimybės pasinaudoti kompiuteriu, apytiksliai reikalingą imties didumą galima rasti naudojant normaliąją aproksimaciją. Turime

$$\mathbf{P}\{t_{n-1;\lambda}>t_\alpha(n-1)\}=\mathbf{P}\{U>0\},\quad U=Z+\lambda-t_\alpha(n-1)\sqrt{\chi^2_{n-1}/(n-1)};$$

$$\mathbf{E}U\approx\lambda-t_\alpha(n-1),\quad \boldsymbol{V}U\approx 1+\frac{t^2_\alpha(n-1)}{2(n-1)}.$$

Apytiksliam imties didumui rasti turime nelygybę

$$\mathbf{P}\{U>0\}\approx 1-\Phi((t_\alpha(n-1)-\lambda)/\sqrt{1+t^2_\alpha(n-1)/(2(n-1))})\ge 0,99.$$

Iš čia gauname, kad imties didumas n tenkina nelygybę

$$n \geq 16\left[t_{0,05}(n-1)+t_{0,01}(n-1)\sqrt{1+t_{0,05}^2(n-1)/(2(n-1))}\right]^2 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 254.$$

Taigi aproksimacija normaliuoju skirstiniu šiame pavyzdyje yra gana tiksli.

2. Hipotezių apie dispersijos reikšmes tikrinimas

a) *Vidurkio μ reikšmė yra žinoma ir lygi μ_0.*

Imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ skirstinys priklauso vienparametrių eksponentinio tipo skirstinių šeimai (4.3.6), o tankis

$$f(\boldsymbol{x},\ \theta) = h(\boldsymbol{x})\exp\{\eta(\theta)T(\boldsymbol{x}) - b(\theta)\};$$

čia

$$\eta(\theta) = -\frac{1}{2\sigma^2}, \quad T(\boldsymbol{x}) = \sum_i (x_i-\mu_0)^2, \quad b(\theta) = \ln\sigma, \quad h(\boldsymbol{x}) = (\sqrt{2\pi})^{-n}.$$

Todėl, remiantis 4.3.1 teorema, egzistuoja TG kriterijus hipotezei $H_1 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ (arba $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$), kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$, tikrinti. Jo kritinė sritis

$$K_1 = \{\mathbf{X} : \frac{T(\mathbf{X})}{\sigma_0^2} > \chi^2_\alpha(n)\}. \tag{4.7.9}$$

Egzistuoja TG kriterijus hipotezei $H_2 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ (arba $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$), kai alternatyva yra $\bar{H}_2 : \sigma^2 < \sigma_0^2$, tikrinti. Kritinė sritis

$$K_2 = \{\mathbf{X} : \frac{T(\mathbf{X})}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha}(n)\}. \tag{4.7.10}$$

Pažymėkime y statistikos $Y = T(\mathbf{X})/\sigma_0^2$ realizaciją ir tegu $F(x|\nu)$ yra χ^2 skirstinio su ν laisvės laipsniais pasiskirstymo funkcija. Tada P reikšmių terminais kriterijai (4.7.9),(4.7.10) formuluojami taip: hipotezės H_1, H_2 atmetamos, kai atitinkamai teisingos nelygybės

$$pv = 1 - F(y|n-1) \leq \alpha, \quad pv = F(y|n-1) \leq \alpha.$$

Tikrinant hipotezę $H_3 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, kai alternatyva $\bar{H}_3 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ yra dvipusė, TG kriterijus neegzistuoja. Tačiau, naudojantis 4.3.2 teorema, galima rasti TGN kriterijų, kurio kritinė sritis

$$K_3 = \{\mathbf{X} : \frac{T(\mathbf{X})}{\sigma_0^2} < c_1 \quad \text{arba} \quad \frac{T(\mathbf{X})}{\sigma_0^2} > c_2\}; \tag{4.7.11}$$

čia konstantos c_1 ir c_2 randamos iš lygčių sistemos (žr. 4.4.2 pavyzdį)

$$\begin{cases} \mathbf{P}\{c_1 < \chi^2_n < c_2\} = 1-\alpha, \\ \mathbf{P}\{c_1 < \chi^2_{n+2} < c_2\} = 1-\alpha. \end{cases}$$

Kriterijų, apibrėžtų (4.7.9), (4.7.10) ir (4.7.11) formulėmis, galios funkcijos $\beta_1(\sigma^2), \beta_2(\sigma^2)$ ir $\beta_3(\sigma^2)$ išreiškiamos χ^2 skirstinio pasiskirstymo funkcija

$$\beta_1(\sigma^2) = \mathbf{P}_{\sigma^2}\{\frac{T(\mathbf{X})}{\sigma_0^2} > \chi^2_\alpha(n)\} = \mathbf{P}\{\chi^2_n > \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_\alpha(n)\},$$

$$\beta_2(\sigma^2) = \mathbf{P}\{\chi^2_n < \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi^2_{1-\alpha}(n)\}, \tag{4.7.12}$$

$$\beta_3(\sigma^2) = 1 - \mathbf{P}\{\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}c_1 < \chi^2_n < \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}c_2\}.$$

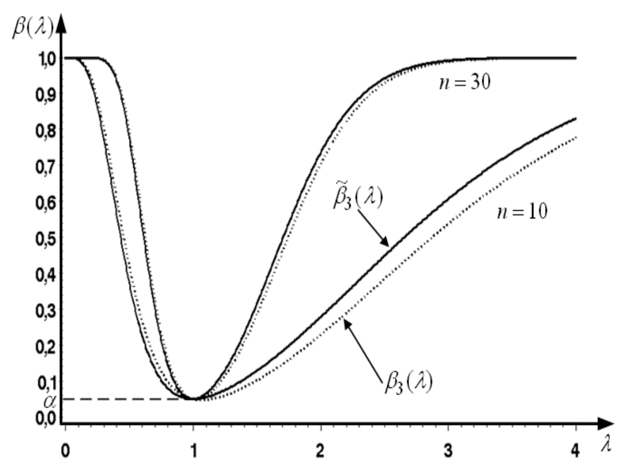
4.7.4 pastaba. Dažnai vietoje (4.7.11) kriterijaus taikomas paslinktasis, tačiau paprasčiau randamas simetrinis kriterijus, kurio kritinė sritis

$$\widetilde{K}_3 = \{\mathbf{X} : \frac{T(\mathbf{X})}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha/2}(n), \quad \text{arba} \quad \frac{T(\mathbf{X})}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\alpha/2}(n)\}. \tag{4.7.13}$$

P reikšmių terminais kriterijus formuluojamas taip: hipotezė H_3 atmetama, kai teisinga nelygybė

$$pv = 2\min(1 - F(y|n-1), F(y|n-1)) \le \alpha.$$

Šis kriterijus yra paslinktasis. Kai n dideli (4.7.11) ir (4.7.13) kriterijai mažai kuo skiriasi. Palyginti 4.7.3 paveiksle pavaizduoti šių kriterijų galios funkcijų $\beta_3(\sigma^2)$ ir $\widetilde{\beta}_3(\sigma^2)$ grafikai, kai imties didumas $n = 10$ ir $n = 30$, o argumentu imamas santykis $\lambda = \sigma_0^2/\sigma^2$, reikšmingumo lygmuo ($\alpha = 0,05$).



4.7.3 pav. TGN ir paslinktojo kriterijų galios funkcijos

b) *Vidurkio reikšmė nežinoma.* Imties skirstinys priklauso dviparametrei eksponentinio tipo skirstinių šeimai. Tikrinamos hipotezės dėl vieno parametro reikšmių, o kitas parametras yra trukdantysis.

TGN kriterijai pateikiami 4.4.2 pavyzdyje. Jų kritinės sritys nuo apibrėžtų (4.7.9), (4.7.10), (4.7.11) ir (4.7.13) formulėmis skiriasi tik tuo, kad vietoje kriterijaus statistikos $\sum_i (X_i - \mu_0)^2$ yra $\sum_i (X_i - \bar{X})^2$, o imties didumas n pakeistas $n-1$.

4.7.5 pavyzdys. *Imties didumo radimas.* Tarkime, didumo n paprastoji imtis gauta stebint a.d. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Tikrinama hipotezė $H : \sigma^2 \le \sigma_0^2$, kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$, o kriterijaus reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0,05$. Reikia rasti tokį imties didumą, kad hipotezė H būtų atmetama su tikimybe, ne mažesne už 0,9, kai tikroji parametro σ^2 reikšmė tenkina nelygybę $\sigma^2 \ge 1,5\sigma_0^2$.

Remdamiesi (4.7.12) formulėje pateikta galios funkcijos išraiška, imties didumui rasti turime nelygybę

$$\beta_1(\sigma^2) = \mathbf{P}\{\chi^2_{n-1} > \frac{2}{3}\chi^2_\alpha(n-1)\} \ge 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 105.$$

Apytiksliai imties didumą galime rasti naudodami a.d. χ^2_n aproksimavimą normaliuoju skirstiniu. Imties didumui rasti turime nelygybę

$$\beta_1(\sigma^2) \approx 1 - \Phi\left(\frac{2\chi^2_\alpha(n-1)/3 - (n-1)}{\sqrt{2(n-1)}}\right) \ge 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 102,8.$$

Taigi imties didumas turi būti ne mažesnis už 103. Aproksimacijos paklaida palyginti nedidelė.

4.7.2. Dviejų normaliųjų imčių parametrų palyginimo hipotezės

Tarkime, $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ ir $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_m)^T$ yra nepriklausomos imtys, gautos stebint n.a.d. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ir $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Jungtinės imties $(\mathbf{X}^T, \boldsymbol{Y}^T)^T$ tankis

$$f(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}; \boldsymbol{\theta}) = C\exp\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_i X_i^2 + \frac{\mu_1}{\sigma_1^2}\sum_i X_i - \frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_i Y_i^2 + \frac{\mu_2}{\sigma_2^2}\sum_i Y_i - b(\boldsymbol{\theta})\} \tag{4.7.14}$$

priklauso keturparametrių eksponentinio tipo skirstinių šeimai, parametras $\boldsymbol{\theta} = (\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1,\ \sigma_2)^T, -\infty < \mu_1,\ \mu_2 < \infty,\ \ 0 < \sigma_1,\ \sigma_2 < \infty,\ C = (2\pi)^{-(m+n)/2}$.

1. Vidurkių palyginimo hipotezės. Sakykime, reikia patikrinti hipotezes $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \le \beta_0$ (arba $\mu_1 - \mu_2 = \beta_0$), $H_2 : \mu_1 - \mu_2 \ge \beta_0$ (arba $\mu_1 - \mu_2 = \beta_0$) ir $H_3 : \mu_1 - \mu_2 = \beta_0$, kai alternatyvos atitinkamai yra $\overline{H}_1 : \mu_1 - \mu_2 > \beta_0$, $\overline{H}_2 : \mu_1 - \mu_2 < \beta_0$ ir $\overline{H}_3 : \mu_1 - \mu_2 \ne \beta_0$. Skirsime keletą atvejų.

a) *Dispersijų σ_1^2 ir σ_2^2 reikšmės yra žinomos ir lygios atitinkamai σ_{10}^2 ir σ_{20}^2.* Tada (4.7.14) tankis priklauso tik nuo dviejų parametrų μ_1 ir μ_2. Pertvarkykime jį taip, kad išsiskirtų parametras $\mu_1 - \mu_2 - \beta_0$ ir tankis įgytų (4.4.2) pavidalą:

$$f(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}; \theta, \vartheta) = \exp\{\theta U(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}) + \vartheta T(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}) - B(\theta, \vartheta)\},$$

$$\theta = \frac{(\mu_1 - \mu_2 - \beta_0)mn}{m\sigma_{10}^2 + n\sigma_{20}^2}, \quad \vartheta = \frac{n\sigma_{20}^2(\mu_1 - \beta_0) + m\sigma_{10}^2\mu_2}{m\sigma_{10}^2 + n\sigma_{20}^2},$$

$$U = U(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}) = \bar{X} - \bar{Y}, \quad T = T(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}) = \frac{n}{\sigma_{10}^2}\bar{X} + \frac{m}{\sigma_{20}^2}\bar{Y}.$$

Kadangi statistikos

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y} - \beta_0)\sqrt{mn}}{\sqrt{m\sigma_{10}^2 + n\sigma_{20}^2}}$$

skirstinys, kai $\mu_1 - \mu_2 = \beta_0$, yra $N(0,\ 1)$ ir nepriklauso nuo ϑ, tai jis nepriklauso ir nuo T (žr. 4.4.4 teoremą). Remiantis 4.4.3 teorema, egzistuoja TGN kriterijai dėl parametro θ (kartu dėl skirtumo $\mu_1 - \mu_2$) reikšmių, kai yra vienpusės ar dvipusė alternatyvos. Kadangi Z yra monotoniškai didėjanti ir tiesinė pagal U, tai nagrinėjamų hipotezių tikrinimo kriterijų kritinės sritys yra

$$K_1 = \{(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}) : Z > z_\alpha\}, \quad K_2 = \{(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}) : Z < -z_\alpha\},$$

$$K_3 = \{(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}) : |Z| > z_{\alpha/2}\}. \tag{4.7.15}$$

Kriterijų galios funkcijos išreiškiamos standartinio normaliojo skirstinio pasiskirstymo funkcija $\Phi(x)$ (žr. (4.7.2), (4.7.4) ir (4.7.6) formules).

Pažymėkime z statistikos Z realizaciją. Tada P reikšmių terminais kriterijai (4.7.15) formuluojami taip: hipotezės H_1, H_2, H_3 atmetamos, kai atitinkamai teisingos nelygybės

$$pv = 1 - \Phi(z) \le \alpha, \quad pv = \Phi(z) \le \alpha,$$

$$pv = 2\min(1 - \Phi(z), \Phi(z)) = 2(1 - \Phi(|z|)) \le \alpha.$$

b) *Dispersijų reikšmės nežinomos, tačiau žinoma, kad jos vienodos* $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Tankis, apibrėžiamas (4.7.14) lygybe, priklauso nuo trijų parametrų – $\mu_1,\ \mu_2$ ir σ^2. Pertvarkykime (4.7.14) tankį taip, kad išsiskirtų dominantis parametras $\mu_1 - \mu_2 - \beta_0$:

$$f(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}; \theta, \vartheta) = \exp\{\theta U + \vartheta_1 T_1 + \vartheta_2 T_2 - B(\theta, \vartheta_1, \vartheta_2)\},$$

$$U = \bar{X} - \bar{Y}, \quad T_1 = n\bar{X} + m\bar{Y}, \quad T_2 = \sum_i X_i^2 + \sum_i Y_i^2,$$

$$\theta = \frac{(\mu_1 - \mu_2 - \beta_0)mn}{(m+n)\sigma^2}, \quad \vartheta_1 = \frac{n(\mu_1 - \beta_0) + m\mu_2}{(m+n)\sigma^2}, \quad \vartheta_2 = -\frac{1}{2\sigma^2}.$$

Nagrinėkime statistiką

$$V = V(U, T_1, T_2) = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \beta_0}{\sqrt{\sum_i (X_i - \bar{X})^2 + \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2}} = \frac{U - \beta_0}{\sqrt{T_2 - \frac{1}{m+n}T_1^2 - \frac{mn}{m+n}U^2}}.$$

Funkcija V yra monotoniškai didėjanti pagal U. Be to, jos skirstinys, kai $\theta = 0$, nepriklauso nuo parametrų μ_1, μ_2, σ (kartu nuo T_1, T_2; žr. 4.4.4 teoremą). Tuo įsitikinti galima pažymėjus, kad V reikšmė nepakinta, kai X_i pakeičiama į $(X_i - \mu_1)/\sigma$ ir Y_i pakeičiama į $(Y_i - \mu_2)/\sigma$.

Remiantis 4.4.3 teorema, egzistuoja TGN kriterijus hipotezei $H_1 : \theta \le 0$ (arba $\mu_1 - \mu_2 \le \beta_0$), kai alternatyva yra $\overline{H}_1 : \theta > 0$, tikrinti. Jo kritinė sritis yra $V \ge c_1$, arba ekvivalenčia forma

$$T \ge c_1', \tag{4.7.16}$$

$$T = V\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-\beta_0}{\sqrt{s_1^2(n-1)+s_2^2(m-1)}}\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}};$$

čia s_1^2 ir s_2^2 yra nepasliktieji dispersijos σ^2 įvertiniai, sudaryti pagal imtį $\mathbf{X}$ ir imtį $\boldsymbol{Y}$. Kadangi statistikos T skirstinys, kai $\mu_1 - \mu_2 = \beta_0$, yra Stjudento su $m+n-2$ laisvės laipsnių, tai hipotezės H_1 TGN kriterijaus kritinė sritis yra

$$K_1 = \{(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}) : T > t_\alpha(m+n-2)\}. \tag{4.7.17}$$

Analogiškai tikrinant hipotezę $H_2 : \mu_1 - \mu_2 \geq \beta_0$ (arba $\mu_1 - \mu_2 = \beta_0$), kai alternatyva yra $\overline{H}_2 : \mu_1 - \mu_2 < \beta_0$, TGN kriterijaus kritinė sritis yra

$$K_2 = \{(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}) : T < -t_\alpha(m+n-2)\}. \tag{4.7.18}$$

Tikrinant hipotezę $H_3 : \theta = 0$ (arba $\mu_1 - \mu_2 = \beta_0$), kai alternatyva $\overline{H}_3 : \theta \neq 0$ yra dvipusė, tiesiogiai pritaikyti 4.4.3 teoremos negalima, nes V nėra tiesinė U funkcija. Todėl, kaip ir 4.4.4 pavyzdyje, imame funkciją

$$W = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-\beta_0}{\sqrt{\sum_i X_i^2 + \sum_i Y_i^2 - \frac{1}{m+n}(\sum_i X_i + \sum_i Y_i)^2}} = \frac{U}{\sqrt{T_2 - \frac{1}{m+n}T_1^2}},$$

kuri tiesiškai priklauso nuo U. Kadangi W ir V susieti lygybe

$$V = \frac{W}{\sqrt{1 - \frac{mn}{m+n}W^2}},$$

tai W skirstinys, kai $\theta = 0$, taip pat nepriklauso nuo $T_1,\ T_2$. Be to, W skirstinys, kai $\theta = 0$, yra simetrinis taško $\theta = 0$ atžvilgiu, todėl, remiantis 4.4.3 teorema, TGN kriterijaus kritinė sritis yra

$$|W| > c.$$

Funkcija $|V|$ yra monotoniškai didėjanti pagal W. Todėl šią kritinę sritį galima perrašyti $|V|$ (kartu ir $|T|$) terminais. Gauname kritinę sritį

$$K_3 = \{(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}) : |T| > t_{\alpha/2}(m+n-2)\}. \tag{4.7.19}$$

Kaip ir 4.7.1 skyrelyje, (4.7.17), (4.7.18) ir (4.7.19) kriterijų galia išreiškiama necentrinio Stjudento skirstinio su $m+n-2$ laisvės laipsnių ir necentriškumo parametru

$$\delta = \frac{(\mu_1 - \mu_2 - \beta_0)\sqrt{mn}}{\sigma\sqrt{m+n}}$$

pasiskirstymo funkcija.

Pažymėkime t statistikos T realizaciją ir tegu $F(x|\nu)$ yra Stjudento skirstinio su ν laisvės laipsniais pasiskirstymo funkcija. Tada P reikšmių terminais kriterijai (4.7.17), (4.7.18), (4.7.19) formuluojami taip: hipotezės H_1, H_2, H_3 atmetamos, kai atitinkamai teisingos nelygybės

$$pv = 1 - F(t|m+n-2) \le \alpha, \quad pv = F(t|m+n-2) \le \alpha,$$

$$pv = 2\min(1 - F(t|m+n-2), F(t|m+n-2)) = 2(1 - F(|t||m+n-2)) \le \alpha.$$

c) *Dispersijos σ_1^2 ir σ_2^2 nežinomos.* Šeimos (4.7.14), kai visi keturi parametrai $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ nežinomi, pakankamoji statistika $T = (\sum_i X_i, \sum_i Y_i, \sum_i X_i^2, \sum_i Y_i^2)$ yra pilnoji. Tačiau, jeigu tartume, kad teisinga hipotezė $H : \mu_1 - \mu_2 = \beta_0$, tai liktų trys parametrai $\sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \mu = \mu_2 = \mu_1 - \beta_0$, o pakankamoji statistika būtų keturmatė. Gauta tikimybinių skirstinių šeima nėra pilnoji. Kad tuo įsitikintume, pakanka imti funkciją $\bar{X} - \bar{Y} - \beta_0$, kurios vidurkis tapačiai lygus 0, o pati funkcija nėra lygi 0. Taigi dviejų nepriklausomų normaliųjų imčių vidurkių palyginimo hipotezėms tikrinti, kai abi dispersijos nežinomos (Berenso ir Fišerio problema), 4.5.4 skyrelio metodika netinka. Įrodyta, kad reguliariųjų funkcijų klasėje neegzistuoja priklausanti nuo $\bar{X}, \bar{Y}, s_1^2, s_2^2$ ir $\mu_1 - \mu_2$ funkcija, kurios skirstinys nuo nežinomųjų parametrų nepriklausytų. Taigi tikslūs vidurkių palyginimo hipotezių tikrinimo kriterijai neegzistuoja. Tenka apsiriboti apytiksliais pasikliovimo intervalais arba naudoti kitokią statistiką, prarandant dalį informacijos (žr. 4.7.3 skyrelį).

Jeigu imtys pakankamai didelės, tai apytikslius kriterijus galime sudaryti remdamiesi tuo, kad asimptotiškai, kai $m \to \infty$, $n \to \infty$, statistika

$$Z_{mn} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y} - \beta_0)\sqrt{mn}}{\sqrt{ms_1^2 + ns_2^2}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,\ 1).$$

Asimptotiniai hipotezių H_1, H_2, H_3 tikrinimo kriterijai formuluojami taip: hipotezės atmetamos, kai atitinkamai teisingos nelygybės

$$Z_{mn} \ge z_\alpha, \quad Z_{mn} \le -z_\alpha, \quad |Z_{mn}| \ge z_{\alpha/2}, \tag{4.7.20}$$

arba, pažymėjus z_{mn} statistikos Z_{mn} realizaciją, asimptotinių P reikšmių pv_a terminais, kai atitinkamai teisingos nelygybės

$$pv_a = 1 - \Phi(z_{mn}) \le \alpha, \quad pv_a = \Phi(z_{mn}) \le \alpha, \quad pv_a = 2(1 - \Phi(|z_{mn}|)) \le \alpha.$$

Kai imtys nėra didelės, tai stengiamasi modifikuoti statistiką Z_{mn} taip, kad jos kritinių reikšmių priklausomumas nuo nežinomų parametrų σ_1 ir σ_2 turėtų mažą įtaką išvadų tikslumui. Viena iš tokių modifikacijų yra vadinamasis Velšo santykis

$$\frac{Z_{mn}}{V(c, \nu_1, \nu_2, \alpha)}, \quad c = \frac{ms_1^2}{ms_1^2 + ns_2^2}, \quad \nu_1 = n - 1, \quad \nu_2 = m - 1.$$

Funkcija $V = V(c, \nu_1, \nu_2, \alpha)$ parenkama taip, kad visiems teigiamiems σ_1, σ_2 galiotų apytikslė lygybė

$$\mathbf{P}\{Z_{mn} > V(c, \nu_1, \nu_2, \alpha)|\sigma_1, \sigma_2\} \approx \alpha.$$

Tada, tikrinant hipotezę $H : \mu_1 - \mu_2 = \beta_0$, kai yra vienpusės ar dvipusė alternatyva, kritinės sritys yra

$$\begin{aligned} K_1 &= \{(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}) : Z_{mn} > V(c, \nu_1, \nu_2, \alpha)\}, \\ K_2 &= \{(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}) : Z_{mn} < -V(c, \nu_1, \nu_2, \alpha)\}, \\ K_3 &= \{(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}) : |Z_{mn}| > V(c, \nu_1, \nu_2, \alpha/2)\}. \end{aligned} \tag{4.7.21}$$

Funkcijos V reikšmių lenteles galima rasti knygoje [5]. Be to, atliekant skaičiavimus matematinės statistikos programų paketais, tokia statistikos Z_{mn} modifikacija yra numatyta. Pavyzdžiui, atliekant skaičiavimus su SAS paketu [13], reikia nurodyti, ar turima informacijos apie dispersijų lygybę. Jeigu nurodoma, kad dispersijos vienodos, tai naudojami (4.7.17), (4.7.18) ir (4.7.19) kriterijai. Jeigu nurodoma, kad dispersijos nežinomos, tai naudojamas modifikuotas kriterijus.

2. Dispersijų palyginimo hipotezės. Sakykime, reikia patikrinti hipotezes $H_1 : \sigma_1^2 \leq k\sigma_2^2$ (arba $\sigma_1^2 = k\sigma_2^2$), $H_2 : \sigma_1^2 \geq k\sigma_2^2$ (arba $\sigma_1^2 = k\sigma_2^2$), $H_3 : \sigma_1^2 = k\sigma_2^2$, kai alternatyvos atitinkamai yra $\bar{H}_1 : \sigma_1^2 > k\sigma_2^2$, $\bar{H}_2 : \sigma_1^2 < k\sigma_2^2$, $\bar{H}_3 : \sigma_1^2 \neq k\sigma_2^2$.

Skirstinių (5.7.14) tankį pertvarkykime taip:

$$f(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}; \theta, \vartheta) = \exp\{\theta \mathbf{U} + \boldsymbol{\vartheta_1} \mathbf{T_1} + \boldsymbol{\vartheta_2} \mathbf{T_2} + \boldsymbol{\vartheta_3} \mathbf{T_3} - \mathbf{B}(\theta, \vartheta)\},$$

$$\theta = -\frac{1}{2\sigma_2^2} + \frac{k}{2k\sigma_1^2}, \quad \vartheta_1 = -\frac{1}{2\sigma_1^2}, \quad \vartheta_2 = \frac{n\mu_1}{\sigma_1^2}, \quad \vartheta_3 = \frac{n\mu_2}{\sigma_2^2},$$

$$U = \sum_i Y_i^2, \quad T_1 = \sum_i X_i^2 + k\sum_i Y_i^2, \quad T_2 = \bar{X}, \quad T_3 = \bar{Y}.$$

Nagrinėkime šių statistikų funkciją

$$F = \frac{(m-1)\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{k(n-1)\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{s_1^2}{ks_2^2} = \frac{(m-1)(T_1 - kU - nT_2^2)}{k(n-1)(U - nT_3^2)},$$

kuri monotoninė pagal U. Jos skirstinys, kai $\theta = 0$ (t. y. $\sigma_1^2 = k\sigma_2^2$), yra Fišerio skirstinys su $n-1$ ir $m-1$ laisvės laipsnių. Taigi F skirstinys, kai $\theta = 0$, nepriklauso nuo parametrų $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, o kartu nuo statistikų T_1, T_2, T_3 (žr. 4.4.4 teoremą). Remiantis 4.4.3 teorema, egzistuoja TGN kriterijai hipotezėms $H_1 : \theta \leq 0$ ir $H_2 : \theta \geq 0$ (jos ekvivalenčios hipotezėms $H_1 : \sigma_1^2 \leq k\sigma_2^2$ ir $H_2 : \sigma_1^2 \geq k\sigma_2^2$), kai alternatyvos yra vienpusės, tikrinti. Jų kritinės sritys yra

$$\begin{aligned} K_1 &= \{(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}) : F > F_\alpha(n-1, m-1)\}, \\ K_2 &= \{(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}) : F < F_{1-\alpha}(n-1, m-1)\}; \end{aligned} \tag{4.7.22}$$

čia $F_\alpha(\nu_1,\ \nu_2)$ yra Fišerio skirstinio su ν_1 ir ν_2 laisvės laipsnių α kritinė reikšmė.

Pažymėkime f statistikos F realizaciją. Tada P reikšmių terminais kriterijai (4.7.22) formuluojami taip: hipotezės H_1, H_2 atmetamos, kai atitinkamai teisingos nelygybės

$$pv = 1 - \mathbf{P}\{F_{n-1,m-1} \geq f\} \leq \alpha, \quad pv = \mathbf{P}\{F_{n-1,m-1} \leq f\} \leq \alpha.$$

Kriterijų (4.7.22) galia išreiškiama Fišerio skirstinio pasiskirstymo funkcija, kai jos argumentas priklauso nuo dispersijų santykio $\lambda = \sigma_1^2/\sigma_2^2$:

$$\beta_1(\lambda) = \mathbf{P}\{F_{n-1,m-1} > \frac{k}{\lambda} F_\alpha(n-1, m-1)\}, \quad \lambda > k,$$

$$\beta_2(\lambda) = \mathbf{P}\{F_{n-1,m-1} < \frac{k}{\lambda} F_{1-\alpha}(n-1, m-1)\}, \quad \lambda < k. \tag{4.7.23}$$

Tikrinant hipotezę $H_3 : \theta = 0$ (arba $H_3 : \sigma_1^2 = k\sigma_2^2$), kai alternatyva $\bar{H}_3 : \theta \neq 0$ yra dvipusė, tiesiogiai pritaikyti 4.4.3 teoremos negalima, nes F nėra tiesinė U funkcija. Apibrėžkime statistiką W lygybe

$$W = \frac{(n-1)F}{m-1+(n-1)F} = \frac{T_1 - kU - nT_2^2}{(T_1 - nT_2^2 - knT_3^2)}.$$

Statistika W yra tiesinė pagal U. Kadangi ji išreiškiama per F, tai jos skirstinys, kai $\theta = 0$, taip pat nepriklauso nuo T_1, T_2, T_3. Remiantis 4.4.3 teorema, hipotezė H_3 atmetama, kai

$$W < c_1' \quad \text{arba} \quad W > c_2'.$$

Funkcija W yra monotoniškai didėjanti pagal F, kai $0 < F < \infty$. Todėl kritinę sritį galime perrašyti statistikos F terminais:

$$F < c_1, \quad \text{arba} \quad F > c_2. \tag{4.7.24}$$

Konstantos c_1 ir c_2 randamos iš sąlygų

$$\mathbf{E}(\varphi(F)|\sigma_1^2 = k\sigma_2^2) = \mathbf{P}\{F_{n-1,m-1} < c_1\} + \mathbf{P}\{F_{n-1,m-1} > c_2\} = \alpha,$$

$$\mathbf{E}(F\varphi(F)|\sigma_1^2 = k\sigma_2^2) = \alpha \mathbf{E}(F|\sigma_1^2 = k\sigma_2^2).$$

Tada

$$\mathbf{E}(F|\sigma_1^2 = k\sigma_2^2) = \mathbf{E}(F_{n-1,m-1}) = \frac{m-1}{m-3},$$

$$\mathbf{E}(F\varphi(F)|\sigma_1^2 = k\sigma_2^2) = \frac{m-1}{m-3}[\mathbf{P}\{F_{n+1,m-3} < c_1\} + \mathbf{P}\{F_{n+1,m-3} > c_2\}].$$

Lygčių sistema parametrams c_1 ir c_2 rasti gali būti užrašyta taip:

$$\begin{cases} \mathbf{P}\{c_1 < F_{n-1,m-1} < c_2\} = 1 - \alpha, \\ \mathbf{P}\{c_1 < F_{n+1,m-3} < c_2\} = 1 - \alpha. \end{cases}$$

4.7.5 pastaba. Praktiškai vietoje (4.7.24) TGN kriterijaus dažnai naudojamas paslinktasis, tačiau paprasčiau randamas simetrinis kriterijus, kurio kritinė sritis

$$\widetilde{K}_3 = \{(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}) : F < F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1), \text{ arba } F > F_{\alpha/2}(n-1, m-1)\}, \tag{4.7.25}$$

P reikšmių terminais kriterijus formuluojamas taip: hipotezė H_3 atmetama, kai teisinga nelygybė

$$pv = 2\min(1 - \mathbf{P}\{F_{n-1,m-1} \leq f\}, \mathbf{P}\{F_{n-1,m-1} \geq f\}) \leq \alpha.$$

4.7.6 pavyzdys. *Dviejų normaliųjų skirstinių parametrų palyginimo hipotezės.* Tarkime, pagal didumo $n_1 = 20$ ir $n_2 = 25$ nepriklausomas paprastąsias imtis, gautas stebint a. d. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ir $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, apskaičiuotos parametrų NMD įvertinių realizacijos: $\bar{X} = 10,98$; $\bar{Y} = 9,65$; $s_1^2 = 4,25$; $s_2^2 = 6,32$. Reikšmingumo lygmens $\alpha = 0,05$ kriterijais patikrinsime hipotezes a) $H : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, kai alternatyva yra $\bar{H}_3 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$; b) $H : \mu_1 = \mu_2$, kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : \mu_1 > \mu_2$.

a) Remiantis (4.7.25) hipotezė H atmetama, kai

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{1-\alpha/2}(19,\ 24) = 0,4078, \quad \text{arba} \quad F > F_{\alpha/2}(19,\ 24) = 2,3451.$$

Kadangi statistika F įgijo reikšmę 4,25/6,32 = 0,6725, tai hipotezė neatmetama.

Kriterijų formuluojant P reikšmių terminais, hipotezė atmetama, kai $pv = 2\min(\mathbf{P}\{F_{19;24} < 0,6725\}, 1 - \mathbf{P}\{F_{19;24} > 0,6725\}) = 0,3808$ yra mažesnė už reikšmingumo lygmenį 0,05. Hipotezė neatmetama.

Remiantis 4.5 skyreliu, kriterijų galima suformuluoti pasikliovimo intervalų terminais. Kadangi intervalas

$$(s_1^2/(s_2^2 F_{\alpha/2}(19,\ 24)), s_1^2/(s_2^2 F_{1-\alpha/2}(19,\ 24))) = (0,2867,\ \ 1,6491)$$

uždengia 1, tai hipotezė neatmetama.

b) Kadangi p. a) gavome, kad dispersijų lygybės hipotezė neatmetama, tai toliau tarsime, kad dispersijos yra vienodos.

Remiantis (4.7.16) hipotezė atmetama, kai teisinga nelygybė

$$T > t_{0,05}(n_1 + n_2 - 2) = 1,68.$$

Statistika T įgijo reikšmę 1,907, tai hipotezė dėl vidurkių lygybės atmetama.

Analogiškai p. a) kriterijų galima suformuluoti P reikšmių arba pasikliovimo intervalų terminais. Randame $pv = 1 - F(1,907|43) = 0,0316$. Kadangi P reikšmė pv yra mažesnė už reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0,05$, tai hipotezė atmetama.

4.7.3. Dvimatis normalusis skirstinys

Tarkime $(X_i, Y_i)^T, i = 1, 2, ..., n$, yra paprastoji imtis a. v. $(X, Y)^T$, kurio skirstinys priklauso dvimačių normaliųjų skirstinių šeimai $\{N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T, -\infty < \mu_1, \mu_2 < \infty; \boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]_{2\times 2}, \sigma_{11} = \sigma_1^2, \sigma_{22} = \sigma_2^2, \sigma_{12} = \sigma_{21} = \rho\sigma_1\sigma_2; 0 < \sigma_1, \sigma_2 < \infty, -1 < \rho < 1\}$.

Kadangi parametrų μ_1, σ_1^2 įvertiniai priklauso tik nuo imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$, o μ_2, σ_2^2 — tik nuo imties $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^T$, tai hipotezių dėl tų parametrų reikšmių tikrinimo kriterijai sutampa su analogiškais hipotezių dėl vienmačio normaliojo skirstinio parametrų reikšmių tikrinimo kriterijais.

1. *Nepriklausomumo hipotezės tikrinimas.* Kaip žinome, normaliojo skirstinio atveju a. d. X ir Y nepriklausomi tada ir tik tada, kai koreliacijos koeficientas $\rho = 0$. Taigi a. d. X ir Y nepriklausomumo hipotezė tampa parametrine hipoteze $H : \rho = 0$, kai yra vienpusės ar dvipusė alternatyva.

Hipotezių dėl koreliacijos koeficiento reikšmių tikrinimo kriterijai paprastai grindžiami empiriniu koreliacijos koeficientu

$$\hat{\rho} = r = \frac{s_{12}}{s_1 s_2} = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_i (X_i - \bar{X})^2 \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2}}. \tag{4.7.26}$$

Statistikos r skirstinys nepriklauso nuo parametrų $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$, o priklauso tik nuo ρ. Tankio funkcija $f(x, \rho)$ yra tokio pavidalo [žr. [5], arba šio vadovėlio IV dalį]:

$$f(x,\ \rho) = \frac{2^{n-3}}{\pi\Gamma(n-2)}(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \Gamma^2\left(\frac{n+j-1}{2}\right)\frac{(2r\rho)^j}{j!}. \tag{4.7.27}$$

Kai $\rho = 0$, tankis yra

$$f(x,\ 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-2}{2})}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}. \tag{4.7.28}$$

Čia pasinaudojome žinoma dvigubo argumento gama funkcijos išraiška

$$\Gamma(2m) = \Gamma(m)\Gamma(m+\frac{1}{2})2^{2m-1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Atlikime tokią a. d. r transformaciją:

$$U = \sqrt{n-2}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}. \tag{4.7.29}$$

Tada naudodamiesi (4.7.28) tankio formule, gauname a. d. U tankį

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{(n-2)\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-2}{2})}(1+\frac{u^2}{n-2})^{-(n-1)/2}. \tag{4.7.30}$$

Įsitikiname, kad tai Stjudento a. d. su $n-2$ laisvės laipsnių tankis (žr. 1.P.2 lentelę). Taigi, sudarant kriterijus hipotezei $H : \rho = 0$, tikrinti galima pasinaudoti žinomu Stjudento skirstiniu.

Tikrinant hipotezę $H_1 : \rho \leq 0$ (arba $\rho = 0$), kai alternatyva $\bar{H}_1 : \rho > 0$, hipotezę $H_2 : \rho \geq 0$ (arba $\rho = 0$), kai alternatyva $\bar{H}_2 : \rho < 0$, hipotezę $H_3 : \rho = 0$, kai alternatyva $\bar{H}_3 : \rho \neq 0$, kriterijų kritinės sritys atitinkamai yra

$$K_1 = \{r : U > t_\alpha(n-2)\}, \quad K_2 = \{r : U < -t_\alpha(n-2)\},$$

$$K_3 = \{r : |U| > t_{\alpha/2}(n-2)\}. \tag{4.7.31}$$

Šių kriterijų galios funkcijos gaunamos integruojant (4.7.27) tankį kritinėse srityse:

$$\beta_i(\rho) = \int_{K_i} f(x, \rho)dx, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.7.32}$$

Pažymėkime u statistikos U realizaciją ir tegu $S(x|\nu)$ yra Stjudento skirstinio su ν laisvės laipsniais pasiskirstymo funkcija. Tada P reikšmių terminais kriterijai (4.7.31) formuluojami taip: hipotezės H_1, H_2, H_3 atmetamos, kai atitinkamai teisingos nelygybės

$$pv = 1 - S(t|n-2) \leq \alpha, \quad pv = S(t|n-2) \leq \alpha,$$

$$pv = 2\min(1 - S(t|n-2), S(t|n-2)) = 2(1 - S(|t||n-2)) \leq \alpha.$$

4.7.7 pavyzdys._Nepriklausomumo hipotezės tikrinimas._ Tegu pagal didumo $n = 50$ paprastąją imtį, gautą stebint dvimatį normalųjį a. v. $(X, Y)^T$, gauta empirinio koreliacijos koeficiento realizacija $r = 0,25$. Reikia patikrinti hipotezę $H : \rho = 0$, kai alternatyva yra $\bar{H}_3 : \rho \neq 0$, o kriterijaus reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0,05$.

Statistika U iš (4.7.29) įgijo reikšmę $u = 1,7891$. Kadangi $t_{0,025}(48) = 2,0106$, tai hipotezė H neatmetama. Randame $pv = 2(1 - S(1,7891|48)) = 0,0798$. Kadangi $pv = 0,0798$ viršija reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0,05$, tai hipotezė neatmetama.

2. _Hipotezių apie koreliacijos koeficiento reikšmes tikrinimas._ Tikrinant hipotezes $H_1 : \rho \leq \rho_0$, $H_2 : \rho \geq \rho_0$ arba $H_3 : \rho = \rho_0$, kai jų alternatyvos atitinkamai yra $\bar{H}_1 : \rho > \rho_0$, $\bar{H}_2 : \rho < \rho_0$ arba $\bar{H}_3 : \rho \neq \rho_0$, tenka naudoti (4.7.27) tankio išraišką. Pažymėkime $F(x|\rho) = \mathbf{P}_\rho\{r \leq x\}$ atsitiktinio dydžio r pasiskirstymo funkciją, kai koreliacijos koeficientas yra ρ. Kriterijus galima suformuluoti, naudojant P reikšmes. Tada hipotezės H_1, H_2, H_3 atitinkamai atmetamos, kai

$$pv = 1 - F(r|\rho_0) < \alpha, \; pv = F(r|\rho_0) < \alpha, \; pv = 2\min(F(r|\rho_0), 1 - F(r|\rho_0)) < \alpha. \tag{4.7.33}$$

Šiose nelygybėse r yra empirinio koreliacijos koeficiento realizacija.

Dažniausiai naudojami apytikslieji kriterijai, kurie grindžiami statistikos r Fišerio transformacija

$$Z = Z(r) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}$$

ir a. d. Z asimptotiniu $(n \to \infty)$ normalumu

$$V_n(\rho_0) = \sqrt{n-3}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ 1),$$

kai tikroji parametro reikšmė yra ρ_0. Apytikslieji kriterijai gaunami lyginant $V_n(\rho_0)$ su standartinio normaliojo skirstinio kritinėmis reikšmėmis. Gauname tokias apytikslių kriterijų kritines sritis

$$V_n(\rho_0) > z_\alpha, \quad V_n(\rho_0) < -z_\alpha, \quad |V_n(\rho_0)| > z_{\alpha/2}. \tag{4.7.34}$$

Pažymėkime v statistikos $V_n(\rho_0)$ realizaciją. Tada kriterijus (4.7.34) galima suformuluoti asimptotinių P reikšmių pv_a terminais: hipotezės H_1, H_2, H_3 atmetamos, kai atitinkamai teisingos nelygybės

$$pv_a = 1 - \Phi(v) \leq \alpha, \quad pv_a = \Phi(v) \leq \alpha,$$

$$pv_a = 2\min(1 - \Phi(v), \Phi(v)) = 2(1 - \Phi(|v|)) \leq \alpha.$$

Kriterijų galia apytiksliai išreiškiama standartinio normaliojo skirstinio pasiskirstymo funkcija $\Phi(x)$.

4.7.8 pavyzdys. (**3.7.3** pavyzdžio tęsinys). *Hipotezės apie koreliacijos koeficiento reikšmę tikrinimas.* Tariant, kad turima paprastoji didumo $n = 25$ imtis, gauta stebint dvimatį normalųjį vektorių, 3.7.3 pratime buvo apskaičiuota empirinio koreliacijos koeficiento realizacija $r = 0,7590$. a) Reikšmingumo lygmens $\alpha = 0,05$ kriterijumi patikrinsime hipotezę $H : \rho = 0,85$, kai alternatyva yra $\bar{H}_2 : \rho < 0,85$. b) Rasime tokį imties didumą, kad hipotezė H būtų atmetama su tikimybe, ne mažesne už 0,99, kai tikroji parametro ρ reikšmė tenkina nelygybę $\rho \leq 0,8$.

a) Remiantis Fišerio aproksimacija pagal (4.7.34), hipotezė H atmetama, kai

$$V_n(\rho_0) < -z_\alpha = -1,96.$$

Kadangi statistikos $V_n(\rho_0)$ įgijo reikšmę $V_{25}(0,85) = -1,230$, tai hipotezė H neatmetama. Randame $pv_a = \Phi(-1,230) = 0,109 > 0,05$; hipotezė neatmetama b) Imties didumui rasti turime nelygybę

$$\mathbf{P}\{\sqrt{n-3}(Z(r) - Z(\rho_0)) < -z_\alpha | \rho = 0,8\} =$$
$$\mathbf{P}\{\sqrt{n-3}(Z(r) - Z(0,8)) < -z_\alpha + \sqrt{n-3}(Z(\rho_0) - Z(0,8)) | \rho = 0,8\} \approx$$
$$\Phi(-z_\alpha + \sqrt{n-3}(Z(\rho_0) - Z(0,8))) \geq 0,99.$$

Iš čia gauname

$$-z_\alpha + \sqrt{n-3}(Z(\rho_0) - Z(0,8)) \geq z_{0,01} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 3 + \frac{(z_{0,05} + z_{0,01})^2}{(Z(0,85) - Z(0,8))^2} = 60,96.$$

Imties didumas turi būti ne mažesnis už 61.

3. *Vidurkių palyginimo hipotezės tikrinimas.* Sakykime, reikia patikrinti hipotezes $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \leq \beta_0$ (arba $\mu_1 - \mu_2 = \beta_0$), $H_2 : \mu_1 - \mu_2 \geq \beta_0$ (arba $\mu_1 - \mu_2 = \beta_0$), $H_3 : \mu_1 - \mu_2 = \beta_0$, kai jų alternatyvos atitinkamai yra $\bar{H}_1 : \mu_1 - \mu_2 > \beta_0$, $\bar{H}_2 : \mu_1 - \mu_2 < \beta_0$, $\bar{H}_3 : \mu_1 - \mu_2 = \beta_0$.

Kartais šios hipotezės tikrinamos neteisingai taikant įprastinį Stjudento kriterijų, apibrėžiamą (4.7.17), (4.7.18), (4.7.19) formulėmis, kuris neatsižvelgia į a. d. X ir Y priklausomybę (žr. 4.45, 4.46 pratimus).

Pažymėkime $Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Tada $\boldsymbol{Z} = (Z_1, ..., Z_n)^T$ yra paprastoji imtis a. d. $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = \mu_1 - \mu_2$, $\sigma^2 = \boldsymbol{V}Z = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$. Vietoje hipotezių H_1, H_2, H_3 galime tikrinti analogiškas hipotezes dėl normaliojo skirstinio vidurkio μ reikšmių naudodamiesi imtimi $(Z_1, ..., Z_n)^T$, kai dispersija σ^2 yra nežinoma (žr. 4.7.1 skyrelį).

4.7.9 pavyzdys.(**3.7.3** pavyzdžio tęsinys). *Priklausomų imčių Stjudento kriterijus.* 3.7.3 pavyzdžio sąlygomis tikrinsime hipotezę $H : \mu_1 = \mu_2$, kad dviejų spindulių srovės stiprumo vidurkiai yra vienodi. Tegu alternatyva yra $\bar{H}_3 : \mu_1 \neq \mu_2$, o kriterijaus reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0,05$.

Sudarome skirtumus $Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1, ..., 25$. Statistikų $\bar{Z}$ ir $s_Z^2 = \sum_i (Z_i - \bar{Z})^2/(n-1)$ realizacijos surastos 3.7.3 pavyzdyje, $\bar{Z} = 0,0552$, $s_Z = 0,0839$. Randame statistikos T realizaciją:

$$t = \sqrt{n}\frac{\bar{Z} - 0}{s_Z} = 5\frac{0,0552}{0,0839} = 3,2896.$$

Kadangi modulis $|t|$ viršija kritinę reikšmę $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0,025}(24) = 2,0639$, tai hipotezė atmetama. Naudodami kriterijų P reikšmių terminais, randame $pv = 2(1 - F(|t||n-1))$; čia $F(x|\nu)$ yra Stjudento skirstinio su ν laisvės laipsniais pasiskirstymo funkcija. Kadangi $pv = 0,0031 < 0,05$, tai hipotezę atmetame.

Jeigu šiame pavyzdyje neatsižvelgdami į imčių priklausomumą būtume naudoję (4.7.19) kriterijų, tai dispersijų σ_1^2 ir σ_2^2 NMD įvertinių realizacijos yra $s_1^2 = 0,0120$ ir $s_2^2 = 0,0162$, o statistikos T iš (4.7.16) realizacija yra

$$T = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} = 5\frac{0,0552}{0,1679} = 1,6435.$$

Kadangi realizacija $|T|$ yra mažesnė už kritinę reikšmę $t_{\alpha/2}(2n-2) = t_{0,025}(48) = 2,0106$, tai hipotezė neatmetama.

Šis pavyzdys rodo, kad, neteisingai taikydami Stjudento kriterijų (neatsižvelgdami į imčių priklausomumą), galime gauti klaidingas išvadas.

4.7.4. Skirstiniai, susiję su normaliuoju skirstiniu

1. *Lognormalusis skirstinys.* Tarkime, $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis, gauta stebint a. d. X, turintį *lognormalųjį skirstinį* $X \sim LN(\mu, \sigma)$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$.

Kadangi $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^T, Y_i = \ln X_i$, yra paprastoji imtis a. d. $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, tai tikrinant hipotezes apie parametrų μ ir σ^2 reikšmes, taikomi 4.7.1 skyrelyje išdėstyti metodai. Tik iš pradžių reikia atlikti stebėjimų $X_1, ..., X_n$ transformaciją $Y_i = \ln X_i,\ i = 1, 2, ..., n$.

2. *Pusiau normalusis skirstinys.* Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis, gauta stebint *pusiau normalųjį* a. d. (žr. 1.P.2 lentelę) su parametru $0 < \sigma < \infty$. Imties $\mathbf{X}$ tankis

$$f(\mathbf{X}, \sigma) = (2/\pi)^{n/2} \exp\{\eta(\sigma)T(\mathbf{X}) - B(\sigma)\},$$

čia

$$\eta(\sigma) = -\frac{1}{2\sigma^2}, \quad T(\mathbf{X}) = \sum_i X_i^2, \quad B(\sigma) = n \ln \sigma$$

yra (4.3.6) pavidalo. Remiantis 4.3.1 teorema, egzistuoja TG kriterijai hipotezėms $H_1 : \sigma \leq \sigma_0$ (arba $\sigma = \sigma_0$), $H_2 : \sigma \geq \sigma_0$ (arba $\sigma = \sigma_0$), kai alternatyvos yra $\bar{H}_1 : \sigma > \sigma_0$, $\bar{H}_2 : \sigma < \sigma_0$, tikrinti. Kadangi $T(\mathbf{X})/\sigma_0^2 \sim \chi^2(n)$, kai $\sigma = \sigma_0$, tai šių kriterijų kritinės sritys atitinkamai yra

$$K_1 = \{\mathbf{X} : \frac{T(\mathbf{X})}{\sigma_0^2} > \chi^2_\alpha(n)\}, \quad K_2 = \{\mathbf{X} : \frac{T(\mathbf{X})}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha}(n)\}. \qquad (4.7.35)$$

Pažymėkime y statistikos $Y = T(\mathbf{X})/\sigma_0^2$ realizaciją ir tegu $F(x|\nu)$ yra χ^2 skirstinio su ν laisvės laipsniais pasiskirstymo funkcija. Tada P reikšmių terminais kriterijai (4.7.35) formuluojami taip: hipotezės H_1, H_2 atmetamos, kai atitinkamai teisingos nelygybės

$$pv = 1 - F(y|n) \leq \alpha, \quad pv = F(y|n) \leq \alpha.$$

Tikrinant hipotezę $H_3 : \sigma = \sigma_0$, kai yra dvipusė alternatyva $\bar{H}_3 : \sigma \neq \sigma_0$, egzistuoja TGN kriterijus, kurio kritinė sritis

$$K_3 = \{\mathbf{X} : \frac{T(\mathbf{X})}{\sigma_0^2} < c_1 \text{ arba } \frac{T(\mathbf{X})}{\sigma_0^2} > c_2\}; \qquad (4.7.36)$$

čia konstantos c_1 ir c_2 randamos iš lygčių sistemos (plg. 4.7.1 skyrelį)

$$\begin{cases} \mathbf{P}\{c_1 < \chi^2_n < c_2\} = 1 - \alpha, \\ \mathbf{P}\{c_1 < \chi^2_{n+2} < c_2\} = 1 - \alpha. \end{cases}$$

4.7.6 pastaba. Minėjome, kad vietoje (4.7.36) kriterijaus dažniau naudojamas paslinktasis, tačiau paprasčiau apskaičiuojamas simetrinis kriterijus, kurio kritinė sritis

$$\widetilde{K}_3 = \{\mathbf{X} : \frac{T(\mathbf{X})}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha/2}(n) \quad \text{arba} \quad \frac{T(\mathbf{X})}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\alpha/2}(n)\}. \tag{4.7.37}$$

Šis kriterijus P reikšmių terminais formuluojamas taip: hipotezė H_3 atmetama, kai

$$pv = 2\min(1 - F(y|n), F(y|n)) \leq \alpha.$$

3. *Relėjaus skirstinys.* Tegu paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d., turintį Relėjaus skirstinį (žr. 1.P.2 lentelę) su parametru $0 < \sigma < \infty$. Imties $\mathbf{X}$ tankis

$$f(\mathbf{X},\ \sigma) = (\prod_i X_i) \exp\{\eta(\sigma)T(\mathbf{X}) - B(\sigma)\},$$

čia

$$\eta(\sigma) = -\frac{1}{2\sigma^2}, \quad T(\mathbf{X}) = \sum_i X_i^2, \quad B(\sigma) = 2n\ln\sigma,$$

yra 4.3.6 pavidalo. Kadangi $T(\mathbf{X})/\sigma_0^2 \sim \chi^2(2n)$, kai $\sigma = \sigma_0$, tai hipotezių H_1, H_2, H_3 tikrinimo kriterijai yra apibrėžti (4.7.35), (4.7.36) ir (4.7.37) formulėmis, tik jose vietoje n reikia įrašyti $2n$.

4.7.10 pavyzdys. (**3.7.4** pavyzdžio tęsinys). *Hipotezės apie Relėjaus skirstinio parametro reikšmes tikrinimas.* Reikšmingumo lygmens $\alpha = 0,05$ kriterijumi 3.7.4 pavyzdžio sąlygomis patikrinsime hipotezę $H : \sigma^2 \leq 2$, kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : \sigma^2 > 2$.

Remdamiesi (4.7.35) randame

$$\sum_{i=1}^{20} X_i^2/\sigma_0^2 = \frac{127,1196}{2} = 63,5598.$$

Kadangi ši realizacija viršija kritinę reikšmę $\chi^2_\alpha(2n) = \chi^2_{0,05}(40) = 55,758$, tai hipotezė atmetama. Randame $pv = 1 - F(63,5598|40) = 0,0103$. Taigi hipotezė atmetama ir naudojant kriterijų formuluojamą P reikšmių terminais.

4. *Maksvelo skirstinys.* Tegu paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d., turintį Maksvelo skirstinį (žr. 1.P.2 lentelę) su parametru $0 < \sigma < \infty$. Imties $\mathbf{X}$ tankis

$$f(\mathbf{X}, \sigma) = (2/\pi)^{n/2} (\prod_i X_i^2) \exp\{\eta(\sigma)T(\mathbf{X}) - B(\sigma)\},$$

čia

$$\eta(\sigma) = -\frac{1}{2\sigma^2}, \quad T(\mathbf{X}) = \sum_i X_i^2, \quad B(\sigma) = 2n\ln\sigma,$$

yra 4.3.6 pavidalo. Kadangi $T(\mathbf{X})/\sigma_0^2 \sim \chi^2(3n)$, kai $\sigma = \sigma_0$, tai hipotezių $H_1,\ H_2,$
H_3 tikrinimo kriterijai yra apibrėžti (4.7.35), (4.7.36) ir (4.7.37) formulėmis, tik jose vietoje n reikia įrašyti $3n$.

5. *Koši skirstinys.* Tarkime, paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim K(\mu, \sigma)$ turintį *Koši skirstinį* su parametrais $-\infty < \mu < \infty,\ 0 < \sigma < \infty$, kurio tankis

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x - \mu)^2}.$$

Egzistuoja tik triviali šio skirstinio pakankamoji statistika $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$. Tankis nepriklauso eksponentinių skirstinių šeimai ir neturi monotoninio tikėtinumo santykio, todėl TG ir TGN kriterijų sudarymo metodika, aprašyta 4.5.2–4.5.4 skyreliuose, nepritaikoma. Tenka apsiriboti apytiksliais asimptotiniais kriterijais, tarus, kad imties didumas $n \to \infty$. Kadangi vieno stebėjimo informacijos apie parametrus μ ir σ kiekiai yra $i(\mu) = 1/2\sigma^2,\ i(\sigma) = 1/2\sigma^2$ (žr. 3.5.7 pavyzdį), tai DT įvertiniai $\hat{\mu}$ ir $\hat{\sigma}$ asimptotiškai $(n \to \infty)$ yra normalieji:

$$\begin{aligned} U_n(\mu) &= \sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ 2\sigma^2), \\ V_n(\sigma) &= \sqrt{n}(\hat{\sigma} - \sigma) \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ 2\sigma^2). \end{aligned} \tag{4.7.38}$$

Remdamiesi šiomis aproksimacijomis, galime sudaryti apytikslius kriterijus hipotezei $H : \mu = \mu_0$, esant alternatyvoms $\bar{H}_1 : \mu > \mu_0,\ \bar{H}_2 : \mu < \mu_0,\ \bar{H}_3 : \mu \neq \mu_0$, tikrinti. Jų kritinės sritys yra

$$\begin{aligned} K_1 &= \{\mathbf{X} : \frac{U_n(\mu_0)}{\sqrt{2}\hat{\sigma}} > z_\alpha\}, \\ K_2 &= \{\mathbf{X} : \frac{U_n(\mu_0)}{\sqrt{2}\hat{\sigma}} < -z_\alpha\}, \\ K_3 &= \{\mathbf{X} : \frac{|U_n(\mu_0)|}{\sqrt{2}\hat{\sigma}} > z_{\alpha/2}\}. \end{aligned} \tag{4.7.39}$$

Pastaroji kritinė sritis sutampa su Valdo asimptotinio kriterijaus kritine sritimi

$$\widetilde{K}_3 = \{\mathbf{X} : \frac{U_n^2(\mu_0)}{2\hat{\sigma}^2} > \chi^2_\alpha(1)\}.$$

Pažymėjus t statistikos $U_n(\mu_0)/\sqrt{2}\hat{\sigma}$ realizaciją, kriterijus (4.7.39) galima suformuluoti asimptotinių P reikšmių pv_a terminais: hipotezė H atmetama alternatyvų $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3$ naudai, kai atitinkamai teisingos nelygybės

$$pv_a = 1 - \Phi(t) \leq \alpha, \quad pv_a = \Phi(t) \leq \alpha, \quad pv_a = 2(1 - \Phi(|t|)) \leq \alpha.$$

Analogiškai, (4.7.39) formulėse vietoje $U_n(\mu_0)$ įrašę $V_n(\sigma_0)$, gauname apytikslius kriterijus hipotezėms dėl parametro σ reikšmių tikrinti.

4.7.11 pavyzdys. (**3.7.5** pavyzdžio tęsinys). *Hipotezės apie Koši skirstinio parametro reikšmes tikrinimas.* Reikšmingumo lygmens $\alpha = 0,05$ kriterijumi 3.7.5 pavyzdžio sąlygomis patikrinsime hipotezę $H : \mu \leq 4$, kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : \mu > 4$.

Parametro μ DT įvertinio realizacija surasta 3.7.5 pavyzdyje $\hat{\mu} = 4,7535$. Remiantis (4.7.39) hipotezė atmetama apytiksliu kriterijumi, kai

$$U_n(\mu_0)/\sqrt{2} = \sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu_0)/\sqrt{2} = \sqrt{10,5}(4,7535 - 4) = 2,4416$$

viršija kritinę reikšmę $z_{0,05} = 1,96$. Hipotezė atmetama. Asimptotinė P reikšmė $pv_a = 1 - \Phi(2,4416) = 0,0073$.

4.7.5. Gama skirstinys

1. Iš pradžių nagrinėkime gama skirstinį, priklausantį nuo vieno parametro λ. Tarkime, imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ koordinatės yra n. a. d. ir $X_i \sim G(\lambda, \eta_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, $0 < \lambda < \infty$. Parametrai $\eta_1, ..., \eta_n$ yra žinomi, $\eta = \eta_1 + \cdots + \eta_n$.

Imties $\mathbf{X}$ tankio funkcija

$$f(\mathbf{X}, \lambda) = \exp\{\eta(\lambda)T - B(\lambda)\}h(\mathbf{X}),$$

čia

$$\eta(\lambda) = -\lambda, \quad T = \sum_i X_i, \quad B(\lambda) = -\eta \ln \lambda,$$

yra (4.3.6) pavidalo. Remiantis 4.3.1 teorema, egzistuoja TG kriterijai hipotezėms $H_1 : \lambda \leq \lambda_0$ (arba $\lambda = \lambda_0$) ir $H_2 : \lambda \geq \lambda_0$ (arba $H_1 : \lambda = \lambda_0$) tikrinti, esant vienpusėms alternatyvoms $\bar{H}_1 : \lambda > \lambda_0$ ir $\bar{H}_2 : \lambda < \lambda_0$. Kadangi statistika $V = 2\lambda_0 T \sim \chi^2(2\eta)$, kai $\lambda = \lambda_0$, tai kritinės sritys yra tokios:

$$K_1 = \{\mathbf{X} : 2\lambda_0 T < \chi^2_{1-\alpha}(2\eta)\}, \quad K_2 = \{\mathbf{X} : 2\lambda_0 T > \chi^2_{\alpha}(2\eta)\}. \tag{4.7.40}$$

Pažymėkime t statistikos T realizaciją ir tegu $F(x|\nu)$ yra χ^2 skirstinio su ν laisvės laipsniais pasiskirstymo funkcija. Tada kriterijus (4.7.40) galima suformuluoti P reikšmių terminais: hipotezės H_1, H_2 atmetamos, kai atitinkamai teisingos nelygybės

$$pv = F(2\lambda_0 t|2\eta) \leq \alpha, \quad pv = 1 - F(2\lambda_0 t|2\eta) \leq \alpha.$$

Tikrinant hipotezę $H_3 : \lambda = \lambda_0$, kai alternatyva $\bar{H}_3 : \lambda \neq \lambda_0$ yra dvipusė, egzistuoja TGN kriterijus, kurio kritinė sritis

$$K_3 = \{\mathbf{X} : 2\lambda_0 T < c_1 \text{ arba } 2\lambda_0 T > c_2\}, \tag{4.7.41}$$

čia konstantos c_1 ir c_2 randamos iš sąlygų

$$\mathbf{E}_{\lambda_0}(\varphi(V)) = \alpha, \quad \mathbf{E}_{\lambda_0}(V\varphi(V)) = \alpha \mathbf{E}_{\lambda_0}(V).$$

Tada

$$\mathbf{E}_{\lambda_0}(V) = \mathbf{E}(\chi^2_{2\eta}) = 2\eta,$$

$$\mathbf{E}_{\lambda_0}(V\varphi(V)) = \frac{1}{2^\eta \Gamma(\eta)} \left(\int_0^{c_1} x x^{\eta-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{x}/2} \mathrm{dx} + \int_{c_2}^{\infty} \mathrm{x}\mathrm{x}^{\eta-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{x}/2} \mathrm{dx} \right) =$$

$$= 2\eta(1 - \mathbf{P}\{c_1 < \chi^2_{2\eta+2} < c_2\}).$$

Taigi sąlygas konstantoms c_1 ir c_2 rasti galima užrašyti tokia lygčių sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{P}\{c_1 < \chi^2_{2\eta} < c_2\} = 1 - \alpha, \\ \mathbf{P}\{c_1 < \chi^2_{2\eta+2} < c_2\} = 1 - \alpha. \end{cases}$$

Kaip ir pirmiau, vietoje (4.7.41) kriterijaus galima taikyti paslinktąjį, tačiau paprasčiau randamą simetrinį kriterijų, kurio kritinė sritis

$$\widetilde{K}_3 = \{2\lambda_0 T < \chi^2_{1-\alpha/2}(2\eta) \quad \text{arba} \quad 2\lambda_0 T > \chi^2_{\alpha/2}(2\eta)\}, \tag{4.7.42}$$

arba P reikšmių terminais hipotezė H_3 atmetama, kai

$$pv = 2\min(F(2\lambda_0 t|2\eta), 1 - F(2\lambda_0 t|2\eta)) \le \alpha.$$

4.7.7 pastaba. Jeigu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis, gauta stebint eksponentinį a. d. $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, tai gauname atvejį, kai $\eta_1 = \cdots = \eta_n = 1$. Taigi kriterijų (4.7.40), (4.7.41), (4.7.42) formulėse tereikėtų η pakeisti imties didumu n.

4.7.12 pavyzdys. (**3.7.9** pavyzdžio tęsinys). *Hipotezės apie eksponentinio skirstinio parametro reikšmes tikrinimas.* Reikšmingumo lygmens $\alpha = 0,05$ kriterijumi 3.7.9 pavyzdžio sąlygomis patikrinsime hipotezę $H : \lambda \ge 0,25$, kai alternatyva yra $\bar{H}_2 : \lambda < 0,25$.

Parametro λ DT įvertinio realizacija, surasta 3.7.9 pavyzdyje, $\hat{\lambda} = 0,1998$. Remiantis (4.7.40) hipotezė atmetama, kai

$$2\lambda_0 T = 2\lambda_0(n-1)/\hat{\lambda} = 2 \cdot 0,25 \cdot 49/0,1998 = 122,62$$

viršija kritinę reikšmę $\chi^2_\alpha(2n) = \chi^2_{0,05}(100) = 124,342$. Hipotezė neatmetama. P reikšmė $pv = \mathbf{P}\{\chi^2_{100} > 122,62\} = 0,0619$.

2. Tarkime, paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim G(\lambda, \eta)$, kai parametras λ yra žinomas, $0 < \eta < \infty$. Imties tankis

$$f(\mathbf{X},\ \eta) = \exp\{\eta T - b(\eta)\}h(\mathbf{X}),$$

čia

$$T = \sum_i \ln X_i, \quad B(\eta) = -n\eta\ln\eta + n\ln\Gamma(\eta)$$

taip pat priklauso vienparametrių eksponentinio tipo skirstinių (4.3.6) šeimai. Todėl egzistuoja TG kriterijai hipotezėms dėl η reikšmių, kai yra vienpusės alternatyvos, ir TGN kriterijai, kai yra dvipusės alternatyvos, tikrinti, išreiškiami statistikos T terminais. Tačiau statistikos T skirstinys gana sudėtingas, jo kvantilių reikšmių skaičiavimas nėra numatytas daugumos matematinės statistikos TPP. Todėl praktiškai tenka naudotis apytiksliais kriterijais, grindžiamais parametro η įvertinio asimptotiniu normalumu, kai imties didumas $n \to \infty$. Momentų ir DT įvertinių asimptotinės savybės nagrinėtos 3.7.11 skyrelyje. Naudodamiesi asimptotiniu normalumu, kriterijus suformuluojame analogiškai, pavyzdžiui, (4.7.39) formulėms.

4.7.6. Beta skirstinys

Tarkime, paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim Be(\gamma, \eta)$, $0 < \gamma,\ \eta < \infty$.

Galima įsitikinti, kad kai žinomas vienas iš parametrų γ arba η, imties $\mathbf{X}$ tankis priklauso vienparametrių eksponentinio tipo skirstinių (4.3.6) šeimai. Todėl, remiantis 4.3.1 teorema, egzistuoja TG (vienpusėms alternatyvoms) arba TGN (dvipusėms alternatyvoms) kriterijai, grindžiami pakankamosiomis statistikomis $T_1 = \sum_i \ln X_i$ (parametrui γ) arba $T_2 = \sum_i \ln(1 - X_i)$ (parametrui η). Tačiau, kaip ir ankstesniame skyrelyje, statistikų T_1 ir T_2 skirstiniai neišreiškiami žinomais skirstiniais. Todėl tenka apsiriboti apytiksliais kriterijais, grindžiamais įvertinių $\hat{\gamma}$ ir $\hat{\eta}$ asimptotiniu ($n \to \infty$) normalumu (žr. 3.7.12 skyrelį).

4.7.7. Puasono skirstinys

Tarkime, $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis, gauta stebint a. d. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $0 < \lambda < \infty$. Imties tankis (skaičiuojančiojo mato atžvilgiu)

$$f(\mathbf{X},\ \lambda) = \exp\{\eta(\lambda)T - B(\lambda)\}h(\mathbf{X}),$$

čia

$$\eta(\lambda) = \ln \lambda, \quad T = \sum_i X_i, \quad B(\lambda) = n\lambda,$$

priklauso vienparametrių eksponentinio tipo skirstinių (4.3.6) šeimai.

Remiantis 4.3.1 teorema, egzistuoja TG kriterijus hipotezei $H_1 : \lambda \le \lambda_0$ (arba $\lambda = \lambda_0$), kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : \lambda > \lambda_0$, tikrinti. Kriterijus nusakomas taip:

$$\varphi(T) = \begin{cases} 1, & \text{kai } T > k, \\ \gamma, & \text{kai } T = k, \\ 0, & \text{kai } T < k, \end{cases}$$

čia konstantos k ir γ randamos iš sąlygos

$$\mathbf{E}_{\lambda_0}(\varphi(T)) = \mathbf{P}_{\lambda_0}\{T > k\} + \gamma \mathbf{P}_{\lambda_0}\{T = k\} = \alpha.$$

Kadangi statistika $T \sim \mathcal{P}(n\lambda_0)$, kai $\lambda = \lambda_0$, tai ši sąlyga reiškia, kad

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{(n\lambda_0)^m}{m!} \mathrm{e}^{-\mathrm{n}\lambda_0} + \gamma \frac{(\mathrm{n}\lambda_0)^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!} \mathrm{e}^{-\mathrm{n}\lambda_0} = \alpha. \tag{4.7.43}$$

Statistikos T skirstinys yra diskretusis, todėl daugumai λ_0 reikšmių TG kriterijus bus randomizuotas, t. y. $\gamma \ne 0;\ 1$. Tikimybių suma nuo $k + 1$ iki ∞ gali būti dar mažesnė už α, tačiau įtraukus tikimybę taške k jau viršija α. Todėl, norint, kad reikšmingumo lygmuo būtų tiksliai lygus α, tektų įtraukti γ dydžio taško k "dalį" ir taip papildyti reikšmingumo lygmenį iki α.

Minėjome, paprastai nereikalaujama, kad reikšmingumo lygmuo būtų tiksliai lygus α. Todėl dažniau naudojami nerandomizuoti kriterijai, gaunami šiek tiek sumažinus reikšmingumo lygmenį. Tiksliau, parenkamas toks mažiausias sveikasis skaičius k', kad

$$\mathbf{P}_{\lambda_0}(T \geq k') = \sum_{m=k'}^{\infty} \frac{(n\lambda_0)^m}{m!} \mathrm{e}^{-\mathrm{n}\lambda_0} = 1 - \mathbf{P}\{\chi^2_{2\mathrm{k}'} > 2\mathrm{n}\lambda_0\} \leq \alpha.$$

Tada kriterijaus kritinė sritis

$$K_1 = \{\mathbf{X} : T \geq k'\}. \tag{4.7.44}$$

Pažymėkime t statistikos T realizaciją ir tegu $F(x|\nu)$ yra χ^2 skirstinio su ν laisvės laipsniais pasiskirstymo funkcija. Tada kriterijus (4.7.44) P reikšmių terminais formuluojamas taip: hipotezė H_1 atmetama, kai teisinga nelygybė

$$pv = \mathbf{P}_{\lambda_0}\{T \geq t\} = 1 - F(2n\lambda_0|2t) \leq \alpha. \tag{4.7.45}$$

Pagaliau kritinę sritį K_1 galima užrašyti parametro λ pasikliovimo intervalo terminais:

$$K_1 = \{\mathbf{X} : \lambda_0 < \underline{\lambda} = \frac{1}{2n}\chi^2_{1-\alpha}(2T)\}; \tag{4.7.46}$$

čia intervalo pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - 2\alpha$.

Analogiškai sudarome TG kriterijų hipotezei $H_2 : \lambda \geq \lambda_0$ (arba $\lambda = \lambda_0$), kai alternatyva yra $\bar{H}_2 : \lambda < \lambda_0$, tikrinti. Atsižvelgus į ankstesnes pastabas, kriterijaus kritinę sritį galima užrašyti trimis ekvivalenčiais pavidalais. Tegu k'' – didžiausias sveikasis skaičius, kuriam

$$\mathbf{P}_{\lambda_0}(T \leq k'') = \mathbf{P}\{\chi^2_{2k''+2} > 2n\lambda_0\} \leq \alpha.$$

Tada kriterijaus kritinė sritis

$$K_2 = \{\mathbf{X} : T \leq k''\} \Leftrightarrow pv = F(2n\lambda_0|2t+2) \leq \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\mathbf{X} : \lambda_0 > \overline{\lambda} = \frac{1}{2n}\chi^2_{\alpha}(2T+2)\}; \tag{4.7.47}$$

čia intervalo pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - 2\alpha$.

Jei tikrinama hipotezė $H_3 : \lambda = \lambda_0$, esant dvipusei alternatyvai $\lambda \neq \lambda_0$, tai, remiantis 4.3.2 teorema, egzistuoja TGN kriterijus

$$\varphi(T) = \begin{cases} 1, & \text{kai } T < c_1, \text{ arba } T > c_2 \\ \gamma, & \text{kai } T = c_i,\ i = 1,\ 2, \\ 0, & \text{kai } c_1 < T < c_2. \end{cases} \tag{4.7.48}$$

Konstantos $c_1,\ c_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2$ randamos iš sąlygų

$$\mathbf{E}_{\lambda_0}(\varphi(T)) = \alpha, \quad \mathbf{E}_{\lambda_0}(T\varphi(T)) = \alpha\mathbf{E}_{\lambda_0}(T).$$

Kadangi

$$\mathbf{E}_{\lambda_0}(T) = n\lambda_0, \quad \mathbf{E}_{\lambda_0}(T\mathbf{1}_{[a,\,b]}(T)) = n\lambda_0\mathbf{P}_{\lambda_0}\{a - 1 \leq T \leq b - 1\},$$

tai lygtis konstantoms rasti galime perrašyti taip:

$$\sum_{k=c_1+1}^{c_2-1} \frac{(n\lambda_0)^k}{k!} e^{-n\lambda_0} + \sum_{i=1}^{2} (1-\gamma_i) \frac{(n\lambda_0)^{c_i}}{c_i!} e^{-n\lambda_0} = 1-\alpha,$$

$$\sum_{k=c_1}^{c_2-2} \frac{(n\lambda_0)^k}{k!} e^{-n\lambda_0} + \sum_{i=1}^{2} (1-\gamma_i) \frac{(n\lambda_0)^{c_i-1}}{(c_i-1)!} e^{-n\lambda_0} = 1-\alpha.$$

Kaip ir vienpusių alternatyvų atveju, dažniausiai nereikalaujama, kad kriterijaus reikšmingumo lygmuo būtų tiksliai lygus α. Be to, kaip ir ankstesniuose skyreliuose, vietoje (4.7.47) TGN kriterijaus dažnai naudojamos paslinktasis, tačiau paprasčiau randamas simetrinis kriterijus. Atsižvelgę į šias pastabas, vietoje (4.7.47) kriterijaus gauname nerandomizuotą kriterijų, kurio kritinė sritis gali būti užrašyta trimis ekvivalenčiais pavidalais, analogiškai (4.7.47) formulei.

Tegu k'' ir k' yra tokie didžiausias ir mažiausias sveikieji skaičiai, kad

$$\mathbf{P}_{\lambda_0}\{T \le k''\} \le \frac{\alpha}{2}, \quad \mathbf{P}_{\lambda_0}\{T \ge k'\} \le \frac{\alpha}{2}.$$

Tada kriterijaus kritinė sritis yra

$$K_3 = \{\mathbf{X} : T \le k'' \text{ arba } T \ge k'\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow pv = 2\min(1 - F(2n\lambda_0|2t), F(2n\lambda_0|2t+2)) \le \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\mathbf{X} : \lambda_0 < \underline{\lambda} = \frac{1}{2n}\chi^2_{1-\alpha/2}(2T),\ \lambda_0 > \overline{\lambda} = \frac{1}{2n}\chi^2_{\alpha/2}(2T+2)\}, \tag{4.7.49}$$

pastarojo intervalo pasikliovimo lygmuo $Q = 1-\alpha$.

4.7.8 pastaba. Jeigu statistika T įgyja reikšmę 0, tai (4.7.45) ir (4.7.46) formulėse reikia imti $F(2n\lambda_0|0) = 1$.

4.7.13 pavyzdys. *Hipotezės apie Puasono skirstinio parametro reikšmes tikrinimas.* Tarkime, pagal didumo $n = 40$ paprastąją imtį, gautą stebint a. d. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, surasta parametro λ NMD įvertinio realizacija $\hat{\lambda} = 2,0$. Reikšmingumo lygmens $\alpha = 0,05$ kriterijumi patikrinsime hipotezę $H : \lambda \ge 2,5$, kai alternatyva yra $\bar{H}_2 : \lambda < 2,5$.

Kai hipotezė H teisinga ir $\lambda = \lambda_0 = 2,5$, tai a. d. $T = \sum_i X_i$ turi Puasono skirstinį su parametru $n\lambda_0 = 100$. Kadangi $\mathbf{P}\{T \le 83|\lambda = \lambda_0\} = 0,0463 < 0,05$, o $\mathbf{P}\{T \le 84|\lambda = \lambda_0\} = 0,0575 > 0,05$, tai reikšmingumo lygmens TG kriterijus yra toks: hipotezė H atmetama, kai $T \le 83$, atmetama su tikimybe $\gamma = 0,327$, kai $T = 84$, ir priimama kitais atvejais. Kadangi šiame pavyzdyje statistikos T realizacija yra $T = \hat{\lambda}n = 80$, tai hipotezė H atmetama.

Dažniau naudojami nerandomizuoti kriterijai, gaunami šiek tiek sumažinus reikšmingumo lygmenį. Šiame pavyzdyje nerandomizuotu kriterijumi hipotezė H būtų atmetama, kai $T \le 83$. Kriterijaus reikšmingumo lygmuo $\alpha' = 0,0463 < 0,05$.

Kriterijų galima suformuluoti P reikšmių terminais: hipotezė atmetama, kai P reikšmė $pv = \mathbf{P}\{T \le 80|\lambda = \lambda_0\} = 0,0226$ yra mažesnė už reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0,05$. Hipotezė atmetama.

Pagaliau kriterijų galime suformuluoti pasikliovimo intervalo terminais. Randame parametro λ pasikliovimo lygmens $Q = 1 - 2\alpha = 0,9$ pasikliovimo intervalą

$$(\underline{\lambda};\ \overline{\lambda}) = (\frac{1}{2n}\chi^2_{1-\alpha}(2T);\ \frac{1}{2n}\chi^2_{\alpha}(2T+2)) = (\frac{1}{80}\chi^2_{0,95}(160);\ \frac{1}{80}\chi^2_{\alpha}(162)) = (1,6470;\ 2,4088).$$

Kadangi $\overline{\lambda} < 2,5$, t. y. pasikliovimo intervalas pasislinkęs į kairę nuo hipotetinės reikšmės $\lambda_0 = 2,5$, tai hipotezę atmetame.

4.7.8. Binominis skirstinys

Tarkime, $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis, gauta stebint a. d. $X \sim B(1, p), 0 < p < 1$. Imties tankis (skaičiuojančiojo mato atžvilgiu) yra

$$f(\mathbf{X},\ p) = \exp\{\theta T(\mathbf{X}) - B(\theta)\},$$

čia

$$\theta = \ln \frac{p}{1-p}, \quad T = T(\mathbf{X}) = X_1 + \cdots + X_n, \quad B(\theta) = -n\ln(1-p),$$

priklauso vienparametrei eksponentinio tipo skirstinių (4.3.6) šeimai. Todėl egzistuoja TG kriterijai hipotezei dėl p reikšmės tikrinti, kai alternatyvos vienpusės, ir TGN kriterijus – kai alternatyva dvipusė. Šių kriterijų sudarymas detaliai aptartas 4.2.2 ir 4.3.2 pavyzdžiuose.

Tikrinant hipotezę $H_1 : p \leq p_0$ (arba $p = p_0$), kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : p > p_0$, TG kriterijus yra

$$\varphi(T) = \begin{cases} 1, & \text{kai}\ \ T > m, \\ \gamma, & \text{kai}\ \ T = m, \\ 0, & \text{kai}\ \ T < m; \end{cases} \tag{4.7.50}$$

čia konstantos m ir γ randamos iš sąlygos

$$\mathbf{E}_{p_0}(\varphi(T)) = \sum_{k=m+1}^{n} C_n^k p_0^k (1-p_0)^{n-k} + \gamma C_n^m p_0^m (1-p_0)^{n-m} = \alpha.$$

Analogiškai, tikrinant hipotezę $H_2 : p \geq p_0$ (arba $p = p_0$), kai alternatyva yra $\bar{H}_2 : p < p_0$, TG kriterijus yra

$$\varphi(T) = \begin{cases} 1, & \text{kai}\ \ T < m, \\ \gamma, & \text{kai}\ \ T = m, \\ 0, & \text{kai}\ \ T > m; \end{cases} \tag{4.7.51}$$

čia konstantos m ir γ randamos iš sąlygos

$$\mathbf{E}_{p_0}(\varphi(T)) = \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k p_0^k (1-p_0)^{n-k} + \gamma C_n^m p_0^m (1-p_0)^{n-m} = \alpha.$$

Tikrinant hipotezę $H_3 : p = p_0$, kai alternatyva dvipusė, egzistuoja TGN kriterijus (žr. 4.3.2 pavyzdį)

$$\varphi(T) = \begin{cases} 1, & \text{kai}\ \ T < m_1 \ \text{arba}\ T > m_2, \\ \gamma_i, & \text{kai}\ \ T = m_i,\ i = 1,\ 2, \\ 0, & \text{kai}\ \ m_1 < T < m_2; \end{cases} \tag{4.7.52}$$

čia konstantos $m_1,\ m_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2$ randamos iš lygčių sistemos ($q_0 = 1 - p_0$)

$$\begin{cases} \sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} C_n^k p_0^k q_0^{n-k} + \sum_{i=0}^{2} (1-\gamma_i) C_n^{m_i} p_0^{m_i} q_0^{n-m_i} = 1 - \alpha, \\ \sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} C_{n-1}^{k-1} p_0^{k-1} q_0^{n-k} + \sum_{i=0}^{2} (1-\gamma_i) C_{n-1}^{m_i-1} p_0^{m_i-1} q_0^{n-m_i} = 1 - \alpha. \end{cases}$$

Nereikalaujant, kad reikšmingumo lygmuo būtų tiksliai lygus α, t. y. įtraukiant taškus $T = m_i$ į priėmimo sritį, vietoje (4.7.50) nerandomizuotą kriterijų galima suformuluoti taip. Tegu m' yra mažiausias sveikasis skaičius, kuriam $\mathbf{P}_{p_0}\{T \geq m'\} \leq \alpha$. Nerandomizuotas kriterijus (analogiškai Puasono skirstiniui) gali būti užrašyta tokiais trimis ekvivalenčiais pavidalais:

$$K_1 = \{\mathbf{X} : T \geq m'\} \Leftrightarrow pv = I_{p_0}(t,\ n-t+1) \leq \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\mathbf{X} : p_0 \leq \underline{p} = X_{1-\alpha}(T,\ n-T+1)\}; \qquad (4.7.53)$$

čia intervalo pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - 2\alpha$, o t yra statistikos T realizacija.

Pažymėję m'' didžiausiąjį sveikąjį skaičių, kuris tenkina nelygybę $\mathbf{P}_{p_0}\{T \leq m''\} \leq \alpha$, vietoje (4.7.51) kriterijaus gauname nerandomizuotą kriterijų, kuris taip pat gali būti užrašytas trimis ekvivalenčiais pavidalais

$$K_2 = \{\mathbf{X} : T \leq m''\} \Leftrightarrow pv = 1 - I_{p_0}(t+1,\ n-t) \leq \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\mathbf{X} : p_0 > \overline{p} = X_{1-\alpha}(T+1,\ n-T)\}; \qquad (4.7.54)$$

čia intervalo pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - 2\alpha$.

Pažymėkime m'' didžiausią sveikąjį skaičių, kuriam $\mathbf{P}_{p_0}\{T \leq m''\} \leq \alpha/2$, o m'– mažiausiąjį sveikąjį skaičių, kuriam $\mathbf{P}_{p_0}\{T \geq m'\} \leq \alpha/2$. Tada vietoje (4.7.52) kriterijaus gauname nerandomizuotą paslinktąjį, tačiau lengviau randamą kriterijų:

$$K_3 = \{\mathbf{X} : T \leq m'' \text{ arba } T \geq m'\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow pv = 2\min(I_{p_0}(t,\ n-t+1),\ I_{p_0}(t+1,\ n-t)) \leq \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\mathbf{X} : p_0 < \underline{p} = X_{1-\alpha/2}(T,\ n-T+1) \text{ arba } p_0 > \overline{p} = X_{\alpha/2}(T+1,\ n-T)\}; \qquad (4.7.55)$$

čia intervalo pasikliovimo lygmuo $Q = 1 - \alpha$. Šiose lygybėse $X_\alpha(\gamma,\ \eta)$ yra beta skirstinio su parametrais γ ir η eilės α kritinė reikšmė.

4.7.14 pavyzdys. *Atrankinės kontrolės plano parinkimas.* Atliekant išleidžiamąją produkcijos kontrolę, iš pagamintos per vieną parą produkcijos atsitiktinai atrenkama n gaminių ir nustatomas defektinių gaminių skaičius X. Jeigu $X \leq d$, tai produkcija pateikiama vartotojui už normalią kainą. Jeigu $X > d$, tai produkcijos kaina sumažinama. Gamintojas įsitikinęs, kad defektinių gaminių dalis neviršija 0,02 (priimtinas defektingumo lygis), ir pageidauja, kad produkcija būtų pateikta už normalią kainą su tikimybe, ne mažesne už 0,9, jeigu defektingumas neviršija 0,02. Vartotojas reikalauja, kad produkcijos kaina būtų sumažinta su tikimybe, ne mažesne už 0,95, kai defektinių gaminių dalis ne mažesnė už 0,06 (nepriimtinas defektingumas). Reikia pasiūlyti atrankinės kontrolės planą, kuris tenkintų gamintojo ir vartotojo pageidavimus, o tikrinamų gaminių skaičius n būtų minimalus.

Tarkime, kad defektiniai gaminiai pasirodo nepriklausomai vienas nuo kito su pastovia tikimybe p. Tada a. d. X skirstinys yra binominis $X \sim B(n,\ p)$. Tikrinama hipotezė H_1 : $p \leq p_0 = 0,02$, kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : p > 0,02$. Kontrolės plano charakteristikos n ir d turi tenkinti nelygybes

$$\mathbf{P}\{X \leq d | p = p_0\} = \sum_{m=0}^{d} C_n^m p_0^m (1-p_0)^{n-m} = I_{1-p_0}(n-d, d+1) \geq 0,9,$$

$$\mathbf{P}\{X \leq d | p = p_1 = 0,06\} = \sum_{m=0}^{d} C_n^m p_1^m (1-p_1)^{n-m} = I_{1-p_1}(n-d, d+1) \leq 0,05.$$

Kadangi n ir d yra sveikieji skaičiai, tai šias nelygybes galima išspręsti naudojant kompiuterį tiesiog perrinkimo būdu. Kad būtų sumažinta charakteristikų n ir d kitimo sritis, iš pradžių galima rasti jų apytiksles reikšmes naudojant, pavyzdžiui, Muavro ir Laplaso CRT. Gauname nelygybes

$$\Phi\left(\frac{d-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) \geq 0,9, \quad \Phi\left(\frac{d-np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right) \leq 0,05 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{d-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \geq z_{0,1}, \quad \frac{d-np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} \leq -z_{0,05}.$$

Išsprendę šias nelygybes gauname $n \geq 203$, $d \approx 6,6$.

Galutinį atsakymą gauname naudodami kompiuterį (pavyzdžiui, EXCEL programų sistemoje suaktyvinę funkciją „BINOMDIST“). Randame, kad minimalus tikrinamų gaminių skaičius $n = 195$, o priėmimo skaičius $d = 6$. Naudojant šį kontrolės planą $\mathbf{P}\{X \leq 6|p = 0,02\} = 0,9016 > 0,9$, $\mathbf{P}\{X > 6|p = 0,06\} = 0,9510 > 0,95$, t. y. gamintojo ir vartotojo reikalavimai tenkinami.

4.7.9. Dviejų Puasono skirstinių parametrų palyginimo hipotezės

Sakykime, paprastosios imtys $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_m)^T$ ir $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^T$ gautos stebint nepriklausomus a. d. $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ ir $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, $0 < \lambda_1, \ \lambda_2 < \infty$. Jungtinės imties tankis (skaičiuojančiojo mato atžvilgiu) priklauso dviparametrių eksponentinio tipo skirstinių šeimai. Jį galime pertvarkyti taip (žr. 4.4.1 pavyzdį):

$$f(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}, \lambda_1\lambda_2) = \exp\{\theta U + \vartheta T - B(\theta, \vartheta)\}h(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}),$$

$$\theta = \ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \vartheta = \ln\lambda_1, \quad U = \sum_i X_i, \quad T = \sum_i X_i + \sum_i Y_i,$$

$$B(\theta, \ \vartheta) = m\lambda_1 + n\lambda_2.$$

Remiantis 4.4.2 teorema, egzistuoja TGN kriterijai hipotezėms dėl θ (kartu ir dėl santykio λ_2/λ_1) reikšmių tikrinti. Jie sudaromi kaip sąlyginiai paviršiuose $T = t$. Kadangi sąlyginis U skirstinys, kai $T = t$, $\lambda_1/\lambda_2 = c_0$, yra binominis $B(t, mc_0/(mc_0 + n))$, tai kriterijus hipotezei $H : \lambda_1/\lambda_2 = c_0$ tikrinti sudarome kaip ir ankstesniame skyrelyje, kur tikimybės p hipotetine reikšme reikia laikyti $p_0 = mc_0/(mc_0 + n)$. Tikrinant hipotezę reikia tarti, kad Bernulio eksperimentų skaičius t, o teigiamų įvykių skaičius – U.

4.7.15 pavyzdys. Per pirmąją ir antrąją valandą į komutatorių buvo kreiptasi atitinkamai 15 ir 13 kartų. Kitą dieną per 5 valandas buvo kreiptasi 45 kartus. Tarus, kad iškvietimų skaičiai pasiskirstę pagal Puasono dėsnį su parametru λ (vidutinis iškvietimų skaičius per valandą), reikia patikrinti, ar iškvietimų intensyvumas nepakito (reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0,05$).

Turime dvi n. a. d. X ir Y, pasiskirsčiusių pagal Puasono dėsnį su parametrais λ_1 ir λ_2, imtis, kurių didumai $m = 2$ ir $n = 1$. Reikia patikrinti hipotezę $H_3 : \lambda_1/\lambda_2 = 1/5$, kai alternatyva $\bar{H}_3 : \lambda_1/\lambda_2 \neq 1/5$. Vietoje šios hipotezės tikriname hipotezę $H_3' : p = p_0 = 2/7$, kai alternatyva yra $\bar{H}_3' : p \neq 2/7$, o bandymų skaičius yra a. d. $T = X_1 + X_2 + Y$, jo realizacija $t = 73$; teigiamo įvykio įvykimų skaičiaus $U = X_1 + X_2$ realizacija $u = 28$. Pritaikę (4.7.55) formulę, randame tikimybės pasikliovimo intervalą, kurio pasikliovimo lygmuo $Q = 0,95$. Gauname $(\underline{p}, \overline{p}) = (0,272, \ 0,505)$. Kadangi $p_0 = 0,286$ patenka į šį intervalą, tai darome išvadą, kad turimi stebėjimai suformuluotai hipotezei neprieštarauja.

Naudojant kriterijų P reikšmių terminais, randame $pv = 2\min(I_{5/7}(45,\ 29), I_{2/7}(28,\ 46)) = 2\min(0,9736,\ 0,0454) = 0,0908 > 0,05$. Hipotezė neatmetama.

4.7.10. Dviejų binominių skirstinių parametrų palyginimo hipotezės

Sakykime, paprastosios imtys $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_m)^T$ ir $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^T$ gautos stebint nepriklausomus a. d. $X \sim B(1,\ p_1)$ ir $Y \sim B(1,\ p_2)$, $0 < p_1,\ p_2 < 1$. Jungtinės imties tankis (skaičiuojančiojo mato atžvilgiu) priklauso dviparametrių eksponentinio tipo skirstinių šeimai. Jį galime pertvarkyti taip:

$$f(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}, |p_1, p_2) = \exp\{\theta U + \vartheta T - B(\theta,\ \vartheta)\},$$

$$\theta = \ln\left(\frac{p_1(1-p_2)}{(1-p_1)p_2}\right), \quad \vartheta = \ln\frac{p_2}{1-p_2}, \quad U = \sum_i X_i, \quad T = \sum_i X_i + \sum_i Y_i,$$

Remiantis 4.4.2 teorema, egzistuoja TGN kriterijai hipotezėms dėl θ reikšmių tikrinti. Jie sudaromi kaip sąlyginiai paviršiuose $T = t$. Hipotezė $H : \theta = 0$ yra ekvivalenti hipotezei $H' : p_1 = p_2$. Nesunkiai patikriname, kad kai tikimybės vienodos $p_1 = p_2$, a. d. U sąlyginis skirstinys, kai $T = t$, yra hipergeometrinis $H(n+m,\ n,\ t)$.

Vadinasi, hipotezė $H_1 : p_1 \leq p_2$ (arba $p_1 = p_2$), kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : p_1 > p_2$, kaip ir ankstesniuose skyreliuose taikant nerandomizuotą kriterijų, yra atmetama, kai $U \geq k'$; čia k' yra mažiausias sveikasis skaičius, tenkinantis nelygybę

$$1 - H(k'-1|n+m,\ n,\ t) = \sum_{i=k'}^{\min(n,t)} \frac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{n+m}^t} \leq \alpha.$$

Norint įsitikinti, kad U pateko į kritinę sritį, galima apskaičiuoti P reikšmę, t. y. hipotezę atmesti, kai

$$1 - H(u-1|n+m,\ n,\ t) \leq \alpha; \tag{4.7.56}$$

čia u yra statistikos U realizacija.

Analogiškai tikrinant hipotezę $H_2 : p_1 \geq p_2$ (arba $p_1 = p_2$), kai alternatyva yra $\bar{H}_2 : p_1 < p_2$, kritinė sritis gali būti užrašyta taip:

$$pv = H(u|n+m,\ n,\ t) \leq \alpha. \tag{4.7.57}$$

Hipotezė $H_3 : p_1 = p_2$, kai alternatyva $\bar{H}_3 : p_1 \neq p_2$ yra dvipusė, atmetama, kai teisinga (4.7.56) arba (4.7.57) nelygybės, kuriose α pakeista į $\alpha/2$.

Asimptotiškai, kai $m, n \to \infty$, hipergeometrinį skirstinį galime aproksimuoti normaliuoju

$$Z = \frac{U - n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}\hat{q}\frac{m}{m+n-1}}} \xrightarrow{d} Y \sim N(0,\ 1), \quad \hat{p} = \frac{T}{n+m}, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p}.$$

Tada, pavyzdžiui, pasirinkę hipotezę H_2, gautume kritinę sritį

$$K_2 = \{(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}) : Z < -z_\alpha\}. \tag{4.7.58}$$

Šiek tiek tikslesnį kriterijų gautume įvedę diskretumo pataisą:

$$\tilde{K}_2 = \{(\mathbf{X}, \boldsymbol{Y}) : Z < -z_\alpha - \frac{\sqrt{n+m-1}}{2\sqrt{mn\hat{p}\hat{q}}}\}. \tag{4.7.59}$$

4.7.16 pavyzdys. Vienos brigados 20 darbininkų buvo paskiepyti nuo gripo, per 6 mėnesius iš jų susirgo 6 darbininkai. Tos pačios brigados 5 darbininkai skiepytis atsisakė, 4 iš jų susirgo gripu per tą patį 6 mėnesių laikotarpį. Ar galima daryti išvadą apie teigiamą priešgripinio serumo poveikį (žr. [5])?

Tarkime, p_1 ir p_2 yra tikimybės, kad susirgs pirmosios ir antrosios grupės darbininkai. Reikia patikrinti hipotezę $H_1 : p_1 = p_2$, kai alternatyva yra $\bar{H}_1 : p_1 < p_2$. Parinkime reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0,05$. Tada $n + m = 25$, $t = 6 + 4 = 10$, $u = 6$, $n = 20$. Naudojantis (4.7.56) kriterijumi, hipotezę reikia atmesti, jeigu suma

$$pv = H(u|n+m,\ n,\ t) = \sum_{i=\max(0,t-m)}^{u} \frac{C_n^i C_m^{t-i}}{C_{n+m}^t} \le 0,05.$$

Tada (kadangi $t - m = 5$, tai suma turi tik du dėmenis)

$$pv = H(6|25,\ 10,\ 20) = \frac{C_{20}^5 C_5^5}{C_{25}^{10}} + \frac{C_{20}^6 C_5^4}{C_{25}^{10}} = 0,064,$$

taigi iškeltosios hipotezės neatmetame.

Jeigu taikytume apytikslį (4.7.58) kriterijų (to nereikėtų daryti, nes $m = 5$ yra mažas), tai hipotezę reikėtų atmesti, nes Z įgyja reikšmę -2, o $-z_{0,05} = -1,64$. Jeigu taikytume (4.7.59) kriterijų su diskretumo pataisa, tai gautume tą pačią išvadą, kaip ir taikydami (4.7.57), nes reiškinys dešiniojoje (4.7.59) nelygybės pusėje lygus -2,14. Matome, kad Jeitso diskretumo pataisos įtaka gali būti gana didelė.

4.7.11. Nepriklausomumo tikrinimas pagal 2×2 lentelę

Tarkime, imtyje yra N objektų, kurie gali turėti A ir B savybes. Stebėjimo rezultatai surašyti lentelėje

	A	$\bar{A}$	Σ
B	X	X'	n
$\bar{B}$	Y	Y'	$N-n$
Σ	m	$N-m$	N

Čia X yra skaičius objektų, turinčių savybes A ir B, X' – turinčių savybę B ir neturinčių savybės A, $n = X + X'$ – turinčių savybę B (neatsižvelgiant į A) ir t. t.

Atsitiktinio vektoriaus $(X, X', Y, Y')^T$ skirstinys yra polinominis:

$$\mathbf{P}\{X = x, X' = x', Y = y, Y' = y'\} = \frac{N!}{x!x'!y!y'!} p_{AB}^x p_{\bar{A}B}^{x'} p_{A\bar{B}}^y p_{\bar{A}\bar{B}}^{y'}$$

$$= h(x, x', y, y') \exp\{\theta U + \vartheta_1 T_1 + \vartheta_1 T_2 - B(\theta, \vartheta_1, \vartheta_2)\},$$

$$\theta = \ln \frac{p_{AB} p_{\bar{A}\bar{B}}}{p_{\bar{A}B} p_{A\bar{B}}}, \quad \vartheta_1 = \ln \frac{p_{\bar{A}B}}{p_{A\bar{B}}}, \quad \vartheta_2 = \ln \frac{p_{A\bar{B}}}{p_{\bar{A}\bar{B}}},$$

$$U = x, \quad T_1 = x + x', \quad T_2 = x + y.$$

Matome, kad tikėtinumo funkcija yra (4.4.2) pavidalo. Todėl, remiantis 4.4.2 teorema, egzistuoja TGN kriterijai tikrinti hipotezėms dėl parametro θ reikšmių.

Sakykime, reikia patikrinti požymių A ir B nepriklausomumo hipotezę, t. y. $H : p_{AB} = p_A p_B$. Akivaizdu, kad ši hipotezė ekvivalenti hipotezei $H' : \theta = 0$.

Sudarydami hipotezės H' tikrinimo kriterijų, turime nagrinėti X sąlyginį skirstinį, kai yra fiksuoti $X + X' = t_1$ ir $X + Y = t_2$, o $\theta = 0$. Gauname, kad šis skirstinys yra hipergeometrinis $H(N,\ t_1,\ t_2)$:

$$\mathbf{P}\{X = x | X + X' = t_1,\ X + Y = t_2,\ \theta = 0\} = \frac{C_{t_1}^x C_{N-t_1}^{t_2-x}}{C_N^{t_2}}. \tag{4.7.60}$$

Taigi nepriklausomumo hipotezės pagal 2×2 lentelę tikrinimo kriterijai gali būti sudaryti kaip ir 4.7.10 skyrelyje.

4.7.12. Mizeso atsitiktinių kampų skirstinys.

Apie atsitiktinių kampų (arba taškų ant apskritimo) skirstinius žr. 3.7.15 skyrelį.

Atsitiktinio kampo φ Mizeso skirstinio $M(\mu,\ \theta)$ tankio funkcija

$$f(x|\mu, \theta) = \frac{1}{2\pi I_0(\theta)} e^{\theta \cos(x-\mu)}, \quad \theta > 0 \quad 0 \le \mu < 2\pi.$$

Tegu $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ yra paprastoji imtis, gauta stebint a. d. $\varphi \sim M(\mu, \theta)$. Tikėtinumo funkcija

$$L = [2\pi I_0(\theta)]^{-n} \exp\{\theta \sum_{j-1}^{n} \cos(\varphi_j - \mu)\} = [2\pi I_0(\theta)]^{-n} \exp\{n\theta[\bar{C}\cos\mu + \bar{S}\sin\mu]\},$$

$$\bar{C} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \cos\varphi_j, \quad \bar{S} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \sin\varphi_j.$$

Remdamiesi faktorizacijos kriterijumi darome išvadą, kad vektorius $(\bar{C}, \bar{S})^T$ yra parametro $(\mu, \theta)^T$ pakankamoji statistika. Skyrelyje 3.7.15 radome parametrų DT įvertinius:

$$\hat{\mu} = \operatorname{arctg}\frac{\bar{S}}{\bar{C}}, \quad \hat{\theta} = A^{-1}(\bar{R}), \quad \bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2}, \quad A(\theta) = [\ln I_0(\theta)]'.$$

Tikėtinumo funkcijos maksimumas

$$\max_{\mu,\theta} L = [2\pi I_0(\hat{\theta})]^{-n} \exp\{n\hat{\theta}\bar{R}\}.$$

1. *Skirstinio tolygumo hipotezė.* Pirmasis klausimas, kuris kyla nagrinėjant atsitiktinius kampus: ar stebimasis kampas nėra tolygiai pasiskirstęs ir tankis $f(x) \equiv 1/2\pi$. Kadangi Mizeso skirstinys artėja į tolygųjį skirstinį, kai $\theta \to 0$, tai

tolygumo hipotezė virsta parametrine $H_0 : \theta = 0$, kai alternatyva yra $H_1 : \theta > 0$. Tikėtinumų santykio statistika

$$\Lambda = [I_0(\hat{\theta})]^n e^{-n\hat{\theta}\bar{R}}$$

yra monotoniškai mažėjanti $\bar{R}$ atžvilgiu, todėl kritinė sritis

$$\Lambda < \Lambda_{1-\alpha}$$

yra ekvivalenti kritinei sričiai (Relėjaus kriterijus)

$$\bar{R} > r_\alpha; \tag{4.7.61}$$

čia r_α yra statistikos $\bar{R}$ lygmens α kritinė reikšmė:

$$\mathbf{P}\{\bar{R} > r_\alpha | H_0\} = \alpha.$$

Knygoje [14] yra pateikta statistikos $\bar{R}$ tankio funkcija, kai teisinga hipotezė ir kai teisinga alternatyva iš klasės $\theta > 0$ bei kritinių reikšmių r_α lentelės. Statistikos $R = n\bar{R}$ tankio funkcija

$$g(r|\theta) = [I_0(\theta)]^{-n} I_0(\theta r) h_n(r), \quad 0 < r < n,$$

$$h_n(r) = r \int_0^\infty u J_0(ru) J_0^n(u) du;$$

čia $J_0(x)$ yra standartinė nulinės eilės Beselio funkcija:

$$J_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}.$$

Kai $\theta = 0$, tereikia įrašyti $I_0(\theta) = I_0(r\theta) = 1$.

Kadangi esant teisingai hipotezei $n\bar{C}$ yra suma vienodai pasikirsčiusių a. d. $\cos\varphi_j$, turinčių nulinį vidurkį ir dispesiją $1/2$, o $n\bar{S}$ yra suma vienodai pasiskirsčiusių a. d. $\sin\varphi_j$ su tokiais pačiais momentais, be to, $\cos\varphi_j$ ir $\sin\varphi_j$ nekoreliuoti, tai remiantis CRT galima tvirtinti, kad šios statistikos asimptotiškai normalios. Taigi, statistika $2n\bar{R}^2$ asimptotiškai turi χ^2 skirstinį su dviem laisvės laipsniais. Todėl prie didelių n vietoje Relėjaus kriterijaus galime naudoti paprastesnį asimptotinį kriterijų: hipotezė H_0 atmetama, kai teisinga nelygybė

$$2n\bar{R}^2 > \chi^2_\alpha(2). \tag{4.7.62}$$

Grupuotieji duomenys. Praktiškai stebint atsitiktinius kampus duomenys dažniausiai būna sugrupuoti į sektorius. Tarkime j-asis sektorius sudaro intervalo $[0,\ 2\pi)$ dalį π_{j0}, $\pi_{10} + ... + \pi_{k0} = 1$. Atsitiktinis vektorius $(V_1, ..., V_k)^T$, $V_1 + ... + V_k = n$, kuriame V_j reiškia kampų, patekusių į j-ąjį sektorių, skaičių, turi polinominį skirstinį $\mathcal{P}_k(n, (\pi_1, ..., \pi_k))$; čia π_j tikimybė kampui patekti į

j-ąjį sektorių. Vietoje kampų skirstinio tolygumo hipotezės H_0 tikrinkime paprastąją parametrinę hipotezę $H_0' : \pi_1 = \pi_{10}, ..., \pi_k = \pi_{k0}$, kad patekimo į sektorius tikimybės proporcingos jų didumams.

Tikėtinumų santykio statistika

$$\Lambda = \frac{\pi_{10}^{V_1} \cdot ... \cdot \pi_{k0}^{V_k}}{\max_{\pi_1,...,\pi_k}(\pi_1^{V_1} \cdot ... \cdot \pi_k^{V_k})} = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{\pi_{j0}}{\hat{\pi}_j}\right)^{V_j}.$$

Parametrų $\pi_1, ..., \pi_k$ DT įvertiniai surasti 3.5.13 pavyzdyje: $\hat{\pi}_j = V_j/n, \ \ j = 1, ..., k$. Remdamiesi 3.5.5 teorema gauname, kad asimptotiškai ($n \to \infty$) statistika $-2\ln\Lambda$ turi χ^2 skirstinį su $k-1$ laisvės laipsnių (yra $k-1$ parametras.) Taigi parametrinė hipotezė H_0' atmetama asimptotiniu reikšmingumo lygmens α kriterijumi, kai

$$U = -2\ln\Lambda = 2\sum_{j=1}^{k} V_j \ln\left(\frac{V_j}{n\pi_{j0}}\right) > \chi^2_\alpha(k-1). \tag{4.7.63}$$

Arba, pažymėjus u statistikos U realizaciją, kriterijus išreiškiamas asimptotinių P reikšmių terminais: hipotezė atmetama, kai

$$pv_a = \mathbf{P}\{\chi^2_{k-1} > u\} < \alpha.$$

Atmetus hipotezę H_0' natūralu atmesti ir hipotezę H_0.

2. *Hipotezės dėl parametrų μ ir θ reikšmių.* Kriterijus dėl parametrų reikšmių galima rasti knygoje [14]. Kadangi jie gana sudėtingi, apsiribosime asimptotiniais kriterijais, grindžiamais 3.7.15 skyrelyje gautomis DT įvertinių $\hat{\mu}$ ir $\hat{\theta}$ skirstinių aproksimacijomis.

Tikrindami hipotezę $H : \mu = \mu_0$, kai alternatyvos yra $H_1 : \mu > \mu_0$, $H_2 : \mu < \mu_0$ arba dvipusė $H_3 : \mu \neq \mu_0$, remsimės tuo, kad, kai teisinga hipotezė H ir $n \to \infty$, statistika

$$U = \sqrt{n\hat{\theta}\bar{R}}(\hat{\mu} - \mu_0) \xrightarrow{d} Z \sim N(0,\ 1).$$

Hipotezė H atmetama asimptotiniu reikšmingumo lygmens α kriterijumi, kai yra alternatyvos H_1, H_2, H_3, jeigu teisingos nelygybės atitinkamai

$$U > z_\alpha \quad U < -z_\alpha, \quad |U| > z_{\alpha/2}. \tag{4.7.64}$$

Arba, pažymėjus u statistikos U realizaciją, kriterijai asimptotinių P reikšmių terminais formuluojami taip: hipotezė atmetama, kai atitinkamai

$$pv_a = 1 - \Phi(u) < \alpha, \quad pv_a = \Phi(u) < \alpha, \quad pv_a = 2(1 - \Phi(|u|)) < \alpha.$$

Tikrindami hipotezę $H : \theta = \theta_0$, kai alternatyvos yra $H_1 : \theta > \theta_0$, $H_2 : \theta < \theta_0$ arba dvipusė $H_3 : \theta \neq \theta_0$, remsimės tuo, kad esant teisingai hipotezei H ir $n \to \infty$, statistika

$$V = \sqrt{n[1 - \bar{R}^2 - \bar{R}/\hat{\theta}]}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{d} Z \sim N(0,\ 1).$$

Hipotezė H atmetama asimptotiniu reikšmingumo lygmens α kriterijumi esant alternatyvoms H_1, H_2, H_3, kai atitinkamai teisingos nelygybės

$$V > z_\alpha \quad V < -z_\alpha, \quad |V| > z_{\alpha/2}. \tag{4.7.65}$$

Arba, pažymėjus v statistikos V realizaciją, kriterijai asimptotinių P reikšmių terminais formuluojami taip: hipotezė atmetama, kai atitinkamai

$$pv_a = 1 - \Phi(v) < \alpha, \quad pv_a = \Phi(v) < \alpha, \quad pv_a = 2(1 - \Phi(|v|)) < \alpha.$$

4.7.17 pavyzdys. (**3.7.12** pavyzdžio tęsinys). 3.7.12 pratimo sąlygomis patikrinkime hipotezę, kad prapuolimo kampas yra pasiskirstęs tolygiai.

Metus pirmą žvilgsnį į duomenų lentelę, akivaizdu, kad prielaida dėl kampo tolygaus pasiskirstymo turėtų būti atmesta.

Tą patvirtina ir skaičiavimai. Statistika $2n\bar{R}^2$, kuri esant teisingai hipotezei asimptotiškai turi χ^2 skirstinį su 2 laisvės laipsniais, įgijo reikšmę 739,25, o statistika $-2\ln\Lambda$, kuri esant teisingai hipotezei asimptotiškai turi χ^2 skirstinį su 17 laisvės laipsnių, įgijo reikšmę 909,66.

Taigi šiems duomenims aprašyti turėtų būti parinktas kitoks modelis. Ar tokiu modeliu galėtų būti Mizeso skirstinys aptarsime trečioje vadovėlio dalyje.

4.8. Pratimai

4.2. skyrelis

4.1. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a.d. X, kurio skirstinys priklauso šeimai $\mathcal{P} = \{f(x;\theta), \theta = \theta_0, \theta = \theta_1\}$; čia tankio funkcija $f(x;\theta) = \theta\exp\{-\theta x\}, x > 0$. Raskite galingiausią hipotezės $H : \theta = \theta_0$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \theta = \theta_1$, tikrinimo kriterijų (reikšmingumo lygmuo lygus α). Apskaičiuokite rastojo kriterijaus galią.

4.2. Tegu X yra atsitiktinis dydis, kurio skirstinys priklauso Koši skirstinių šeimai $\mathcal{P} = \{f(x;\theta), \theta = 0, \theta = 1\}$; čia

$$f(x;\ \theta) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1 + (x-\theta)^2},\ -\infty < x < \infty.$$

Raskite galingiausią kriterijų hipotezei $H : \theta = 0$, kai alternatyva $\bar{H} : \theta = 1$, tikrinti. Imties didumas $n = 1$.

4.3. Raskite galingiausią kriterijų hipotezei H, kad a.d. X yra pasiskirstęs pagal standartinį normalųjį skirstinį $N(0,\ 1)$, esant alternatyvai $\bar{H}$, kad a.d. X skirstinys yra:
a) Laplaso, kurio tankis

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|\mathrm{x}|},\ -\infty < \mathrm{x} < \infty;$$

b) tolygus intervale $(-\delta,\ \delta)$, tikrinti. Imties didumas lygus 1.

4.4. Paprastosios imties realizacija yra -0,260; -0,114; -0,325; 0,196; -0,174. Sudarykite galingiausiąjį kriterijų hipotezei H: stebimo a. d. skirstinys yra normalusis $N(0,\ 0,025)$, esant alternatyvai $\bar{H}$: stebimo a.d. skirstinys yra tolygusis $U(-0,5,\ 0,5)$, tikrinti. Ar atmetama hipotezė H pagal turimą realizaciją, jei reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0,1$?

4.5. Pagal paprastąją didumo n imtį raskite galingiausiąjį kriterijų hipotezei H: stebimo a.d. skirstinys $N(0,\ 1)$, esant alternatyvai $\bar{H}$: stebimo a. d. skirstinys yra $N(1,\ 1)$, tikrinti. Koks turėtų būti mažiausias imties didumas n, kad abiejų rūšių klaidų tikimybės neviršytų 0,01?

4.6. Paprastosios $n = 5$ didumo atsitiktinio dydžio $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$ imties realizacija yra 3,02; 2,96; 3,06; 3,07; 2,98. Raskite galingiausiąjį kriterijų hipotezei $H : \sigma^2 = 0,0036$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \sigma^2 < 0,0036$, tikrinti. Ar atmetama hipotezė H pagal turimą imties realizaciją, jeigu kriterijaus reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0,1$?

4.7. Yra $n = 1$ didumo imtis atsitiktinio dydžio $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, turinčio Puasono skirstinį. Tikrinama hipotezė $H : \lambda = \lambda_0$, kai alternatyva $\bar{H} : \lambda = \lambda_1$. Raskite galingiausiojo kriterijaus galią, kai $\lambda_0 = 0,1, \lambda_1 = 0,2$; $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 2$; $\lambda_0 = 10, \lambda_1 = 20$; $\lambda_0 = 0,1, \lambda_1 = 0,4$, o kriterijaus reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0,1$.

4.8. Imties $\mathbf{X}$ skirstinys priklauso šeimai $\mathcal{P} = \{f(\boldsymbol{x}, \theta), \theta = 1, 2\}$. Tikrinama paprastoji hipotezė $H : \theta = 1$, esant paprastajai alternatyvai $\bar{H} : \theta = 2$. Tegu η įgyja reikšmę 1, jeigu priimta hipotezė H, reikšmę 2, jeigu priimta alternatyva $\bar{H}$, ir reikšmę 0, jeigu atsisakoma sprendimo, kuri iš hipotezių teisinga. Pažymėkime

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}\{\eta = i|\mathbf{X} = \boldsymbol{x}\}, \; i = 1, 2, 0;$$

$$0 \leq \varphi_i(\boldsymbol{x}) \leq 1; \; \varphi_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_2(\boldsymbol{x}) + \varphi_0(\boldsymbol{x}) \equiv 1.$$

Pirmosios ir antrosios rūšies klaidų tikimybės yra

$$\alpha_{12} = \mathbf{P}\{\eta = 1|\theta = 2\} = \mathbf{E}(\varphi_1(\mathbf{X})|\theta = 2), \; \alpha_{21} = \mathbf{P}\{\eta = 2|\theta = 1\} = \mathbf{E}(\varphi_2(\mathbf{X})|\theta = 1).$$

Raskite kriterijų (t. y. raskite funkcijas $\varphi_i(\mathbf{X})$, $i = 1, 2, 0$), tenkinantį sąlygas $\alpha_{12} \leq \alpha$, $\alpha_{21} \leq \beta$ ir minimizuojantį tikimybes

$$\alpha_{02} = \mathbf{P}\{\eta = 0|\theta = 2\} = \mathbf{E}(\varphi_0(\mathbf{X})|\theta = 2), \; \alpha_{01} = \mathbf{P}\{\eta = 0|\theta = 1\} = \mathbf{E}(\varphi_0(\mathbf{X})|\theta = 1).$$

4.9. (**4.8** tęsinys). Tegu apriorinės hipotezių H ir $\bar{H}$ tikimybės yra ω_1 ir ω_2 ($\omega_1 + \omega_2 = 1$) ir β_{21} ir β_{12} – aposteriorinės tikimybės:

$$\beta_{21} = \mathbf{P}\{\theta = 2|\eta = 1\} = \frac{\alpha_{12}\omega_2}{\alpha_{12}\omega_2 + (1 - \alpha_{01} - \alpha_{21})\omega_1},$$

$$\beta_{12} = \mathbf{P}\{\theta = 1|\eta = 2\} = \frac{\alpha_{21}\omega_1}{\alpha_{21}\omega_1 + (1 - \alpha_{02} - \alpha_{12})\omega_2}.$$

Raskite kriterijų, tenkinantį sąlygas $\beta_{21} \leq b_2$, $\beta_{12} \leq b_1$ ir minimizuojantį tikimybes α_{01}, α_{02}.

4.10. Tegu H_0 ir H_1 yra paprastosios hipotezės ir reikšmingumo lygmuo $\alpha \in (0, 1)$. Be to, φ_* yra tolygiai galingiausias α lygmens kriterijus hipotezei H_0, kai alternatyva yra H_1, tikrinti, o kriterijaus galia $\beta < 1$, kai H_1 teisinga. Įrodykite, kad $1 - \varphi_*$ yra tolygiai galingiausias $1 - \beta$ lygmens kriterijus hipotezei H_1, kai alternatyva yra H_0, tikrinti.

4.11. Tegu X yra vienetinė imtis iš skirstinio, kurio tankio funkcija lygi $f_\theta(x)$. Raskite galingiausią lygmens $\alpha \in (0, 1/2)$ kriterijų hipotezei $H_0 : \theta = \theta_0$, kai alternatyva yra $H_1 : \theta = \theta_1$, tikrinti tokiais atvejais:
a) $f_\theta(x) = 2\theta^{-2}(\theta - x)$, $0 < x < \theta$, $\theta_0 < \theta_1$;
b) $f_\theta(x) = 2[\theta x + (1 - \theta)(1 - x)]$, $0 < x < 1$, $0 \leqslant \theta_1 < \theta_0 \leqslant 1$;
c) $f_{\theta_0}(x) = 4xI_{(0,\,1/2)}(x) + 4(1 - x)I_{(1/2,\,1)}(x)$ ir $f_{\theta_1}(x) = I_{(0,\,1)}(x)$.

4.12. Tegu $X_1, \ldots, X_n$ nepriklausomi vienodai pasiskirstę a. d., kurių tankio funkcija $f_\theta(x)$. Raskite galingiausią lygmens α kriterijų hipotezei $H_0 : \theta = \theta_0$, kai alternatyva yra $H_1 : \theta = \theta_1$, tikrinti tokiais atvejais:
a) $f_\theta(x) = \mathrm{e}^{-(\mathrm{x}-\theta)}$, $\theta < \mathrm{x} < \infty$, $\theta_0 < \theta_1$;
b) $f_\theta(x) = \theta x^{-2}$, $\theta < x < \infty$, $\theta_0 \neq \theta_1$.

4.13. Imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint binominį a. d. $B(1, p)$. Sudarykite kriterijų hipotezei $H : p = 0$, kai alternatyva yra $\bar{H} : p = 0,01$, tikrinti. Raskite mažiausiąjį imties didumą n, kad pirmosios ir antrosios rūšies klaidų tikimybės neviršytų 0,01.

4.3. skyrelis

4.14. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a. d. X, kurio skirstinys priklauso tolygiųjų skirstinių šeimai $\mathcal{P} = \{U(0, \theta), 0 < \theta < \infty\}$. Raskite TG kriterijus hipotezei $H : \theta = \theta_0$, esant vienpusėms ir dvipusei alternatyvoms, tikrinti.

4.15. Tegu$\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a. d. X, kurio skirstinys priklauso eksponentinių skirstinių šeimai $\mathcal{P} = \{f(x,\ \mu,\ \sigma), -\infty < \mu < \infty,\ 0 < \sigma < \infty\}$; čia tankis

$$f(x;\ \mu,\ \sigma) = \sigma e^{-\sigma(x-\mu)},\ \ \mu < x < \infty.$$

Raskite TG kriterijų hipotezėms

a) $H : \sigma = \sigma_0$, kai μ žinomas;

b) $H : \mu = \mu_0$, kai σ žinomas,

esant vienpusėms alternatyvoms, tikrinti.

4.16. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a.d. X, kurio skirstinys priklauso Bernulio skirstinių šeimai $\mathcal{P} = \{B(1,\ p),\ 0 < p < 1\}$. Reikia patikrinti hipotezę $H : p \leq p_0$, kai alternatyva yra $\bar{H} : p > p_0$. Raskite TG kriterijaus galios $\beta(p)$ reikšmes taškuose $p = 0,3,\ 0,4,\ 0,5,\ 0,6$, kai $n = 6,\ p_0 = 0,25$ ir kriterijaus reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0,05;\ 0,1;\ 0,2$. Naudodami nerandomizuotą kriterijų raskite minimalų imties didumą n, kad kriterijaus galia $\beta(p)$ tenkintų nelygybę $\beta(p) \geq 0,9$, kai $p \geq p_1$, ir: a) $p_0 = 0,2,\ p_1 = 0,4$; b) $p_0 = 0,02,\ p_1 = 0,04$, o kriterijaus reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0,1$.

4.17. Eksperimentais nustatyta, kad gamykla pagamina vidutiniškai 5 procentus defektingos produkcijos. Iš 50 atsitiktinai paimtų gaminių 6 gaminiai buvo su defektais. Patikrinkite prielaidą, kad gaminių su defektais procentas padidėjo. Kriterijaus reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0,05$.

4.18. Sėklų pirkėjas ir pardavėjas susitarė, kad sėklų partijos kainą nustatys po bandymo. Iš partijos buvo paimta 250 sėklų ir pasėta. Tegu X yra iš 250 sėklų išaugusių augalų turinčių tam tikrų savybių skaičius. Jeigu $X \leq 25$, tai sėklų partijos kaina normali; priešingu atveju sėklų partijos kaina sumažinama. Kiek procentų sėklų turi turėti minėtas savybes, kad tikimybė, jog partijos kaina bus normali, būtų lygi (apytiksliai) 0,95?

4.19. Parduodama elektros lempučių partija ($N = 10000$). Pirkėjas reikalauja atrankinės kontrolės, kurią atliekant lempučių partija būtų atmesta su tikimybe 0,95, jeigu joje lempučių su defektais yra 10 procentų. Pardavėjas įsitikinęs, kad lempučių su defektais procentas ne didesnis už 5. Jis nori, kad kiekvieną kartą, kai lempučių su defektais yra 5 procentai, partija būtų priimama su tikimybe 0,9. Pasiūlykite kriterijų, kuris tenkintų ir pirkėją, ir pardavėją.

4.20. Gaminant tam tikrą chemikalą, pageidautina, kad vartojamo vandens tūrio vienete būtų vidutiniškai ne daugiau kaip m_0 bakterijų. Nuo per didelės jų koncentracijos apsisaugoma taip: imama n vienodo tūrio V vandens pavyzdžių, kiekvieno iš tų pavyzdžių vanduo supilamas į kolbą su maitinamąja terpe. Jeigu pavyzdžio vanduo užterštas (t. y. jame yra nors viena bakterija), tai bakterijų kolonija plės is ir buvęs skaidrus tirpalas susidrums.

Vanduo laikomas pakankamai švariu ir vartojamas gamyboje, jeigu kolbų su susidrumstusiu vandeniu skaičius X ne didesnis už skaičių t. Priešingu atveju vanduo valomas.

Tegu:

a) $m_0 = 1,\ V = 1,\ n = 10,\ t = 3$;

b) $m_0 = 1,\ V = 2,\ n = 8,\ t = 2$.

Suformuluokite uždavinį hipotezės tikrinimo terminais ir apskaičiuokite pirmosios rūšies klaidos tikimybę.

Nurodymas. Vandens tūrį, iš kurio imami pavyzdžiai, laikykite daug kartų didesnį už pavyzdžio tūrį. Tiksliau kalbant, bakterijų skaičiaus pasiskirstymą tūryje V aproksimuokite Puasono skirstiniu.

4.21. Psichologas nori nustatyti, ar pelės atmintis pasikeičia pašalinus tam tikrą smegenų dalį. Iš pradžių jis įpratino 6 peles neklystamai rasti labirinte vienintelį kelią prie maisto. Paskui pašalino smegenų dalį. Galima tarti, kad neturinti atminties pelė teisingą kelią ras su tikimybe, lygia 0,2. Psichologas teigia, kad pelė atminties neturi, jei teisingą kelią randa ne daugiau kaip 2 pelės iš 6 pelių. Koks šio kriterijaus reikšmingumo lygmuo? Apskaičiuokite kriterijaus galią, kai $p = 0,4,\ 0,6,\ 0,8,\ 1,0$.

4.22. Nustatyta, kad gamyklos produkcijoje vidutiniškai yra 5 procentai broko. Per pamainą pagaminama 500 gaminių. Atliekant kontrolę nustatomas per pamainą pagamintų defektinių gaminių skaičius X. Jeigu X įgyja didelę reikšmę, tai daroma išvada, kad gamybos procesas sutriko. a) Nurodykite ribą, kurią defektinių gaminių skaičius viršija su tikimybe, ne didesne už 0,01, kai defektinio gaminio pagaminimo tikimybė lygi 0,05. Apskaičiuokite tikimybę, kad tą ribą viršys defektinių gaminių skaičius, kai defektinio gaminio pagaminimo tikimybė lygi 0,08; 0,10; 0,12. b) Nurodykite kontrolinę ribą ir minėtas tikimybes, jei tikrinama tik 50 atsitiktinai paimtų gaminių.

4.23. Tegu $X_1, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a. d., kurių tankio funkcija $f_\theta(x)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}$. Raskite tolygiai galingiausią α lygmens kriterijų hipotezei $H_0 : \theta \leqslant \theta_0$, kai alternatyva yra $H_1 : \theta > \theta_0$, tikrinti tokiais atvejais:

a) $f_\theta(x) = \theta^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{x}/\theta}$, $0 < \mathrm{x} < \infty$, $\theta > 0$;

b) $f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$, $\theta > 0$;

c) f_θ yra $N(1, \theta)$ skirstinio tankio funkcija;

d) $f_\theta(x) = \theta^{-c}cx^{c-1}\mathrm{e}^{-(\mathrm{x}/\theta)^{\mathrm{c}}}$, $0 < \mathrm{x} < \infty$, $\theta > 0$; čia $c > 0$ – žinomas.

4.24. Tegu $X_1, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a. d., turintys tolygųjį skirstinį $U(\theta, \theta+1)$, $\theta \in \mathcal{R}$. Tegu $n \geqslant 2$.

a) Raskite bendrą $X_{(1)}$ ir $X_{(n)}$ skirstinį.

b) Tegu tikrinant hipotezę $H : \theta = \theta_0$ taikomas toks kriterijus: hipotezė H priimama, kai $X_{(n)} - 1 < \theta_0 < X_{(1)}$. Koks šio kriterijaus reikšmingumo lygmuo?

c) Raskite p. b) pateikto kriterijaus galią, kai $\theta > \theta_0$.

d) Raskite imties didumą, kad p. b) apibrėžtas kriterijus atmestų hipotezę H su tikimybe, ne mažesne už 0,99, jei tikroji parametro θ reikšmė tenkina nelygybę $\theta \geq \theta_0 + 0,1$.

4.25. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ yra paprastoji atsitiktinė imtis a. d. X, turinčio diskretųjį tolygųjį skirstinį, sukoncentruotą taškuose $0,\ 1, ..., \theta$, kai nežinomas $\theta = 1,\ 2, ...$

a) Tegu tikrinama hipotezė $H_0 : \theta \leqslant \theta_0$, kai alternatyva yra $H_1 : \theta > \theta_0$. Įrodykite, kad

$$\varphi_*(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & X_{(n)} > \theta_0, \\ \alpha, & X_{(n)} \leqslant \theta_0 \end{cases}$$

yra α lygmens TG kriterijus.

b) Tegu tikrinama hipotezė $H_0 : \theta = \theta_0$, kai alternatyva yra $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Įrodykite, kad

$$\varphi_*(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & X_{(n)} > \theta_0 \text{ arba } X_{(n)} \leqslant \theta_0\alpha^{1/n}, \\ 0, & \text{priešingu atveju} \end{cases}$$

yra α lygmens TG kriterijus.

c) Įrodykite, kad a) ir b) punktai išlieka teisingi, diskretųjį tolygųjį skirstinį pakeitus tolygiuoju skirstiniu $U(0, \theta)$, $\theta > 0$.

4.26. Tegu $X_1, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę Bernulio a. d. $B(1,\ p)$. Raskite α lygmens TGN kriterijų hipotezei $H_0 : p = p_0$, kai alternatyva yra $H_1 : p \neq p_0$, tikrinti, kai

a) $n = 10$, $\alpha = 0,1$ ir $p_0 = 0,2$;

b) $n = 10$, $\alpha = 0,05$ ir $p_0 = 0,4$.

4.27. Tegu X yra a. d., turintis geometrinį skirstinį. Raskite α lygmens TGN kriterijų hipotezei $H_0 : p = p_0$, kai alternatyva yra $H_1 : p \neq p_0$, tikrinti.

4.28. Įrodykite, kad šios šeimos turi monotoninį tikėtinumo santykį:

a) Laplaso skirstinių šeima $\{L(\mu, \theta)\}$, kai θ žinomas;

b) paslinktųjų eksponentinių skirstinių šeima $\{\mathcal{E}(\theta, c)\}$, kai c žinomas;

c) logistinių skirstinių šeima $\{LG(\theta, c)\}$, kai c žinomas;

d) tolygiųjų skirstinių šeima $\{U(\theta, \theta+1)\}$;

e) hipergeometrinių skirstinių šeima $\{H(N, M, n)\}$, kai n ir N žinomi.

4.29. Įrodykite, kad šeima $\{f_\theta : \theta \in \mathbf{R}\}$, kai $f_\theta(x) = c(\theta)h(x)$, $a(\theta) < x < b(\theta)$ turi monotoninį tikėtinumo santykį; čia $h(x)$ yra pagal Lebego matą integruojama teigiama funkcija, $a(\theta < b(\theta)$ yra nemažėjančios θ funkcijos.

4.30. Tegu X turi vienparametrį eksponentinio tipo skirstinį. Įrodykite, kad TG kriterijus, kai alternatyvos dvipusės, neegzistuoja.

4.31. Paprastoji imtis $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ gauta stebint a. d. $X \sim N(\mu, k\mu)$, $\mu > 0$, k – žinoma teigiama konstanta. Sudarykite kriterijų hipotezei $H : \mu = \mu_0$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \mu > \mu_0$, tikrinti. Tarę, kad n didelis, raskite apytiksles kritinės srities ir galios funkcijos išraiškas.

4.32. (**4.31** tęsinys.) Tarę, kad žinomas tik vidurkis $\bar{X}$, raskite TG kriterijų hipotezei $H : \mu = \mu_0$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \mu > \mu_0$, tikrinti, grindžiamą statistika $\bar{X}$. Raskite kriterijaus galios funkciją.

4.33. Atsitiktinis dydis X įgyja sveikąsias neneigiamas reikšmes ir jo pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \mathbf{P}\{X \leq x\} = 1 - \beta^x,\ 0 < \beta < 1,\ x = 0, 1, 2, ...$$

Raskite kriterijų hipotezei $H : \beta = \beta_0$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \beta > \beta_0$, tikrinti.

4.4 – 4.5 skyreliai

4.34. Remiantis didumo n imtimi, tikrinama hipotezė $H : \mu = 0$ apie normaliojo skirstinio vidurkio reikšmę, esant alternatyvai $\bar{H}_1 : \mu > 0$ arba alternatyvai $\bar{H}_3 : \mu \neq 0$, kai σ nežinomas. Įrodykite, kad kriterijaus galia yra didėjanti μ/σ funkcija, kai alternatyva yra $\bar{H}_1$, ir didėjanti $|\mu|/\sigma$ funkcija, kai alternatyva yra $\bar{H}_3$.

4.35. (**4.34** tęsinys). Įrodykite, kad kriterijus, kurio reikšmingumo lygmuo yra α ir kurio galia, esant visoms alternatyvoms $\{(\mu,\ \sigma) : \mu > \mu_1 > 0\}$, yra ne mažesnė už β, $\beta > \alpha$, neegzistuoja.

4.36. (**4.34** tęsinys). Kai alternatyva yra $\bar{H}_1$, Stjudento kriterijaus galią palyginkite su atitinkamo kriterijaus, kai σ žinomas, galia, jei $n = 5;\ 10;\ 15$ ir $\mu/\sigma = 0,8;\ 1,0;\ 1,2$ (kriterijų reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0,05$).

4.37. Tegu $X_1, X_2, ..., X_n$ yra nepriklausomi normalieji atsitiktiniai dydžiai $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, $i = 1, ..., s$ ir $X_i \sim N(0,\ \sigma^2)$, $i = s + 1, ..., n$; čia $-\infty < \mu_i < \infty$, $i = 1, ..., s$; $0 < \sigma < \infty$. Raskite TGN kriterijus hipotezei $H : \mu_1 = \mu_1^0$, esant vienpusėms ir dvipusei alternatyvoms, tikrinti.

4.38. Tegu X_1 ir X_2 yra nepriklausomi a. d., turintys Puasono skirstinius $\mathcal{P}(\lambda_1)$ ir $\mathcal{P}(\lambda_2)$.

a) Raskite α lygmens TGN kriterijų hipotezei $H_0 : \lambda_1 \geqslant \lambda_2$, kai alternatyva yra $H_1 : \lambda_1 < \lambda_2$, tikrinti.

b) Apskaičiuokite punkte a) gauto kriterijaus galią, kai $\alpha = 0,1$, $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,1,\ 0,2)$; $(1,\ 2)$; $(10,\ 20)$; $(0,1,\ 0,4)$.

4.39. Tegu $(X_1, ..., X_n)$ yra paprastoji imtis, gauta stebint a. d. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. a) tikrinama hipotezė $H : \mu \leq \mu_0$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \mu \neq \mu_0$; b) tikrinama hipotezė $H : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \sigma^2 < \sigma_0^2$. Suformuluokite lygmens α TG kriterijus P reikšmių ir pasikliovimo intervalų terminais.

4.40. Pagal didumo n paprastąją imtį $(X_1, ..., X_n)$, gautą stebint a. d. $X \sim G(\lambda, \eta)$, kai parametras η žinomas, tikrinama hipotezė $H : \lambda \leq \lambda_0$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \lambda > \lambda_0$. Suformuluokite lygmens α TG kriterijus P reikšmių ir pasikliovimo intervalų terminais.

4.41. Tegu $X_1, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a. d., turintys gama skirstinį $G(\theta, \gamma)$ su nežinomais θ ir γ.

a) Įrodykite, kad tikrinant hipotezę $H_0 : \gamma \leq \gamma_0$, kai alternatyva yra $H_1 : \gamma > \gamma_0$, TGN kriterijus atmeta H_0, kai $\prod_{i=1}^n X_i > g(\bar{X})$; čia g tam tikra reali funkcija.

b) Įrodykite, kad tikrinant hipotezę $H_0 : \theta \leqslant \theta_0$, kai alternatyva yra $H_1 : \theta > \theta_0$, TGN kriterijus atmeta H_0, kai $\bar{X} > h\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)$; čia h tam tikra reali funkcija.

4.42. Tegu $\mathbf{X}_1 = X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$ ir $\mathbf{X}_2 = X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$ yra dvi nepriklausomos imtys vienodai pasiskirsčiusių n. a. d., turinčių atitinkamai gama skirstinius $\Gamma(\theta_1, \gamma_1)$ ir $\Gamma(\theta_2, \gamma_2)$.

Tegu γ_1 ir γ_2 žinomi. Įrodykite, kad, tikrinant hipotezę $H_0 : \theta_1 \leqslant \theta_2$, kai alternatyva yra $H_1 : \theta_1 > \theta_2$, ir hipotezę $H_0 : \theta_1 = \theta_2$, kai alternatyva $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$, egzistuoja TGN kriterijai, kurių statistikų skirstiniai išreiškiami beta skirstiniais.

4.43. Tegu $X_i = \beta_0 + \beta_1 t_i + \varepsilon_i$; čia t_i yra fiksuotos konstantos (ne visos vienodos), ε_i yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a. d., turintys normalųjį skirstinį $N(0, \sigma^2)$, β_0, β_1 ir σ^2 yra nežinomi parametrai. Raskite α lygmens TGN kriterijų hipotezėms tikrinti:

a) $H_0 : \beta_0 \leqslant \theta_0$, kai alternatyva $H_1 : \beta_0 > \theta_0$;
b) $H_0 : \beta_0 = \theta_0$, kai alternatyva $H_1 : \beta_0 \neq \theta_0$;
c) $H_0 : \beta_1 \leqslant \theta_0$, kai alternatyva $H_1 : \beta_1 > \theta_0$;
d) $H_0 : \beta_1 = \theta_0$, kai alternatyva $H_1 : \beta_1 \neq \theta_0$.

4.44. Tegu $(X_i, Y_i)^T, i = 1, ..., n$, yra paprastoji atsitiktinė imtis dvimačio normaliojo a. v. $(X,\ Y)^T \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\ \mu_2)^T$, $-\infty < \mu_1, \mu_2 < \infty$, $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]_{2\times 2}, \sigma_{11} = \sigma_1^2$, $\sigma_{22} = \sigma_2^2$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \rho\sigma_1\sigma_2$, $0 < \sigma_1,\ \sigma_2 < \infty$, $-1 < \rho < 1$.

Be to, $S_{11} = \sum_i (X_i - \bar{X})^2$, $S_{22} = \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2$ ir $S_{12} = \sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$.

a) Įrodykite, kad TGN kriterijus hipotezei $H_0 : \sigma_2/\sigma_1 = \Delta_0$, kai alternatyva yra $H_1 : \sigma_2/\sigma_1 \neq \Delta_0$, tikrinti atmeta H_0, kai

$$R = |\Delta_0^2 S_{11} - S_{22}| / \sqrt{(\Delta_0^2 S_{11} + S_{22})^2 - 4\Delta_0^2 S_{12}^2} > c.$$

b) Raskite R iš a) punkto skirstinį, kai $\sigma_2/\sigma_1 = \Delta_0$.

c) Tegu $\sigma_1 = \sigma_2$. Įrodykite, kad TGN kriterijus hipotezei $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, kai alternatyva yra $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, tikrinti atmeta H_0, kai

$$V = |\bar{X}_2 - \bar{X}_1| / \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_{12}} > c.$$

d) Raskite punkto c) a. d. V skirstinį, kai $\mu_1 = \mu_2$.

4.45. Tegu $X_1, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a. d., turintys paslinktąjį eksponentinį skirstinį $\mathcal{E}(a, \theta)$ su nežinomais a ir θ.

a) Įrodykite, kad tikrinant $H_0 : \theta = 1$, kai alternatyva yra $H_1 : \theta \neq 1$, α lygmens TGN kriterijus atmeta H_0, kai $V < c_1$ arba $V > c_2$; čia $V = 2\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)}) 2n(\bar{X} - X_{(1)})$, o c_i apibrėžti taip:

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x|2n-2)dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x|2n)dx = 1 - \alpha,$$

$f(x|\nu)$ yra chi kvadrato skirstinio su ν laisvės laipsnių tankio funkcija.

b) Įrodykite, kad, tikrinant hipotezę $H_0 : a = 0$, kai alternatyva yra $H_1 : a \neq 0$, lygmens α TGN kriterijus atmeta H_0, kai $X_{(1)} < 0$ arba $2nX_{(1)}/V > c(n-1)$; čia c randamas iš lygties

$$(n-1)\int_0^c (1+v)^{-n} dv = 1 - \alpha.$$

4.6. skyrelis

4.46. Tegu $X_{i1}, ..., X_{in_i}$, $i = 1, ..., k$, $n_i \geq 2$, yra k paprastųjų nepriklausomų imčių eksponentinių a. d. $X_1, ..., X_k$, kurių tikimybiniai tankiai yra

$$\frac{1}{\sigma_i}\exp\{-\frac{x - \theta_i}{\sigma_i}\},\ \theta_i < x < \infty,\ i = 1, ..., k;$$

čia $0 < \sigma_i < \infty$, $-\infty < \theta_i < +\infty$, $i = 1, ..., k$.

Rasti tikėtinumų santykį, kai tikrinama hipotezė: a) $H_1 : \theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_k$; b) $H_2 : \sigma_1 = ... = \sigma_k$; c) $H_3 : \theta_1 = ... = \theta_k$, kai visi σ_i yra lygūs.

4.47. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ yra paprastoji imtis a. d. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $-\infty < \mu < +\infty$, $0 < \sigma < +\infty$. Įrodykite, kad: a) tikėtinumų santykio kriterijus hipotezei $H : \mu = \mu_0$ tikrinti yra ekvivalentus Stjudento kriterijui; b) tikėtinumų santykio kriterijus hipotezei $H : \sigma^2 = \sigma_0^2$ tikrinti yra ekvivalentus χ^2 kriterijui.

4.48. Tegu $(X_{1i}, ..., X_{ki})^T$, $i = 1, ..., n$, yra imtis vektoriaus $(X_1, ..., X_k)^T$, kurio skirstinys priklauso polinominių skirstinių šeimai $\{\mathcal{P}_k(1,\ \boldsymbol{\pi})\}$; čia $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, ..., \pi_k)^T$ yra k-matis vektorius, kurio koordinatės tenkina sąlygas $0 < \pi_i < 1$, $\pi_1 + ... + \pi_k = 1$. Įrodykite, kad tikėtinumų santykis hipotezei $H : \pi_1 = \pi_1^0, ..., \pi_k = \pi_k^0$ tikrinti yra

$$\Lambda = \left(\prod_{i=1}^k \left(\frac{\pi_i^0}{\hat{\pi}_i}\right)^{\hat{\pi}_i}\right)^n;$$

čia $\hat{\pi}_i = V_i/n$, $V_i = X_{i1} + ... + X_{in}$, $i = 1, ..., k$.

4.49. (**4.48** tęsinys). Įrodykite, kad statistikų $-2\ln\Lambda$ ir $\sum_i (V_i - n\pi_i^0)^2/n\pi_i^0$ skirstiniai, kai hipotezė H yra teisinga, silpnai konverguoja į χ^2 skirstinį su $k-1$ laisvės laipsnių.

4.50. Tegu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ ir $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^T$ yra nepriklausomos paprastosios a. d. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ir $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ imtys. Įrodykite, kad: a) tikėtinumų santykio kriterijus hipotezei $H : \mu_1 = \mu_2$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \mu_1 \neq \mu_2$, tikrinti, kai $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, yra ekvivalentus Stjudento kriterijui; b) tikėtinumų santykio kriterijus hipotezei $H : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, tikrinti ekvivalentus Fišerio kriterijui.

4.51. Tegu $(X_{i1}, ..., X_{in_i})^T$, $i = 1, ..., k$, yra k paprastųjų nepriklausomų imčių, gautų stebint normaliuosius a. d. $X_i \sim N(\mu_i,\ \sigma_i^2)$. Įrodykite, kad tikėtinumų santykio kriterijus hipotezei $H : \mu_1 = ... = \mu_k$ tikrinti, kai $\sigma_1^2 = ... = \sigma_k^2$, yra ekvivalentus kriterijui, grindžiamam statistika

$$F = \frac{(n-k)\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{X}_{i.} - \bar{X})^2}{k\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2},$$

kurios skirstinys, kai H teisinga, yra Fišerio $F(k,\ n-k)$, $n = n_1 + ... + n_k$,

$$\bar{X}_{i.} = \frac{1}{n_i}\sum_{j-1}^{n_i} X_{ij},\ \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\bar{X}_{i.}.$$

4.52. Tegu $(X_1, ..., X_{n_1})^T$ ir $(Y_1, ..., Y_{n_2})^T$ yra paprastosios nepriklausomos imtys a. d. $X \sim B(1, p_1)$, $0 < p_1 < 1$, ir $Y \sim B(1, p_2)$, $0 < p_2 < 1$. Raskite tikėtinumų santykį Λ hipotezei $H : p_1 = p_2$ tikrinti ir įrodykite, kad $-2\ln\Lambda \xrightarrow{d} \chi^2(1)$, kai $n_1,\ n_2 \to \infty$, ir H yra teisinga.

4.53. Apibendrinkite **4.52** pratimą ir jo sprendimą tuo atveju, kai imčių skaičius didesnis už 2.

4.54. Tegu $(X_1, ..., X_{n_1})^T$ ir $(Y_1, ..., Y_{n_2})^T$ yra paprastosios nepriklausomos imtys a. d. $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $0 < \lambda_1 < \infty$, ir $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, $0 < \lambda_2 < \infty$. Raskite tikėtinumų santykį Λ hipotezei $H : \lambda_1 = \lambda_2$ tikrinti ir įrodykite, kad $-2\ln\Lambda \xrightarrow{d} \chi^2(1)$, kai $n_1,\ n_2 \to \infty$, ir H yra teisinga.

4.55. Apibendrinkite **4.54** pratimą tuo atveju, kai imčių skaičius didesnis už 2.

4.56. Tegu $(X_1, ..., X_{n_1})^T$ ir $(Y_1, ..., Y_{n_2})^T$ yra paprastosios nepriklausomos imtys a. d. X ir Y, turinčių eksponentinius skirstinius $X \sim \mathcal{E}(1/\theta_1)$ ir $Y \sim \mathcal{E}(1/\theta_2)$, $0 < \theta_1,\ \theta_2 < \infty$. Raskite statistikos $\bar{X}/\bar{Y}$ skirstinį. Įrodykite, kad tikėtinumų santykio hopotezei $H : \theta_1 = \theta_2$ tikrinti statistikos yra $\bar{X}/\bar{Y}$ funkcijos. Raskite kriterijų galią.

4.57. Atlikta 500 nepriklausomų stebėjimų ir jie sugrupuoti į intervalus; m_i stebėjimų, patekusių į atitinkamą intervalą, skaičius.

Intervalas	m_i
$(-\infty,\ -3/2)$	2
$[-3/2,\ -1/2)$	78
$[-1/2,\ 1/2)$	339
$(1/2,\ \infty)$	81

Ar neprieštarauja šie duomenys prielaidai, kad buvo sugrupuota paprastosios atsitiktinio dydžio $X \sim N(0,\ 1/4)$ imties realizacija?

4.58. Lentelėje iš 2 000 atsitiktinių skaičių skaitmuo 0 aptinkamas 160 kartų, skaitmuo 3 – 247 kartus, skaitmuo 6 – 191 kartą, o likusieji skaitmenys – 1 402 kartus. Ar neprieštarauja šie duomenys prielaidai, kad skaitmenys 0,1,...,9 pasitaiko vienodomis tikimybėmis 1/10 ?

4.59. Tarp 2 020 šeimų, turinčių du vaikus, užregistruota 527 šeimos, kuriose abu vaikai berniukai; 476 šeimos, kur abu vaikai mergaitės, o likusiose 1 017 šeimų – vienas berniukas ir viena mergaitė. Patikrinkite prielaidą apie berniuko ir mergaitės gimimo tikimybių lygybę. Patikrinkite prielaidą, kad berniukų skaičius X šeimose, turinčiose du vaikus, yra binominis $X \sim B(2,\ p)$.

4.60. Atlikus 200 nepriklausomų bandymų, įvykiai A, B ir C pasirodė atitinkamai 49, 93 ir 58 kartus. Patikrinkite hipotezę, pagal kurią $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{C\} = p$, $\mathbf{P}\{B\} = 1-2p,\ 0 < p < 1/2$.

4.61. Atlikus 8 000 nepriklausomų bandymų, įvykiai A, B ir C įvyko atitinkamai 2 018, 5 012 ir 970 kartų. Patikrinkite hipotezę, pagal kurią $\mathbf{P}\{A\} = 1/2 - 2p,\ \mathbf{P}\{B\} = 1/2 + p$, $\mathbf{P}\{C\} = p,\ 0 < p < 1/4$.

4.7. skyrelis

4.62. Tikrinama hipotezė $H : \mu = 1$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \mu \neq 1$, remiantis a. d. $X \sim N(\mu,\ 4)$ paprastąja imtimi. Kokio didumo turi būti imtis, kad hipotezė H būtų atmetama su tikimybe 0,05, kai ji teisinga, ir priimama, kai tikroji parametro reikšmė tenkina nelygybę $|\mu - 1| \geq 1$ su tikimybe, ne didesne kaip 0,01?

4.63. Remiantis $n = 50$ didumo normaliojo skirstinio $N(0, \sigma^2)$ imtimi, tikrinama hipotezė $H : \sigma^2 = \sigma_0^2$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \sigma^2 > \sigma_0^2$. Kokia tikimybė, kad ta hipotezė bus atmesta, jei tikroji parametro reikšmė σ^2 tenkina nelygybę $\sigma^2 > 1,5\sigma_0^2$, o kriterijaus reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0,05$? Kokio didumo turi būti imtis, kad ta tikimybė būtų ne mažesnė už 0,95?

4.64. Tegu hipotezei $H : \sigma^2 = \sigma_0^2$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, tikrinti taikomas TGN (4.7.11) kriterijus ir paslinktasis (4.7.13) kriterijus. Raskite, kokio didumo turi būti imtys, kad kriterijų galios funkcijos būtų ne mažesnės už 0,9, kai $\sigma^2 \geq 2\sigma_0^2$ ir $\sigma^2 \leq \sigma_0^2/2$, o kriterijų reikšmingumo lygmuo yra 0,05.

4.65. Lentelėje pateikti duomenys apie dviejose fermose vienodo amžiaus kiaulių svorio prieaugį per tam tikrą laiką. Pirmoje fermoje pamatuota $n_1 = 16$ kiaulių svorio prieaugis $X_i, i = 1, ..., 16$; antroje fermoje $n_2 = 15$ kiaulių svorio prieaugis $Y_i, i = 1, ..., 15$. Reikia patikrinti hipotezę, kad vidutinis svorio priaugis nesiskiria, kai alternatyva yra, jog pirmoje fermoje vidutinis svorio priaugis yra didesnis.

I ferma				II ferma			
i	X_i	i	X_i	i	Y_i	i	Y_i
1	109,95	9	108,86	1	81,45	9	85,63
2	103,54	10	98,69	2	94,63	10	90,92
3	104,58	11	97,51	3	73,70	11	95,58
4	114,43	12	100,48	4	87,36	12	71,52
5	90,92	13	96,76	5	89,12	13	108,85
6	104,59	14	102,77	6	96,69	14	87,36
7	103,85	15	100,47	7	83,93	15	99,48
8	88,23	16	99,48	8	86,49		

Nurodymas. Iš lentelės matyti, kad a. d. skirstiniai asimetriški. Todėl reikėtų atlikti stebimojo dydžio transformaciją, kad naujo a. d. skirstinys būtų patenkinamai aprašomas normaliuoju skirstiniu, paskui remtis Stjudento kriterijumi. Nesunku įsitikinti, kad nagrinėjamame pavyzdyje stebėjimų logaritmai tiksliau aprašomi normaliuoju skirstiniu. Kitaip sakant, stebimasis a. d. tiksliau aprašomas lognormaliuoju skirstiniu.

4.66. Užregistruota 100 metų duomenys apie vidutinę liepos mėnesio temperatūrą. Remiantis šiais duomenimis, gauta $\bar{X} = 16,482$, $s = 1,6145$. Naudojant šio laikotarpio 30 pirmųjų metų duomenis, gauti įverčiai $\bar{X}_1 = 16,893$, $s_1 = 1,5904$, o pagal paskutiniųjų 30 metų duomenis – įverčiai $\bar{X}_2 = 15,963$, $s_2 = 1,6531$. Patikrinkite hipotezes, kad šių dviejų laikotarpių vidutinė temperatūra nesiskiria nuo vidurinio laikotarpio vidutinės temperatūros, tarę, kad vidutinę temperatūrą galima aprašyti normaliuoju skirstiniu.

4.67. Pagal dvi nepriklausomas $n_1 = n_2 = 50$ imtis, gautas stebint n. a. d. $X \sim N(\mu_1,\ 1)$ ir $Y \sim N(\mu_2,\ 1)$, gauti įverčiai $\bar{X} = 0,103$ ir $\bar{Y} = 0,368$. Sudarykite TG kriterijų hipotezei $H : \mu_1 = \mu_2$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \mu_1 < \mu_2$, tikrinti. Ar ši hipotezė atmetama pagal turimas realizacijas, jeigu kriterijaus reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0,05$?

4.68. Yra dvi nepriklausomos paprastosios vienodo didumo n imtys, gautos stebint nepriklausomus normaliuosius a. d., ir, remiantis Fišerio kriterijumi, tikrinama hipotezė $H : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \sigma_1^2/\sigma_2^2 > 1$. Raskite tokį imties didumą n, kad kriterijaus galia būtų ne mažesnė už 0,9, jei kriterijaus reikšmingumo lygmuo yra $\alpha = 0,05$ ir $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1,5;\ 2;\ 3$.

4.69. Dviejose laboratorijose buvo matuojamas sieros dyzeliniame kure kiekis pagal identiškus pavyzdžius, kuriuose sieros kiekis buvo 0,870. Atlikus 8 nepriklausomus matavimus, pirmoje laboratorijoje gauti tokie rezultatai: 0,869; 0,874; 0,867; 0,875; 0,870; 0,869; 0,864; 0,872. Kitoje laboratorijoje atlikus 10 matavimų, gauti tokie rezultatai: 0,865; 0,870; 0,866; 0,871; 0,868; 0,870; 0,871; 0,870; 0,869; 0,874. Tarę, kad matavimo paklaidos turi normaliuosius skirstinius, patikrinkite dispersijų lygybės hipotezę. Tarę, kad dispersijos vienodos, patikrinkite laboratorijų paklaidų vidurkių vienodumo hipotezę.

4.70. Tikrinama hipotezė, kad impulso atpažinimo paklaidos dispersija nepriklauso nuo jo intensyvumo. Buvo atlikti du nepriklausomi eksperimentai. Impulsas, kurio intensyvumas 10 sąlyginių vienetų, buvo įvertintas taip: 9, 9, 8, 10, 12, 12, 13, 10, 10; impulsas, kurio intensyvumas 20 sąlyginių vienetų, – taip: 15, 16, 17, 23, 22, 20, 21, 24, 27. Ar šie duomenys neprieštarauja iškeltajai hipotezei (tarkite, kad buvo stebimi nepriklausomi normalieji a. d.)?

4.71. (**2.19** pratimo tęsinys). 2.19 pratimo sąlygomis priėmę normalumo prielaidą patikrinkite hipotezę, kad I ir II tipo juostų kokybės rodiklio vidurkiai nesiskiria.

4.72. (**3.171** pratimo tęsinys). 3.171 pratimo sąlygomis a) patikrinkite trijų dispersijų lygybės hipotezę $H : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2$; b) patikrinkite hipotezę $H : \theta = 0$.

4.73. Tikrinant keturias didumo $n_1 = 20, n_2 = 38, n_3 = 25, n_4 = 50$ lempučių partijas, gautos jų darbo laiko iki gedimo vidutinės reikšmės $\bar{T}_1 = 154,3$, $\bar{T}_2 = 165,1$, $\bar{T}_3 = 159,0$, $\bar{T}_4 = 175,5$. Tardami, kad i-osios partijos lemputės darbo laikas iki gedimo turi eksponentinį skirstinį $\mathcal{E}(1/\lambda)$, patikrinkite hipotezę $H : \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$.

4.74. Tiriant specialios sėjamosios efektyvumą, 10 sklypelių buvo sėjama paprasta sėjamąja ir 10 sklypelių – specialia sėjamąja, paskui buvo lyginamas derlingumas. Dvidešimt vienodo ploto sklypelių buvo taip sugrupuoti poromis, kad būtų greta vienas kito. Metant monetą buvo pasirenkama, kuriame iš dviejų sklypelių sėti specialia sėjamąja. Rezultatai pateikti lentelėje.

Eil. Nr.	Speciali	Paprasta	Eil. Nr.	Speciali	Paprasta
1	8,0	5,6	6	7,7	6,1
2	8,4	7,4	7	7,7	6,6
3	8,0	7,3	8	5,6	6,0
4	6,4	6,4	9	5,6	5,5
5	8.6	7,5	10	6,2	5,5

Patikrinkite hipotezę, kad abiejų sėjamųjų efektyvumas vienodas: a) taikydami dviejų imčių Stjudento kriterijų (4.7.15); b) taikydami Stjudento kriterijų atitinkamų sklypelių derlingumų skirtumams (žr. 4.7.9 pvz.); c) paaiškinkite, kodėl gaunamos skirtingos išvados.

4.75. (**4.74** tęsinys). Įvertinkite koreliacijos koeficientą ir patikrinkite koreliacijos koeficiento lygybės 0 hipotezę.

4.76 (**3.172.** pratimo tęsinys). 3.172 pratimo sąlygomis patikrinkite prielaidą, kad a. d. X ir Y vidurkiai nesiskiria.

4.77. Lentelėje nurodyta 10 pacientų, vartojusių migdomuosius vaistus A ir B, papildomo miego trukmė X ir Y (valandomis).

i	X_i	Y_i	i	X_i	Y_i
1	1,9	0,7	6	4,4	3,4
2	0,8	-1,6	7	5,5	2,7
3	1,1	-0,2	8	1,6	0,8
4	0,1	-1,2	9	4,6	0,0
5	-0,1	-0,1	10	3,4	2,0

Patikrinkite hipotezę, kad vaistų poveikis vienodas, tarę, kad buvo stebimas normalusis atsitiktinis vektorius.

4.78. (**3.151** pratimo tęsinys). 3.151 pratimo sąlygomis tarę, kad parametras $\eta = 10$, patikrinkite hipotezę $H : \lambda \leq 1$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \lambda > 1$.

4.79. (**3.155** pratimo tęsinys). 3.155 pratimo sąlygomis tarę, kad parametras $\eta = 10$ patikrinkite hipotezę $H : \lambda = \lambda_0 = 0,001$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \lambda \neq 0,0001$. $(\alpha = 0,01)$.

4.80. (**3.150** pratimo tęsinys). 3.150 pratimo sąlygomis reišmingumo lygmens $\alpha = 0,05$ kriterijumi patikrinkite hipotezę $H : \lambda = \lambda_0 = 1$, kai alternatyva yra $\bar{H} : \lambda \neq 1$.

4.81. Tegu $X_1, X_2, ..., X_7$ yra firmoje užregistruotų klientų skambučių skaičiai per 7 savaitės dienas. Tarę, kad a. d. $X_1, ..., X_7$ yra nepriklausomi ir turi Puasono skirstinius $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$, a) patikrinkite hipotezę $H : \lambda_1 = ... = \lambda_7$ remdamiesi a. d. $X_1, ..., X_7$ realizacija:

52; 65; 60; 71; 75; 43; 40. b) Matome, kad savaitgalyje skambučių skaičius yra mažesnis. Patikrinkite hipotezę $H : \lambda_1 = ... = \lambda_5$, kad skambučių intensyvumas darbo dienomis yra vienodas.

4.82. (**2.29** pratimo tęsinys). 2.29 pratimo sąlygomis patikrinkite hipotezę, kad defektinių gaminių dalis neviršija 0,03.

4.83. (**3.152** pratimo tęsinys). 3.152 pratimo sąlygomis patikrinkite hipotezę, kad II rūšies gaminių dalis neviršija 0,25.

4.84. (**2.30** pratimo tęsinys). 2.30 pratimo sąlygomis tarę, kad j-oje bandymų serijoje stebimas Puasono a. d. $X_j \sim \mathcal{P}(\lambda_j)$, patikrinkite hipotezę $H : \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$.

4.85. Per pirmą valandą skaitiklis užregistravo 150 tam tikrų kosminių dalelių, per tolesnes dvi valandas — 250 dalelių. Patikrinkite hipotezę, kad dalelių srauto intensyvumas nepakito.

4.86. Du nepriklausomi a. d., pasiskirstę pagal Puasono dėsnį, įgijo atitinkamai reikšmes 75 ir 200. Patikrinkite hipotezę $H : \lambda_1 = \lambda_2/2$, kai alternatyva $\bar{H} : \lambda_1 < \lambda_2/2$.

4.87. Per pirmąją dieną skaitiklis užregistravo 20 026 puasoninio srauto impulsus, o per antrąją dieną – 19 580 impulsų. Ar yra pagrindo teigti, kad impulsų srauto intensyvumas sumažėjo?

4.88. Ar galima teigti, kad dviejose nepriklausomose Bernulio bandymų schemose įvykio A tikimybė vienoda, jeigu atlikus $n_1 = n_2 = 5000$ bandymų įvykis A įvyko 2 602 ir 2 398 kartus?

4.89. Patikrinus 5 vienodo didumo $n = 200$ gaminių partijas, jose buvo surasta atitinkamai 15; 10; 6; 12; 4 defektiniai gaminiai. Tegu defektinių gaminių skaičius j-oje partijoje turi binominį skirstinį $B(n, p_i), i = 1, ..., 5$. Patikrinkite hipotezę $H : p_1 = ... = p_5$.

4.90. (**3.176** pratimo tęsinys). 3.176 pratimo sąlygomis patikrinkite hipotezę, kad prapuolimo kampas turi tolygųjį pasiskirstymą.

4.91. (**3.177** pratimo tęsinys). 3.177 pratimo sąlygomis patikrinkite hipotezę, kad susirgimai leukemija tolygiai pasiskirstę per metus.

4.92. Lentelėje pateikta smėlio grūdelių orientacija plokštumoje (žr. [14]).

Kampas	Kiekis	Kampas	Kiekis	Kampas	Kiekis
$0°-$	244	$60°-$	326	$120°-$	322
$10°-$	262	$70°-$	340	$130°-$	295
$20°-$	246	$80°-$	371	$140°-$	230
$30°-$	290	$90°-$	401	$150°-$	256
$40°-$	284	$100°-$	382	$160°-$	263
$50°-$	314	$110°-$	332	$170°-$	281

Kampai sugrupuoti į ilgio 10° intervalus (nurodoma grupavimo intervalo pradžia). Gretimuose stulpeliuose nurodomi smėlio grūdelių, kurių orientacija patenka į atitinkamus intervalus, skaičiai.

Padvigubinę kampus, perveskite duomenis į intervalą $[0° - 360°]$. Patikrinkite kampų skirstinio tolygumo hipotezę.

Atsakymai ir nurodymai

4.2 skyrelis

4.1. Jeigu $\theta_1 > \theta_0$, tai H atmetama, kai $S_n = X_1 + ... + X_n < \chi^2_{1-\alpha}(2n)/(2\theta_0)$; kriterijaus galia $\beta(\theta_1) = \mathbf{P}\{\chi^2_{2n} < (\theta_1/\theta_0)\chi^2_\alpha(2n)\}$; jeigu $\theta_1 < \theta_0$, tai H atmetame, kai $S_n > \chi^2_\alpha(2n)/(2\theta_0)$; kriterijaus galia $\beta(\theta_1) = \mathbf{P}\{\chi^2_{2n} > (\theta_1/\theta_0)\chi^2_\alpha(2n)\}$. **4.2.** Tegu kriterijaus reikšmingumo lygmuo α tenkina nelygybę $\alpha < 1/2 - \mathrm{arctg}(1/2)/\pi \approx 0,396$. Hipotezė atmetama, kai $x_1 < X < x_2$; $x_1 = [c-\sqrt{c-(c-1)^2}]/(c-1), x_2 = [c+\sqrt{c-(c-1)^2}]/(c-1)$; konstanta c randama iš sąlygos $(\mathrm{arctg}(x_2) - \mathrm{arctg}(x_1))/\pi = \alpha$. **4.3.** a) Hipotezė atmetama, kai $|X| > z_{\alpha/2}$, jeigu $\alpha < 0,0455$; hipotezės atmetimo sritis: $|X| < x_1$ arba $|X| > x_2$, $x_1 = 1-\sqrt{1+c}, x_2 = 1+\sqrt{1+c}$; konstanta c randama iš sąlygos $\alpha = 2[1-\Phi(x_2)]+2\Phi(x_1)-1$, jeigu $\alpha > 0,0455$. b) Hipotezė atmetama, kai $\delta - c < |X| < \delta$; konstanta c randama iš sąlygos $2[\Phi(\delta) - \Phi(\delta - c)] = \alpha$; jeigu toks $c < \delta$ neegzistuoja, tai H atmetama, kai $|X| < \delta$. **4.4.** Hipotezė atmetama. *Nurodymas.* Imties $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_5)^T$ tankis, kai teisinga hipotezė yra $\varphi(\boldsymbol{x}) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma)^5 \exp\{-(x_1^2 + ... + x_5^2)/(2\sigma^2)\}$; esant teisingai alternatyvai skirstinys yra tolygus vienetiniame penkiamačiame kube $-1/2 < x_1, ..., x_5 < 1/2$. Remiantis Neimano–Pirsono lema, H priimama, kai $\max(|X_1|, ..., |X_5|) > 1/2$, arba kai a. v. $\mathbf{X}$ patenka į penkiamatę sferą su centru koordinačių pradžioje: $X_1^2 + ... + X_5^2 < r^2$. Tikimybė $\mathbf{P}\{\max(|X_1|, ..., |X_5|) > 1/2\} = 1-(2\Phi(1/0,316)-1)^5 = 0,0077$. Iš sąlygos $\mathbf{P}\{X_1^2+...+X_5^2 < r^2\} = \mathbf{P}\{\chi_5^2 < r^2/0,025\} = 0,9 - 0,0077 = 0,8923$ randame $r^2 = 0,2258$, t. y. penkiamatė sfera patenka į kubo vidų. Kadangi $X_1^2 + ... + X_5^2 = 0,2549$, tai H atmetama. **4.5.** $n \geq 22$. **4.6.** Neatmetama. **4.7.** 0,1856; 0,3306; 0,9117; 0,3333. **4.8.** Neatsižvelgiant į randomizaciją, kriterijus yra toks: $\varphi_1(\boldsymbol{x}) = 1$, kai $f_1(\boldsymbol{x}) > c_1 f_2(\boldsymbol{x})$; $\varphi_2(\boldsymbol{x}) = 1$, kai $f_2(\boldsymbol{x}) > c_2 f_1(\boldsymbol{x})$; $\varphi_0(\boldsymbol{x}) = 1 - \varphi_1(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x})$. Konstanta c_1 randama iš sąlygos $\alpha_{12} = \alpha$, o konstanta c_2 – iš sąlygos $\alpha_{21} = \beta$, jeigu sprendiniai c_1 ir c_2 tenkina sąlygą $c_1 c_2 > 1$. Priešingu atveju sprendinys neegzistuoja (tokiu atveju galima minimizuoti, pvz., sumą $\alpha_{01} + \alpha_{10}$). **4.9.** Sprendinys yra tokio pat pavidalo kaip ir 8 pratime. Konstantos c_1, c_2 randamos iš sąlygų $\beta_{12} = b_1$, $\beta_{21} = b_2$, jei tik $c_1 c_2 > 1$. **4.11.** a) H_0 atmetame, kai $X > \theta_0(1 - \sqrt{\alpha})$; b) H_0 atmetame, kai $X < [-(1-\theta_0) + \sqrt{(1-\theta_0)^2 + \alpha(2\theta_0 - 1)}]/(2\theta_0 - 1)$ ir $\theta_0 \neq 1/2$; atmetama, kai $X < \alpha$, jeigu $\theta_0 = 1/2$; c) hipotezė atmetama, kai $X < \sqrt{\alpha}/2$ arba kai $X > 1 - \sqrt{\alpha}/2$. **4.12.** a) H_0 atmetama, kai $X_{(1)} > \theta_0 - (\ln \alpha)/n$; b) hipotezę atmetame, kai $X_{(1)} > \theta_0 \alpha^{-1/n}$, esant alternatyvai $\theta_1 > \theta_0$; hipotezę atmetame su tikimybe 1, kai $X_{(1)} < \theta_0$, ir atmetame su tikimybe α, kai$X_{(1)} \geq \theta_0$, esant alternatyvai $\theta_1 < \theta_0$. **4.13.** Remiantis TG kriterijumi H atmetama su tikimybe 1, kai $S = X_1 + ... + X_n \geq 1$, ir atmetama su tikimybe $\alpha = 0,01$, kai $S = 0$. Abiejų rūšių klaidos neviršija 0,01, kai $n \geq 458$.

4.3 skyrelis

4.14. Kriterijaus funkcija $\varphi(\mathbf{X}) = 1$, kai $X_{(n)} > \theta_0$, ir $\varphi(\mathbf{X}) = \alpha$, kai $X_{(n)} \leq \theta_0$, esant alternatyvai $\theta > \theta_0$; kriterijaus funkcija $\varphi(\mathbf{X}) = 1$, kai $X_{(n)} < \theta_0 \alpha^{1/n}$ ir $\varphi(\mathbf{X}) = 0$ kitais atvejais, esant alternatyvai $\theta < \theta_0$; kriterijaus funkcija $\varphi(\mathbf{X}) = 1$, kai $X_{(n)} > \theta_0$ arba $X_{(n)} < \theta_0 \alpha^{1/n}$, ir $\varphi(\mathbf{X}) = 0$ kitais atvejais, esant dvipusei alternatyvai. **4.15.** a) kai alternatyva yra $\bar{H} : \sigma > \sigma_0$, tai H atmetame, kai $T = \sum_i (X_i - \mu) < \chi^2_{1-\alpha}(2n)/(2\sigma_0)$; jeigu alternatyva yra $\bar{H} : \sigma < \sigma_0$, tai H atmetame, kai $T > \chi^2_\alpha(2n)$; b) Jeigu alternatyva yra $\bar{H} : \mu > \mu_0$, tai kriterijaus funkcija $\varphi(\mathbf{X}) = 1$, kai $X_{(1)} \geq \mu_0 - (\ln \alpha)/(\sigma n)$, ir $\varphi(\mathbf{X}) = 0$ kitais atvejais; jeigu alternatyva yra $\mu < \mu_0$, tai kriterijaus funkcija $\varphi(\mathbf{X}) = 1$, kai $X_{(1)} < \mu_0$, ir $\varphi(\mathbf{X}) = \alpha$, kai $X_{(1)} \geq \mu_0$. **4.16.** 0,0879; 0,2052; 0,3731; 0,5703, kai $\alpha = 0,05$; 0,1581; 0,3101; 0,4917; 0,6752, kai $\alpha = 0,1$; 0,2891; 0,4877; 0,6804; 0,8350, kai $\alpha = 0,2$. Imties didumas: a) $n \geq 39$; b) $n \geq 471$. **4.17**. Prielaida atmetama. **4.18.** $p \approx 7,39(\%)$. **4.19.** Reikia tikrinti po $n = 251$ lemputę; partiją atmetame, kai defektinių lempučių skaičius $m \geq 18$. **4.20.** a) Remdamiesi Bernulio schema, tikriname hipotezę $H : p = p_0$ su alternatyva $\bar{H} : p > p_0$: a) $n = 10$, $p_0 = e^{-1}$, kritinė sritis apibrėžta nelygybe $X \geq 4$; b) $n = 8$, $p_0 = e^{-2}$, kritinė sritis – $X \geq 3$. b) Reikšmingumo lygmuo: a) 0,5344; b) 0,0820. **4.21.** Reikšmingumo lygmuo 0,0989; kriterijaus galia: 0,4557; 0,8208; 0,9830; 1,000. **4.22.** a) $k = 37$; 0,6527; 0,9726; 0,9995; b) $k = 6$; 0,0906; 0,2207; 0,3922. **4.23.** H_0 atmetame, kai: a) $S = X_1 + ... + X_n > \theta_0 \chi^2_\alpha(2n)/2$; b) $S = -(\ln X_1 + ... + \ln X_n) < \chi^2_{1-\alpha}(2n)/(2\theta_0)$; c)$\sum_i (X_i - 1)^2 > \theta_0 \chi^2_\alpha(n)$; d) $S = X_1^c + ... + X_n^c > \theta_0^c \chi^2_\alpha(2n)/2$. **4.24.** a) $(X_{(1)},\ X_{(n)}) \sim f(x,\ y) = n(n-1)(y - x)^{n-2}$, $\theta < x < y < \theta + 1$. b) 0. c) $\beta(\theta) = 1 - (1 - (\theta - \theta_0))^n$, kai $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 1$; $\beta(\theta) = 1$, kai $\theta > \theta_0 + 1$. d) $n \geq 44$. **4.26.** H_0 atmetame, kai $S = X_1 + ... + X_{10} \geq 5$; atmetame su tikimybe $\gamma_1 = 0,4657$, kai $S = 0$; atmetame su tikimybe $\gamma_2 = 0,1954$, kai $S = 4$; b) H_0 atmetame, kai $S = 0$; 8; 9; 10; atmetame su tikimybe $\gamma_1 = 0,4702$, kai $S = 1$; atmetame su tikimybe $\gamma_2 = 0,2992$, kai $S = 7$. **4.27.** Hipotezę H_0 atmetame, kai $X < k_1$ arba $X > k_2$; atmetame su tikimybe γ_i, kai $X = k_i$, $i = 1,\ 2$; konstantos $k_1,\ k_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2$ randamos iš lygčių sistemos: $p_0[\sum_{k=k_1+1}^{k_2-1} q_0^{k-1} + (1-\gamma_1)q_0^{k_1} + (1-\gamma_2)q_0^{k_2}] = 1-\alpha$, $p^2[\sum_{k=k_1+1}^{k_2-1} kq_0^{k-1} + (1-\gamma_1)k_1q_0^{k_1-1} + (1-\gamma_2)k_2q_0^{k_2-1}] = 1-\alpha$. **4.31.** TG kriterijus atmeta H, kai $a_2 = \sum_i X_i^2/n > c$; konstanta c randama iš sąlygos $\mathbf{P}\{a_2 > c|\mu_0\} = \alpha$. Kadangi $\mathbf{E}(a_2|\mu) = \mu^2 + k\mu$ ir $\boldsymbol{V}(a_2|\mu) = 2k\mu^2(k+2\mu)$, tai esant dideliems n konstanta $c \approx \mu_0^2+k\mu_0+\mu_0 z_\alpha\sqrt{2k(k+2\mu_0)/n}$; kriterijaus galia $\beta(\mu) \approx 1-\Phi(\sqrt{n}(c-\mu^2-k\mu)/(\mu\sqrt{2k(k+2\mu)})$, $\mu > \mu_0$. **4.32.** Tai atskiras 33 pratimo atvejis, kai imties didumas lygus 1, o vietoje k imama k/n, t. y. 33 pratimo atsakymuose reikia įrašyti $\bar{X}^2$ vietoje a_2 ir k/n vietoje k. **4.33.** H atmetame, kai $X > c$, čia c yra mažiausias sveikasis skaičius, tenkinantis nelygybę $p = \beta_0^c \le \alpha$, ir atmetame su tikimybe $\gamma = (\alpha - p)/(\beta_0^{c-1}(1-\beta_0))$, kai $X = c$.

4.4–4.5 skyreliai

4.36. Jeigu σ žinoma, tai kriterijaus galia lygi 0,5573; 0,7228; 0,8505, kai $n = 5$; 0,8119; 0,9354; 0,9842, kai $n = 10$; 0,9270; 0,9871; 0,9987, kai $n = 15$. Jeigu σ nežinoma, tai kriterijaus galia lygi 0,5869; 0,7280; 0,8393, kai $n = 5$; 0,8077; 0,9275; 0,9795, kai $n = 10$; 0,9216; 0,9844; 0,9961, kai $n = 15$. **4.37.** *Nurodymas.* Santykis $(X_1-\mu_1)/\sqrt{\hat{\sigma}^2}$ turi Stjudento skirstinį $S(n-s)$, kai H teisinga; čia $\hat{\sigma}^2 = \sum_{j=s+1}^n X_j^2/(n-s)$. **4.38.** a) H_0 atmetame, kai $X_1 < k$, ir atmetame su tikimybe γ, kai $X_1 = k$; čia k – mažiausias sveikasis skaičius, kuriam galioja nelygybė $\sum_{m=0}^{k-1} C_N^m/2^N = p \le \alpha$; $\gamma = (\alpha-p)/(C_N^k/2^N)$, $N = X_1 + X_2$; b) $\beta = \sum_{m=0}^{k-1} C_N^m 2^{N-m}/3^N + \gamma C_N^k 2^{N-k}/3^N$ pirmaisiais trimis atvejais ir $\beta = \sum_{m=0}^{k-1} C_N^m 4^{N-m}/5^N + \gamma C_N^k 4^{N-k}/5^N$ paskutiniu atveju. **4.39.** a) Hipotezė atmetama, kai $pv = 2(1-F(|t||n-1)) < \alpha$; čia t yra statistikos $T = \sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/s$ realizacija, o $F(t|\nu)$ yra Stjudento skirstinio su ν laisvės laipsnių pasiskirstymo funkcija; pasikliovimo intervalų terminais hipotezė atmetama, kai $\mu_0 < \underline{\mu}$ arba kai $\mu_0 > \bar{\mu}$; čia $(\underline{\mu}, \bar{\mu})$ yra parametro μ pasikliovimo intervalas su pasikliovimo lygmeniu $Q = 1-\alpha$. b) Hipotezė atmetama, kai $pv = \mathbf{P}\{\chi_{n-1}^2 < y^2\} < \alpha$; čia y^2 yra statistikos $s^2(n-1)/\sigma_0^2$ realizacija; pasikliovimo intervalų terminais hipotezė atmetama, kai $\bar{\sigma^2} < \sigma_0^2$; čia $(\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma^2})$ yra parametro σ^2 pasikliovimo intervalas su pasikliovimo lygmeniu $Q = 1-2\alpha$. **4.40.** Hipotezė atmetama, kai $pv = \mathbf{P}\{\chi_{2n\nu}^2 < 2\lambda_0 t\} < \alpha$; čia t yra statistikos $T = X_1 + ... + X_n$ realizacija; pasikliovimo intervalų terminais hipotezė atmetama, kai $\lambda_0 < \underline{\lambda}$; čia $(\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$ yra parametro λ pasikliovimo intervalas su pasikliovimo lygmeniu $Q = 1-2\alpha$. **4.42.** *Nurodymas.* Pažymėkime $S_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$, $i = 1, 2$. Tikėtinumo funkcija $L = h(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)\exp\{-\theta S_1 - \vartheta(S_1+S_2) - B(\theta,\vartheta)\}, \theta = \theta_1 - \theta_2, \vartheta = \theta_2$; kadangi esant teisingai hipotezei $H: \theta_1 = \theta_2$ (arba $\theta = 0$), statistika $S_1/(S_1+S_2) \sim Be(n_1\gamma_1, n_2\gamma_2)$, tai TGN kriterijus galime suformuluoti naudodami beta skirstinį. **4.43.** Pažymėkime $\hat{\beta}_1 = \sum_i X_i(t_i - \bar{t})/\sum_i(t_i-\bar{t})^2$, $\hat{\beta}_0 = \bar{X} - \bar{t}\hat{\beta}_1$, $\hat{\sigma}^2 = s^2 = \sum_i (X_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 t_i)^2/(n-2)$. Tada: a) H_0 atmetame, kai $(\hat{\beta}_0 - \theta_0)/(sc) > t_\alpha(n-2)$, $c^2 = 1/n + \bar{t}^2/\sum_i(t_i-\bar{t})^2$; b) H_0 atmetame, kai $|\hat{\beta}_0 - \theta_0|/(sc) > t_{\alpha/2}(n-2)$; c) H_0 atmetame, kai $(\hat{\beta}_1 - \theta_0)/(sd) > t_\alpha(n-2)$, $d^2 = 1/\sum_i(t_i-\bar{t})^2$; (d) H_0 atmetame, kai $|\hat{\beta}_1 - \theta_0|/(sd) > t_{\alpha/2}(n-2)$. **4.44.** a) *Nurodymas.* Atlikime transformaciją $U_i = \Delta_0 X_i + Y_i, Z_i = X_i - Y_i/\Delta_0, i = 1, ..., n$. Tada hipotezė $H_0: \sigma_2/\sigma_1 = \Delta_0$ yra ekvivalenti hipotezei, kad koreliacijos koeficientas $\rho = \rho(U_i, Z_i) = 0$. Statistika R yra empirinio koreliacijos koeficiento, apskaičiuoto pagal imtį $(U_i, Z_i)^T, i = 1, ..., n$, modulis; b) $(n-2)R^2/(1-R^2) \sim F(1, n-2)$; c) *Nurodymas.* Atlikime transformaciją $U_i = X_i + Y_i, Z_i = X_i - Y_i, i = 1, ..., n$. Tada statistika $V = |\bar{Z}|/\sqrt{\sum_i (Z_i - \bar{Z})^2}$; d) $(n-1)V^2 \sim F(1, n-1)$.

4.6 skyrelis

4.46. Pažymėkime $n = n_1 + ... + n_k, X_{i(1)} = \min(X_{i1}, ..., X_{in_i})$, $X_{(1)} = \min(X_{1(1)}, ..., X_{k(1)})$. Tada: a) Tikėtinumų santykis $\Lambda = \prod_{i=1}^k (\hat{\sigma}_i/\widetilde{\sigma}_i)^{n_i}$, $\hat{\sigma}_i = \sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - X_{i(1)})/n_i$, $\widetilde{\sigma}_i = \sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - X_{(1)})/n_i$; b) $\Lambda = \prod_{i=1}^k (\hat{\sigma}_i/\hat{\sigma})^{n_i}$, $\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^k n_i\hat{\sigma}_i/n$; c) $\Lambda = (\hat{\sigma}/\widetilde{\sigma})^n$, $\widetilde{\sigma} = \sum_{i=1}^k n_i\widetilde{\sigma}_i/n$. **4.51.** Tikėtinumų santykis $\Lambda = [1/(1+kF/(n-k))]^{n/2}$. **4.52.** Tikėtinumų santykis $\Lambda = \hat{p}^{S_1}(1-\hat{p})^{n_1-S_1}\hat{p}^{S_2}(1-\hat{p})^{n_2-S_2}/[\hat{p}_1^{S_1}(1-\hat{p}_1)^{n_1-S_1}\hat{p}_2^{S_2}(1-\hat{p}_2)^{n_2-S_2}]$; $S_1 = X_1 + ... + X_{n_1}$, $S_2 = Y_1 + ... + Y_{n_2}$, $\hat{p}_1 = S_1/n_1$, $\hat{p}_2 = S_2/n_2$, $\hat{p} = (S_1+S_2)/(n_1+n_2)$. **4.53.** $\Lambda = \hat{p}^S(1-\hat{p})^{n-S}/(\prod_{i=1}^k \hat{p}_i^{S_i}(1-\hat{p}_i)^{n_i-S_i})$, $S = S_1 + ... + S_k$, $n = n_1 + ... + n_k$, $\hat{p} = S/n$, $\hat{p}_i =$

S_i/n_i, $i=1,2,...,k$; $\quad -2\ln\Lambda \xrightarrow{d} \chi^2_{k-1}$, kai $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,k$, ir hipotezė $H: p_1=p_2=...=p_k$ yra teisinga. **4.54.** Tikėtinumų santykis $\Lambda=(\hat\lambda^{S_1+S_2}/(\hat\lambda_1^{S_1}\hat\lambda_2^{S_2}))\exp\{n_1\hat\lambda_1+n_2\hat\lambda_2-(n_1+n_2)\hat\lambda\}$; $\;S_1=X_1+...+X_{n_1}$, $S_2=Y_1+...+Y_{n_2}$, $\hat\lambda_1=S_1/n_1$, $\hat\lambda_2=S_2/n_2$, $\hat\lambda=(S_1+S_2)/(n_1+n_2)$. **4.55.** $\Lambda=\hat\lambda^S/(\prod_{i=1}^k\hat\lambda_i^{S_i})$, $\;S=S_1+...+S_k$, $n=n_1+...+n_k$, $\hat\lambda=S/n$, $\hat\lambda_i=S_i/n_i$, $i=1,2,...,k$; $\quad -2\ln\Lambda\xrightarrow{d}\chi^2_{k-1}$, kai $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,k$, ir hipotezė $H:\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_k$ yra teisinga. **4.56.** A.d. $\bar X/\bar Y=(\theta_1/\theta_2)F_{2n_1,2n_2}$; čia $F_{m,n}$ – a.d., turintis Fišerio skirstinį su m ir n laisvės laipsnių. Tikėtinumų santykis $\Lambda=(n_1^{n_1}n_2^{n_2}/(n_1+n_2)^{n_1+n_2})(1+n_1\bar X/(n_2\bar Y))^{n_1+n_2}(n_2\bar Y)^{n_1}/\,/(n_1\bar X)^{n_1}$. Tegu alternatyva yra $\bar H:\theta_1>\theta_2$. Tada hipotezė H atmetama, kai $\bar X/\bar Y>F_\alpha(2n_1,2n_2)$, o kriterijaus galia $\beta(\theta_2)=\mathbf{P}\{F_{2n_1,2n_2}>(\theta_2/\theta_1)F_\alpha(2n_1,2n_2)\}$, $\theta_2<\theta_1$. **4.57.** *Nurodymas.* Pasinaudokime tuo, kad a.d. $V=\sum_i(m_i-np_i^0)^2/(np_i^0)$ apytiksliai turi χ^2 skirstinį su 3 laisvės laipsniais; čia p_i^0 – tikimybė, kad a.d. $X\sim N(0,1/4)$ įgijo reikšmę iš i-ojo intervalo: $p_1^0=0,00135; p_2^0=0,1573; p_3^0=0,6827; p_4^0=0,15865$. Atsitiktinis dydis V įgijo reikšmę 2,6578. Asimptotinė P-reikšmė $pv_a=\mathbf{P}\{\chi^2_3>2,6578\}=0,4474$. Atmesti hipotezę nėra pagrindo. **4.58.** Analogiškai kaip ir 4.57 pratime gauname, kad a.d. V, kuris apytiksliai turi χ^2 skirstinį su 3 laisvės laipsniais, įgijo reikšmę 19,453. Asimptotinė P-reikšmė $pv_a=\mathbf{P}\{\chi^2_3>19,453\}=0,00022$. Hipotezę atmetame. **4.59.** Atsitiktinis dydis V, kuris apytiksliai turi χ^2 skirstinį su 2 laisvės laipsniais, įgijo reikšmę 5,3446. Asimptotinė P-reikšmė $pv_a=\mathbf{P}\{\chi^2_2>5,3446\}=0,0691$. Hipotezę atmetame, jei kriterijaus reikšmingumo lygmuo viršija 0,0691. Tikrindami hipotezę $H:X\sim B(2,p)$, apskaičiuojame statistikos $\hat V=(m_0-n\hat p^2)^2/(n\hat p^2)+(m_1-n2\hat p\hat q)^2/(n2\hat p\hat q)+(m_2-n\hat q^2)^2/(n\hat q^2)$, kuri apytiksliai turi χ^2 skirstinį su 1 laisvės laipsniu, reikšmę; čia $\hat p$ yra tikimybės p DT įvertinys. Gauname $\hat p==(1017+1054)/4040=0,5126$; $\hat V=0,2317$. Asimptotinė P-reikšmė $pv_a=\mathbf{P}\{\chi^2_1>0,2317\}=0,6303$. Atmesti hipotezę nėra pagrindo. **4.60.** Parametro p DT įvertis $\hat p=0,2675$. Analogiškai kaip 4.59 pratime statistikos $\hat V$, kuri esant teisingai hipotezei apytiksliai turi χ^2 skirstinį su 1 laisvės laipsniu, reikšmė yra $\hat V=0,757$. Asimptotinė P-reikšmė $pv_a=\mathbf{P}\{\chi^2_1>0,757\}=0,3843$. Todėl atmesti hipotezę nėra pagrindo. **4.61.** Parametro p DT įvertis $\hat p=0,1232$. Analogiškai kaip 4.59 pratime statistikos $\hat V$, kuri esant teisingai hipotezei apytiksliai turi χ^2 skirstinį su 1 laisvės laipsniu, reikšmė lygi $0,444$. Todėl atmesti hipotezę nėra pagrindo.

4.7 skyrelis

4.62. $n\ge 74$. **4.63.** 0,6737; $n\ge 133$. **4.64.** Taikant TGN kriterijų $n\ge 45$, taikant simetrinį kriterijų $n\ge 47$. **4.65.** Pereiname prie logaritmų. Kadangi atmesti dispersijų lygybės hipotezę nėra pagrindo, tai taikome kriterijų (4.7.17). Statistikos T realizacija $t=4,2745$; P reikšmė $pv=9,45\times10^{-5}$. Hipotezė atmetama. **4.66.** Pagal turimus duomenis randame vidurinio laikotarpio vidurkio ir kvadratinio nuokrypio įverčius $\bar X_0=16,563, s_0=1,5362$ ir taikome Stjudento dviejų imčių kriterijų. Lygindami pirmą ir vidurinį laikotarpius, gauname statistikos T realizaciją 0,8761, o lyginant vidurinį ir paskutinį laikotarpius statistikos T realizacija yra -1,5652; atitinkamos P reikšmės esant dvipusei alternatyvai yra 0,3841 ir 0,1222. Atmesti hipotezes nėra pagrindo. **4.67.** Neatmetama. **4.68.** $n\ge 211$; $n\ge 74$; $n\ge 31$. **4.69.** Dispersijų lygybės hipotezė neatmetama, nes a.d., turintis Fišerio skirstinį $F(7,9)$, įgijo reikšmę 1,9584; sisteminių paklaidų vienodumo hipotezė neatmetama, nes a.d., turintis Stjudento skirstinį $S(16)$, įgijo reikšmę 0,4099. **4.70.** Tikriname hipotezę $H:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, kai alternatyva yra $\bar H:\sigma_1^2<\sigma_2^2$. Statistika $F=s_1^2/s_2^2$, kuri esant teisingai hipotezei turi Fišerio skirstinį $\nu_1=10,\nu_2=10$ laisvės laipsnių įgijo reikšmę 0,1783. P reikšmė $pv=\mathbf{P}\{F_{10;10}<0,1783\}=0,0059$. Hipotezę atmetame, kai $\alpha\ge 0,0059$. **4.71.** Statistika T, turinti Stjudento skirstinį su 97 laisvės laipsniais, įgijo reikšmę 5,7568. P reikšmė $pv=2\mathbf{P}\{|t_{97}|>5,7568\}=2\times10^{-7}$. Hipotezė atmetama. **4.72.** a) Tikėtinumų santykio statistika $\tilde R_{TS}$ (žr. 4.63 pvz.) įgijo reikšmę 1,8931; asimptotinė P reikšmė $pv=\mathbf{P}\{\chi^2_2>1,8931\}=0,3881$; atmesti hipotezę nėra pagrindo. b) Hipotezė neatmetama. **4.73.** Tikėtinumų santykio statistika įgijo reikšmę 0,3086; atmesti hipotezę nėra pagrindo. **4.74.** a) Statistika Z įgijo reikšmę 1,882. Tegu $F(x|\nu)$ yra Stjudento skirstinio su ν laisvės laipsnių pasiskirstymo funkcija. Tada P-reikšmė $pv=2[1-F(1,882|18)]=0,0761$. Reikšmingumo lygmens $\alpha=0,05$ kriterijumi hipotezė neatmetama. b) Statistika T įgijo reikšmę 3,2143. P reikšmė $pv=2[1-F(3,2143|8)]=0,0106$; hipotezę atmetame, kai kriterijaus reikšmingumo lygmuo α viršija 0,0106. c) Pagal prasmę a.d.X ir Y yra teigiamai priklausomi (jei gretimų sklypelių žemė derlingesnė, tai abu a.d. X ir Y turės tendenciją įgyti didesnes reikšmes ir, atvirkščiai). Todėl lentelės duomenis reikia traktuoti kaip 10 dvimačio a.v. $(X,Y)^T$ realizacijų. Reikia taikyti 4.7.3 skyrelio metodiką, o kriterijų (4.7.15) taikyti yra nekorektiška. **4.75.** Koreliacijos koeficiento įvertis $\hat{\rho} = r = 0,7055$. Statistika U iš (4.7.29) įgijo reikšmę 2,8157. Jeigu hipotezės $H : \rho = 0$ alternatyva yra $\bar{H} : \rho > 0$, tai P reikšmė $pv = 1 - F(2,8157|8) = 0,0113$; nepriklausomumo hipotezė $H : \rho = 0$ atmetama, kai kriterijaus reikšmingumo lygmuo $\alpha \geq 0,0113$. **4.76.** Statistika T įgijo reikšmę 1,7718. Jeigu alternatyva yra $\bar{H} : \theta > 0$, tai P reikšmė $pv = 1 - F(1,7718|15) = 0,0484$. Hipotezė $H : \theta = 0$ atmetama, kai kriterijaus reikšmingumo lygmuo $\alpha \geq 0,0484$. **4.77.** Tikriname hipotezę dėl a.d. X ir Y vidurkių lygybės. Statistika T įgijo reikšmę 4,1212. Jeigu alternatyva dvipusė, tai P reikšmė $pv = 2[1 - F(4,1212|9) = 0,0026$. Hipotezė $H : \theta = 0$ atmetama, kai kriterijaus reikšmingumo lygmuo $\alpha \geq 0,0026$. **4.78.** Statistika $T = X_1 + ... + X_n$ įgijo reikšmę $t = 185$. P reikšmė $pv = \mathbf{P}\{\chi^2_{400} < 2t\} = 01435$. Hipotezę atmesti nėra pagrindo. **4.79.** Hipotezė neatmetama. 3.155 pratimo atsakyme surastas pasikliovimo intervalas uždengia hipotetinę reikšmę λ_0. **4.80.** Hipotezė neatmetama. 3.155 pratimo atsakyme surastas pasikliovimo intervalas uždengia hipotetinę reikšmę λ_0. **4.81.** a) Tikėtinumų santykio statistika R_{TS} įgijo reikšmę 19,3386; asimptotinė P reikšmė $pv_a = \mathbf{P}\{\chi^2_6 > 19,3386\} = 0,0036$. Hipotezė atmetama, jei kriterijaus reikšmingumo lygmuo viršija 0,0036. b) Tikėtinumų santykio statistika R_{TS} įgijo reikšmę 5,1783; asimptotinė P reikšmė $pv_a = \mathbf{P}\{\chi^2_4 > 5,1783\} = 0,2695$. Hipotezė neatmetama. **4.82.** Defektinių gaminių skaičius 18; nerandomizuoto kriterijaus P reikšmė $pv = \mathbf{P}\{S \geq 18\}$; čia $S \sim B(350; 0,03)$; randame $pv = 0,0201$. Hipotezė atmetama, jei kriterijaus reikšmingumo lygmuo viršija 0,0201. **4.83.** Antros rūšies gaminių skaičius 277; nerandomizuoto kriterijaus P reikšmė $pv = \mathbf{P}\{S \geq 277\}$; čia $S \sim B(1000; 0,25)$; randame $pv = 0,0275$. Hipotezė atmetama, jei kriterijaus reikšmingumo lygmuo viršija 0,0275. **4.84.** Tikėtinumų santykio statistika R_{TS} įgijo reikšmę 8,7064; asimptotinė P-reikšmė $pv_a = \mathbf{P}\{\chi^2_3 > 8,7064\} = 0,0335$. Hipotezė atmetama, jei kriterijaus reikšmingumo lygmuo viršija 0,0335. **4.85.** Tikrinama hipotezė $H : \lambda_1 = \lambda_2$. Jei alternatyva yra $\bar{H} : \lambda_1 > \lambda_2$, tai P reikšmė $pv = \mathbf{P}\{S \geq 150\}$; čia $S \sim B(400; 1/3)$. Randame $pv = 0,0442$. Hipotezė atmetama, jei kriterijaus reikšmingumo lygmuo viršija 0,0442. **4.86.** P reikšmė $pv = \mathbf{P}\{S \leqslant 75\}$; čia $S \sim B(275; 1/3)$. Randame $pv = 0,0181$. Hipotezė atmetama, jei kriterijaus reikšmingumo lygmuo viršija 0,0181. **4.87.** Tikrinama hipotezė $H : \lambda_1 = \lambda_2$. Jei alternatyva yra $\bar{H} : \lambda_1 > \lambda_2$, tai P reikšmė $pv = \mathbf{P}\{S \geq 20026\}$; čia $S \sim B(39606; 1/2)$. Randame $pv = 0,0123$. Hipotezė atmetama, jei kriterijaus reikšmingumo lygmuo viršija 0,0123. **4.88.** Statistika $\sqrt{n}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)/\sqrt{\hat{p}_1\hat{q}_1 + \hat{p}_2\hat{q}_2}$, kuri esant teisingai hipotezei asimptotiškai turi standartinį normlųjį skirstinį, įgijo reikšmę 4,0834; asimptotinė P reikšmė $pv_a = 2(1 - \Phi(4,0834)) = 4,44 \times 10^{-5}$. Hipotezė atmetama. **4.89.** Tikėtinumų santykio statistika R_{TS} įgijo reikšmę 9,3113; asimptotinė P reikšmė $pv_a = \mathbf{P}\{\chi^2_4 > 9,3113\} = 0,0538$. Hipotezė atmetama, jei kriterijaus reikšmingumo lygmuo viršija 0,0538. **4.90.** Statistika $2n\bar{R}^2$ įgijo reikšmę 43,888; asimptotinė P reikšmė $pv_a = \mathbf{P}\{\chi^2_2 > 43,888\} = 2,9 \cdot 10^{-10}$; statistika $-2\ln\Lambda$ įgijo reikšmę 55,099; asimptotinė P reikšmė $pv_a = \mathbf{P}\{\chi^2_{11} > 55,099\} = 7,4 \cdot 10^{-8}$. Hipotezė atmetama. **4.91.** Statistika $2n\bar{R}^2$ įgijo reikšmę 10,2248; asimptotinė P reikšmė $pv_a = \mathbf{P}\{\chi^2_2 > 10,2248\} = 0,006$; statistika $-2\ln\Lambda$ įgijo reikšmę 20,0797; asimptotinė P reikšmė $pv_a = \mathbf{P}\{\chi^2_{11} > 20,0797\} = 0,0443$. Reikšmingumo lygmens $\alpha = 0,05$ kriterijumi hipotezė atmetama. **4.92.** Hipotezė atmetama, nes statistika $2n\bar{R}^2$ įgijo reikšmę 112,8, o statistika $-2\ln\Lambda$ įgijo reikšmę 137,9.

1 priedas. Pagalbinės lentelės

1.P.1 lentelė. Pateikiama pagrindinių žinių apie dažnai naudojamus diskrečiuosius tikimybinius skirstinius.

1.P.2 lentelė. Pateikiama pagrindinių žinių apie dažnai naudojamus absoliučiai tolydžiuosius skirstinius.

Naudojami trumpiniai: nat. sk. – natūralusis skaičius; sv. nen. sk. – sveikasis neneigiamas skaičius; brūkšnys parodo, kad funkcija neturi paprastos išraiškos.

1.P.3 lentelė. Pateikiama žinių apie tikimybinių skirstinių sąryšius.

1.P.1 lentelė. Diskretieji tikimybiniai skirstiniai

Skirstinys	Parametrai	$\mathbf{P}\{X=k\}$	Vidurkis	Dispersija	Generuojančioji funkcija
Binominis	$0<p<1$, n-nat.sk.	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k=0,...,n$	np	$np(1-p)$	$(1-p+ps)^n$
Geometrinis	$0<p<1$	$p(1-p)^{k-1}$, $k=1,2,...$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{ps}{1-qs}$
Paskalio	$0<p<1$, n-nat.sk.	$C_{n+k-1}^k p^n (1-p)^k$ $k=0,1,...$	$\frac{n(1-p)}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$	$\left(\frac{p}{1-qs}\right)^n$
Neigiamasis binominis	$0<p<1$, $n>0$	$\frac{\Gamma(n+k)}{k!\Gamma(n)} p^n (1-p)^k$ $k=0,1,...$	$\frac{n(1-p)}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$	$\left(\frac{p}{1-qs}\right)^n$
Apibendrinta-binominis	$\gamma,\ \eta>0$, n – nat.sk.	$C_n^k \frac{\Gamma(\gamma+\eta)\Gamma(k+\gamma)\Gamma(n-k+\eta)}{\Gamma(\eta)\Gamma(\gamma)\Gamma(n+\gamma+\eta)}$ $k=0,1,...,n$	$n\frac{\gamma}{\gamma+\eta}$	$n\frac{\gamma\eta(\gamma+\eta+n)}{(\gamma+\eta)^2(\gamma+\eta+1)}$	—
Hipergeometrinis	N, M, n–nat.sk. $M\le N,\ n\le N$	$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\ k\le \min(n,\ M)$ $\max(0,\ n-N+m)\le k$	$\frac{nM}{N}$	$np(1-p)\frac{(N-n)}{(N-1)}$ $p=M/N$	—
Neigiamasis hipergeometr.	N, M, n–nat.sk. $M\le N,\ n\le N$	$\frac{C_{n+k-1}^{n-1} C_{N-n-k}^{M-n}}{C_N^k}$ $k=0,1,...,N-M$	$\frac{n(N-M)}{M+1}$	žr. (2.25)	—
Pojos	$b,\ r,\ c>0$	žr. (2.27)	$\frac{nb}{b+r}$	$\frac{nbr(b+r+nc)}{(b+r)^2(b+r+c)}$	—
Puasono	$\lambda>0$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,...$	λ	λ	$e^{-\lambda(1-s)}$
Sudėtingasis Puasono	$t>0$, $\lambda>0$	—	$\lambda t\psi'(1)$	$\lambda t(\psi'(1)+\psi''(1))$	$e^{-\lambda t(1-\psi(s))}$
Logaritminis	$0<p<1$	$-\frac{1}{\ln p}\frac{q^k}{k},\quad k=1,2,...$	$-\frac{q}{p\ln p}$	$-\frac{q}{p^2\ln p}(1+\frac{q}{\ln p})$	$\frac{\ln(1-sq)}{\ln p}$
Polinominis	$0<\pi_i<1$, n -nat.sk. $\pi_1+...+\pi_k=1$	$\frac{n!}{m_1!...m_k!}\pi_1^{m_1}...\pi_k^{m_k}$ $0\le m_i\le n,\ m_i+...+m_k=n$	$n\boldsymbol{\pi}$	$\sigma_{ii}=n\pi_i(1-\pi_i)$, $\sigma_{ij}=-n\pi_i\pi_j, i\ne j$	$(\pi_1 s_1+...+$ $+\pi_k s_k)^n$
Daugiamatis hipergeometr.	$N, M_1,...,M_k$, n--nat.sk; $\sum_i M_i=N$	$\frac{C_{M_1}^{m_1}...C_{M_k}^{m_k}}{C_N^n}$	$\frac{n}{N}\boldsymbol{M}$	$\sigma_{ii}=np_i(1-p_i)(N-n)/(N-1)$, $\sigma_{ij}=np_ip_j(N-n)/(N-1),\ i\ne j$	—

1.P.2 lentelė. Tolydieji tikimybiniai skirstiniai

Skirstinys	Parametrai	Tankis	Vidurkis	Dispersija	Charakteristinė funkcija
Normalusis	$-\infty < \mu < \infty$, $0 < \sigma < \infty$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$ $-\infty < x < \infty$	μ	σ^2	$\exp\{i\mu t - \frac{t^2\sigma^2}{2}\}$
Pusiau normalusis	$0 < \sigma < \infty$	$\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\},\ x > 0$	$\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$\sigma^2(1-\frac{2}{\pi})$	$2e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}\Phi(it\sigma)\}$
Relėjaus	$0 < \sigma < \infty$	$\frac{x}{\sigma^2}\exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\},\ x > 0$	$\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\sigma^2(2-\frac{\pi}{2})$	—
Maksvelo	$0 < \sigma < \infty$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^2}{\sigma^3}\exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\},\ x > 0$	$2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$\frac{3\pi-8}{\pi}$	—
Lognormalusis	$-\infty < \mu < \infty$ $0 < \sigma < \infty$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$ $x > 0$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2\mu+\sigma}(e^{\sigma^2}-1)$	—
Koši	$-\infty < \mu < \infty$ $0 < \sigma < \infty$	$\frac{1}{\pi}\frac{\sigma}{\sigma^2+(x-\mu)^2}$ $-\infty < x < \infty$	neegzistuoja	neegzistuoja	$e^{i\mu t-\sigma\|t\|}$
Chi kvadrato	n – nat.sk.	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}},\ x > 0$	n	$2n$	$\frac{1}{(1-2it)^{n/2}}$
Necentrinis chi kvadrato	n – nat.sk. $\delta > 0$	žr. (3.18)	$n+\delta$	$2(n+2\delta)$	$\frac{\exp\{it\sqrt{\delta}-t^2/2\}}{(1-2it)^{(n-1)/2}}$
Stjudento	n – nat.sk.	$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ $-\infty < x < \infty$	0, $n > 1$	$\frac{n}{n-2}$, $n > 2$	—
Necentrinis Stjudento	n – nat.sk. $-\infty < \mu < \infty$	žr. (3.23)	$\mu M_n,\ M_n = \sqrt{\frac{n}{2}}\times$ $\times\frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)},\ n > 1$	$\frac{n}{n-2}+$ $+\mu^2(\frac{n}{n-2}-M_n^2),\ n > 2$	—
Fišerio	m – nat.sk. n – nat.sk.	$\frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}\times$ $\times x^{\frac{m}{2}-1}(n+mx)^{-\frac{m+n}{2}}$	$\frac{nm}{n-2}$, $n > 2$	$\frac{2n^2(n+m-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$, $n > 4$	—
Necentrinis Fišerio	$m,\ n$ – nat.sk. $\delta > 0$	žr. (3.27)	$\frac{n(m+\delta)}{n-2}$, $n > 2$	$2n^2(\frac{m+2\delta}{(n-2)(n-4)}+$ $+\frac{2(m+\delta)^2}{(n-2)^2(n-4)})$, n>4	—

1.P.2 lentelės tęsinys. Tolydieji tikimybiniai skirstiniai

Skirstinys	Parametrai	Tankis	Vidurkis	Dispersija	Charakteristinė funkcija
Gama	$\lambda > 0, \quad \eta > 0$	$\frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)} x^{\eta-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$	$\frac{\eta}{\lambda}$	$\frac{\eta}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^\eta$
Eksponentinis	$\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}, \ x > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - it}$
Paslinktasis eksponentinis	$\lambda > 0,$ $-\infty < \mu < \infty$	$\lambda e^{-\lambda(x-\mu)},$ $\mu < x < \infty$	$\mu + \frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$e^{i\mu t} \frac{\lambda}{\lambda - it}$
Laplaso	$-\infty < \mu < \infty$ $0 < \lambda < \infty$	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda\|x-\mu\|},$ $-\infty < x < \infty$	μ	$\frac{2}{\lambda^2}$	$e^{it\mu} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}$
Logistinis	$\theta > 0,$ $-\infty < \mu < \infty$	$\frac{1}{\theta} \frac{\exp\{-(x-\mu)/\theta\}}{1+\exp\{-(x-\mu)/\theta\}},$ $-\infty < x < \infty$	μ	$\frac{\theta^2 \pi^2}{3}$	$e^{i\mu t}\Gamma(1 + it\theta)\times$ $\times\Gamma(1 - it\theta)$
Pareto	$\theta > 0, \ \alpha > 0$	$\frac{\theta\alpha^\theta}{x^{\theta+1}}, \ \alpha < x < \infty$	$\frac{\theta\alpha^2}{\theta-1}, \ \theta > 1$	$\frac{\theta\alpha^2}{(\theta-1)^2(\theta-2)}, \ \theta > 2$	—
Eksponentinių skirstinių mišinys	$0 < \theta_1, \ \theta_2 < \infty,$ $0 < p_1 < 1,$ $p_2 = 1 - p_1$	$\frac{p_1}{\theta_1} \exp\{-\frac{x}{\theta_1}\}+$ $+\frac{p_2}{\theta_2} \exp\{-\frac{x}{\theta_2}\},$ $0 < x < \infty$	$\theta_1 p_1 + \theta_2 p_2$	$p_1\theta_1^2 + p_2\theta_2^2+$ $+p_1 p_2(\theta_1 - \theta_2)^2$	$\frac{p_1}{1-it\theta_1} + \frac{p_2}{1-it\theta_2}$
Loglogistinis	$\theta > 0, \ \nu > 0$	$\frac{\nu}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\nu-1} \times$ $\times(1 + (x/\theta)^\nu)^{-2}$ $0 < x < \infty$	$\theta\Gamma(1 + 1/\nu)\times$ $\times\Gamma(1 - 1/\nu)$	$\theta^2(\Gamma(1 + 2/\nu)\Gamma(1-$ $-2/\nu) - \Gamma^2(1 + 1/\nu)\times$ $\times\Gamma^2(1 - 1/\nu)$	—
Veibulo	$\eta > 0$ $\sigma > 0$	$\frac{\eta}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta-1} \exp\{-(\frac{x}{\sigma})^\eta\}$ $0 < x < \infty$	$\sigma\Gamma(\frac{1+\eta}{\eta})$	$\sigma^2 \left(\Gamma(\frac{2+\eta}{\eta}) - \Gamma^2(\frac{1+\eta}{\eta})\right)$	—
Apibendrintasis Veibulo	$\theta > 0,$ $\sigma > 0,$ $\gamma > 0$	$\frac{\eta}{\sigma\gamma} \frac{x}{\sigma} [1 + (\frac{x}{\sigma})^\eta]^{(1-\gamma/\gamma)} \times$ $\times \exp\{(1 - (1 + \frac{x}{\sigma})^\eta)^{1/\gamma}\},$ $0 < x < \infty$	—	—	—
Maksimaliųjų reikšmių	$-\infty < \mu < \infty,$ $0 < \sigma < \infty$	$\frac{1}{\sigma} \exp\{-\frac{x-\mu}{\sigma} - e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\}$ $-\infty < x < \infty$	$\mu - \gamma\sigma,$ $\gamma = \Gamma'(1)$	$\frac{(\pi\sigma)^2}{6}$	—
Minimaliųjų reikšmių	$-\infty < \mu < \infty,$ $0 < \sigma < \infty$	$\frac{1}{\sigma} \exp\{\frac{x-\mu}{\sigma} - e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\}$ $-\infty < x < \infty$	$\mu + \gamma\sigma,$ $\gamma = 0.5772156...$	$\frac{(\pi\sigma)^2}{6}$	—

1.P.2 lentelės tęsinys. Tolydieji tikimybiniai skirstiniai

Skirstinys	Parametrai	Tankis	Vidurkis	Dispersija	Charakteristinė funkcija
Beta	$\gamma > 0$, $\eta > 0$	$\frac{\Gamma(\gamma+\eta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\eta)} x^{\gamma-1}(1-x)^{\eta-1}$, $0 < x < 1$	$\frac{\gamma}{\gamma+\eta}$	$\frac{\gamma\eta}{(\gamma+\eta)^2(\gamma+\eta+1)}$	—
Tolygusis	$\infty < \mu_0 < \mu_1 < \infty$	$\frac{1}{\mu_1-\mu_0}, \ \mu_0 < x < \mu_1$	$\frac{\mu_1+\mu_0}{2}$	$\frac{(\mu_1-\mu_0)^2}{12}$	$\frac{e^{it\mu_1}-e^{it\mu_0}}{it(\mu_1-\mu_0)}$
k-matis normalusis	$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_k)^T$, $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]_{k\times k}$	$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^k\sqrt{\lvert\boldsymbol{\Sigma}\rvert}} \exp\{-\frac{1}{2}\times$ $\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\}$	$\boldsymbol{\mu}$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$e^{i(\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{t}/2}$, $\boldsymbol{t} \in \mathbf{R}^k$

1.P.3 lentelė Tikimybinių skirstinių sąryšiai

Atsitiktinis dydis	Funkcija	Funkcijos skirstinys
$X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$	$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$	$Y \sim N(0,\ 1)$
$X \sim N(0,\ 1)$	$Y = X^2$	$Y \sim \chi^2(1);\ Y \sim F(1,\ \infty)$
$X_i \sim N(0,\ 1),\ i = 1, ..., n$	$Y = X_1^2 + ... + X_n^2$	$Y \sim \chi^2(n)$
$Z \sim N(0,\ 1),\ X_i \sim N(0,\ 1)$ $i = 1, ..., n$	$Y = \frac{Z}{\sqrt{(X_1^2+...+X_n^2)/n}}$	$Y \sim S(n)$
$Z_i \sim N(0,\ 1),\ i = 1, ..., m,$ $X_j \sim N(0,\ 1),\ j = 1, ..., n$	$Y = \frac{(Z_1^2+...+Z_m^2)/m}{(X_1^2+...+X_n^2)/n}$	$Y \sim F(m,\ n)$
$X_1 \sim G(\lambda,\ \eta_1),$ $X_2 \sim G(\lambda,\ \eta_2)$	$Y = \frac{X_1}{X_1+X_2}$	$Y \sim Be(\eta_1,\ \eta_2)$
$X \sim G(\lambda,\ \eta)$	$Y = 2\lambda X$	$Y \sim \chi^2(2\eta)$
$X_1 \sim \chi^2(n_1),$ $X_2 \sim \chi^2(n_2)$	$Y = \frac{X_1}{X_1+X_2}$	$Y \sim Be(\frac{n_1}{2},\ \frac{n_2}{2})$
$X_1 \sim G(\lambda,\ \eta_1),$ $X_2 \sim G(\lambda,\ \eta_2)$	$Y = \frac{\eta_2 X_1}{\eta_1 X_2}$	$Y \sim F(2\eta_1,\ 2\eta_2)$
$X \sim F(m,\ n)$	$Y = \frac{mX}{n+mX}$	$Y \sim Be(\frac{m}{2},\ \frac{n}{2})$
$X \sim S(n)$	$Y = X^2$	$Y \sim F(1,\ n)$
$X \sim U(0,\ 1)$	$Y = -\frac{\ln X}{\lambda}$	$Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$
$X \sim S(n)$	$Y = \frac{n}{n+X^2}$	$Y \sim Be(\frac{n}{2},\ \frac{1}{2})$
$X_i \sim N(\mu_i,\ \sigma_i^2),$ $i = 1, ..., n$	$Y = c_1X_1 + ... + c_nX_n$	$Y \sim N(\mu,\ \sigma),$ $\mu = \sum_i c_i\mu_i,\ \sigma^2 = \sum_i c_i^2\sigma_i^2$
$X_i \sim \chi^2(n_i),$ $i = 1, ..., k$	$Y = X_1 + ... + X_k$	$Y \sim \chi^2(n),$ $n = n_1 + ... + n_k$
$X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i),$ $i = 1, ..., n$	$Y = X_1 + ... + X_n$	$Y \sim \mathcal{P}(\lambda),$ $\lambda = \lambda_1 + ... + \lambda_n$
$X_i \sim B(n_i,\ p),$ $i = 1, ..., k$	$Y = X_1 + ... + X_k$	$Y \sim B(n,\ p),$ $n = n_1 + ... + n_k$
$X_i \sim B^-(n_i,\ p),$ $i = 1, ..., k$	$Y = X_1 + ... + X_k - k + 1$	$Y \sim B^-(n,\ p),$ $n = n_1 + ... + n_k - k + 1$
$X_i \sim \mathcal{E}(\lambda),$ $i = 1, ..., n$	$Y = X_1 + ... + X_n$	$Y \sim G(\lambda,\ n),$
$X_i \sim G(\lambda,\ \eta_i),$ $i = 1, ..., n$	$Y = X_1 + ... + X_n$	$Y \sim G(\lambda,\ \eta),$ $\eta = \eta_1 + ... + \eta_n$
$X_i \sim K(\mu_i,\ \sigma_i),$ $i = 1, ..., n$	$Y = X_1 + ... + X_n$	$Y \sim K(\mu,\ \sigma),$ $\mu = \sum \mu_i,\ \sigma = \sum_i \sigma_i$
$X_i \sim K(\mu,\ \sigma),$ $i = 1, ..., n$	$Y = \bar{X} = \frac{X_1+...+X_n}{n}$	$Y \sim K(\mu,\ \sigma),$

Pastaba. Bet kurios funkcijos išraiškoje a. d. laikomi nepriklausomais.

2 priedas. Matematinės statistikos lentelės

2.P.1 lentelė. Nurodytos funkcijos $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp\{-\frac{t^2}{2}\}dt$ reikšmės, kai $x = 0,00\ (0,01)\ 4(0,1)4,9$. Dėl kompaktiškumo devynetai, esantys po kablelio, nerašomi, o tik nurodomas jų skaičius. Pavyzdžiui, $\Phi(3,76) = 0,9^4 15 = 0,999915$. Kadangi skirstinys $N(0,\ 1)$ simetrinis taško $x = 0$ atžvilgiu, tai $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

2.P.2 lentelė. Pateikiamos standartinio normaliojo skirstinio $N(0,\ 1)$ P-osios kritinės reikšmės z_P (abscisių ašies taškai, tenkinantys lygtį $\Phi(z_P) = 1 - P$, t. y. $z_P = \Phi^{-1}(1 - P)$), kai $P = 0,0010(0,0001)0,003(0,001)0{,}10\ (0,01)0,49$. Jeigu $Q > 0,5$, tai iš pasiskirstymo simetrijos gauname, kad $z_Q = -z_{1-Q}$.

2.P.3 lentelė. Pateikiamos $\chi^2(n)$ skirstinio P-osios kritinės reikšmės $\chi^2_P(n)$, t. y. abscisių ašies taškai, tenkinantys lygtį

$$\int_{\chi^2_P(n)}^{\infty} f(x;\ n)dx = P;$$

čia $f(x;\ n)$ – skirstinio $\chi^2(n)$ tikimybinio tankio funkcija. Argumentų reikšmės yra šios: n =1(1)20(2)40(5)90(10)100; $P = 0,0005,\ 0,0001,\ 0,01,\ 0,025,\ 0,05,\ 0{,}10,\ 0,20,\ 0,80,\ 0,90,\ 0,95,\ 0,975,\ 0,99,\ 0,995,\ 0,999,\ 0,9995$.

2.P.4 lentelė. Pateikiamos Stjudento skirstinio $S(n)$ P-osios kritinės reikšmės $t_P = t_P(n)$, t. y. lygties

$$\mathbf{P}\{T_n > x\} = \int_{t_P}^{\infty} f(x|n)dx = P$$

sprendiniai; čia $f(x|n)$ – Stjudento skirstinio su n laisvės laipsnių tikimybinio tankio funkcija. Argumentų reikšmės yra šios: n =1(1)20(2)30(4)50(10)100(100)500; $P = 0,0005,\ 0,001,\ 0,0025,\ 0,005,\ 0,01,\ 0,025,\ 0,05,\ 0{,}1,\ 0,25$. Paskutinėje eilutėje ($n = \infty$) yra standartinio normaliojo skirstinio kritinės reikšmės z_P. Naudojantis 2.P.4 lentele, reikia prisiminti, kad dėl simetrijos $t_P(n) = -t_{1-P}(n)$.

2.P.5 lentelė. Pateikiamos Fišerio skirstinio $F(m,\ n)$ P-osios kritinės reikšmės, kai $P = 0,05$, t. y. lygties

$$\int_{F_P(m,n)}^{\infty} f(x|m,n)dx = 0,05$$

sprendiniai; čia $f(x|m,n)$ – Fišerio skirstinio su m ir n laisvės laipsnių tikimybinio tankio funkcija. Argumentų reikšmės yra šios: $m = 1(1)10;\ 12;\ 15;\ 20;\ 24;\ 30;\ 40;\ 60;\ 120;\ \infty$; $n = 1(1)30(10)80;\ 100;\ 150;\ 200;\ 500;\ \infty$. Kai $n = \infty$, tai $F_P(m,n) = \chi^2_P(m)/m$, žr. 2.P.3 lentelę. Pasinaudojus lygybe $F_P(m,\ n)F_{1-P}(n,\ m) = 1$, iš 2.P.2 lentelės galima rasti Fišerio skirstinio kritines reikšmes, kai $P = 0,95$.

2.P.1 lentelė. Standartinio normaliojo skirstinio pasiskirstymo funkcijos reikšmės

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0.9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	$0,9^{3}03$	$0,9^{3}06$	$0,9^{3}10$	$0,9^{3}13$	$0,9^{3}16$	$0,9^{3}18$	$0,9^{3}21$	$0,9^{3}24$	$0,9^{3}26$	$0,9^{3}29$
3,2	$0,9^{3}31$	$0,9^{3}34$	$0,9^{3}36$	$0,9^{3}38$	$0,9^{3}40$	$0,9^{3}42$	$0,9^{3}44$	$0,9^{3}46$	$0,9^{3}48$	$0,9^{3}50$
3,3	$0,9^{3}52$	$0,9^{3}53$	$0,9^{3}55$	$0,9^{3}57$	$0,9^{3}58$	$0,9^{3}60$	$0,9^{3}61$	$0,9^{3}62$	$0,9^{3}64$	$0,9^{3}65$
3,4	$0,9^{3}66$	$0,9^{3}68$	$0,9^{3}69$	$0,9^{3}70$	$0,9^{3}71$	$0,9^{3}72$	$0,9^{3}73$	$0,9^{3}74$	$0,9^{3}75$	$0,9^{3}76$
3,5	$0,9^{3}77$	$0,9^{3}78$	$0,9^{3}78$	$0,9^{3}79$	$0,9^{3}80$	$0,9^{3}81$	$0,9^{3}81$	$0,9^{3}82$	$0,9^{3}83$	$0,9^{3}83$
3,6	$0,9^{3}84$	$0,9^{3}85$	$0,9^{3}85$	$0,9^{3}86$	$0,9^{3}86$	$0,9^{3}87$	$0,9^{3}87$	$0,9^{3}88$	$0,9^{3}88$	$0,9^{3}89$
3,7	$0,9^{3}89$	$0,9^{3}90$	$0,9^{4}00$	$0,9^{4}04$	$0,9^{4}08$	$0,9^{4}12$	$0,9^{4}15$	$0,9^{4}18$	$0,9^{4}22$	$0,9^{4}25$
3,8	$0,9^{4}28$	$0,9^{4}31$	$0,9^{4}33$	$0,9^{4}36$	$0,9^{4}38$	$0,9^{4}41$	$0,9^{4}43$	$0,9^{4}46$	$0,9^{4}48$	$0,9^{4}50$
3,9	$0,9^{4}52$	$0,9^{4}54$	$0,9^{4}56$	$0,9^{4}58$	$0,9^{4}59$	$0,9^{4}61$	$0,9^{4}63$	$0,9^{4}64$	$0,9^{4}66$	$0,9^{4}67$
4,0	$0,9^{4}68$	$0,9^{4}79$	$0,9^{4}87$	$0,9^{5}15$	$0,9^{5}46$	$0,9^{5}66$	$0,9^{5}79$	$0,9^{5}87$	$0,9^{6}21$	$0,9^{6}52$

2.P.2 lentelė. Standartinio normaliojo skirstinio P–osios kritinės reikšmės

P	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,001	3,0902	3,0618	3,0357	3,0115	2,9889	2,9677	2,9478	2,9291	2,9112	2,8943
0,002	2,8782	2,8627	2,8480	2,8338	2,8202	2,8070	2,7943	2,7822	2,7703	2,7589
0,003	2,7478	2,7370	2,7266	2,7164	2,7065	2,6968	2,6874	2,6783	2,6693	2,6606
0,004	2,6521	2,6437	2,6356	2,6276	2,6197	2,6121	2,6045	2,5972	2,5899	2,5828
0,005	2,5758	2,5690	2,5622	2,5556	2,5491	2,5427	2,5364	2,5302	2,5241	2,5181
0,006	2,5121	2,5063	2,5006	2,4949	2,4893	2,4838	2,4783	2,4730	2,4677	2,4624
0,007	2,4573	2,4522	2,4471	2,4422	2,4372	2,4324	2,4276	2,4228	2,4181	2,4135
0,008	2,4089	2,4044	2,3999	2,3955	2,3911	2,3867	2,3824	2,3781	2,3739	2,3698
0,009	2,3656	2,3615	2,3575	2,3535	2,3495	2,3455	2,3416	2,3378	2,3339	2,3301
0,010	2,3263	2,3226	2,3189	2,3152	2,3116	2,3080	2,3044	2,3009	2,2973	2,2938
0,011	2,2904	2,2869	2,2835	2,2801	2,2768	2,2734	2,2701	2,2668	2,2636	2,2603
0,012	2,2571	2,2539	2,2508	2,2476	2,2445	2,2414	2,2383	2,2353	2,2322	2,2292
0,013	2,2262	2,2232	2,2203	2,2173	2,2144	2,2115	2,2086	2,2058	2,2029	2,2001
0,014	2,1973	2,1945	2,1917	2,1890	2,1862	2,1835	2,1808	2,1781	2,1754	2,1727
0,015	2,1701	2,1675	2,1648	2,1622	2,1596	2,1571	2,1545	2,1520	2,1494	2,1469
0,016	2,1444	2,1419	2,1394	2,1370	2,1345	2,1321	2,1297	2,1272	2,1248	2,1225
0,017	2,1201	2,1177	2,1154	2,1130	2,1107	2,1084	2,1061	2,1038	2,1015	2,0992
0,018	2,0969	2,0947	2,0924	2,0902	2,0880	2,0858	2,0836	2,0814	2,0792	2,0770
0,019	2,0749	2,0727	2,0706	2,0684	2,0663	2,0642	2,0621	2,0600	2,0579	2,0558
0,020	2,0537	2,0517	2,0496	2,0476	2,0456	2,0435	2,0415	2,0395	2,0375	2,0355
0,021	2,0335	2,0315	2,0296	2,0276	2,0257	2,0237	2,0218	2,0198	2,0179	2,0160
0,022	2,0141	2,0122	2,0103	2,0084	2,0065	2,0047	2,0028	2,0009	1,9991	1,9972
0,023	1,9954	1,9936	1,9917	1,9899	1,9881	1,9863	1,9845	1,9827	1,9809	1,9791
0,024	1,9774	1,9756	1,9738	1,9721	1,9703	1,9686	1,9669	1,9651	1,9634	1,9617
0,025	1,9600	1,9583	1,9566	1,9549	1,9532	1,9515	1,9498	1,9481	1,9465	1,9448
0,026	1,9431	1,9415	1,9398	1,9382	1,9366	1,9349	1,9333	1,9317	1,9301	1,9284
0,027	1,9268	1,9252	1,9236	1,9220	1,9205	1,9189	1,9173	1,9157	1,9142	1,9126
0,028	1,9110	1,9095	1,9079	1,9064	1,9048	1,9033	1,9018	1,9003	1,8987	1,8972
0,029	1,8957	1,8942	1,8927	1,8912	1,8897	1,8882	1,8867	1,8852	1,8837	1,8823
0,03	1,8808	1,8663	1,8522	1,8384	1,8250	1,8119	1,7991	1,7866	1,7744	1,7624
0,04	1,7507	1,7392	1,7279	1,7169	1,7060	1,6954	1,6849	1,6747	1,6646	1,6546
0,05	1,6449	1,6352	1,6258	1,6164	1,6072	1,5982	1,5893	1,5805	1,5718	1,5632
0,06	1,5548	1,5464	1,5382	1,5301	1,5220	1,5141	1,5063	1,4985	1,4909	1,4833
0,07	1,4758	1,4684	1,4611	1,4538	1,4466	1,4395	1,4325	1,4255	1,4187	1,4118
0,08	1,4051	1,3984	1,3917	1,3852	1,3787	1,3722	1,3658	1,3595	1,3532	1,3469
0,09	1,3408	1,3346	1,3285	1,3225	1,3165	1,3106	1,3047	1,2988	1,2930	1,2873
0,1	1,2816	1,2265	1,1750	1,1264	1,0803	1,0364	0,9945	0,9542	0,9154	0,8779
0,2	0,8416	0,8064	0,7722	0,7388	0,7063	0,6745	0,6433	0,6128	0,5828	0,5534
0,3	0,5224	0,4959	0,4677	0,4399	0,4125	0,3853	0,3585	0,3319	0,3055	0,2793
0,4	0,2533	0,2275	0,2019	0,1764	0,1510	0,1257	0,1004	0,0753	0,0502	0,0251

2.P.3 lentelė. Chi kvadrato skirstinio P–osios kritinės reikšmės

$n\diagdown P$	0,9995	0,999	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,80
1	$0,0^6393$	$0,0^5157$	$0,0^4393$	$0,0^3157$	$0,0^3982$	0,00393	0,0158	0,0642
2	0,00100	0,00200	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,446
3	0,0153	0,0243	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,005
4	0,0639	0,0908	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,649
5	0,158	0,210	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,343
6	0,299	0,381	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,070
7	0,485	0,598	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	3,822
8	0,710	0,857	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	4,594
9	0,972	1,152	1,535	2,088	2,700	3,325	4,168	5,380
10	1,265	1,479	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,179
11	1,587	1,834	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	6,989
12	1,934	2,214	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	7,807
13	2,305	2,617	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	8,634
14	2,697	3,041	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	9,467
15	3,108	3,483	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	10,307
16	3,536	3,942	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,152
17	3,980	4,416	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	12,002
18	4,439	4,905	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	12,857
19	4,912	5,406	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	13,716
20	5,398	5,921	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	14,578
22	6,404	6,983	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	16,314
24	7,453	8,085	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	18,062
26	8,538	9,222	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	19,820
28	9,656	10,391	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	21,588
30	10,804	11,588	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	23,364
32	11,979	12,811	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	25,148
34	13,179	14,057	16,501	17,789	19,806	21,664	23,952	26,938
36	14,401	15,324	17,887	19,233	21,336	23,269	25,643	28,735
38	15,644	16,611	19,289	20,691	22,878	24,884	27,343	30,537
40	16,906	17,916	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	32,345
45	20,137	21,251	24,311	25,901	28,366	30,612	33,350	36,884
50	23,461	24,674	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	41,449
55	26,866	28,173	31,735	33,570	36,398	38,958	42,060	46,036
60	30,340	31,738	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459	50,641
65	33,877	35,362	39,383	41,444	44,603	47,450	50,883	55,262
70	37,467	39,036	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	59,898
75	41,107	42,757	47,206	49,475	52,942	56,054	59,795	64,547
80	44,791	46,520	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278	69,207
85	48,515	50,320	55,170	57,634	61,389	64,749	68,777	73,878
90	52,276	54,155	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	78,558
100	59,896	61,918	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358	87,945

2.P.3 lentelės tęsinys. Chi kvadrato skirstinio P–osios kritinės reikšmės

0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005	P/n
1,642	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828	12,116	1
3,219	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816	15,202	2
4,642	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266	17,730	3
5,989	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	18,467	19,997	4
7,289	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750	20,515	22,105	5
8,558	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	22,458	24,103	6
9,803	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	24,322	26,018	7
11,030	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	26,124	27,868	8
12,242	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	27,877	29,666	9
13,442	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	29,588	31,420	10
14,631	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757	31,264	33,137	11
15,812	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300	32,909	34,821	12
16,985	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819	34,528	36,478	13
18,151	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	36,123	38,109	14
19,311	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801	37,697	39,719	15
20,465	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267	39,252	41,308	16
21,615	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718	40,790	42,879	17
22,760	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156	42,312	44,434	18
23,900	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582	43,820	45,973	19
25,038	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997	45,315	47,498	20
27,301	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796	48,268	50,511	22
29,553	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559	51,179	53,479	24
31,795	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290	54,052	56,407	26
34,027	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993	56,892	59,300	28
36,250	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672	59,703	62,162	30
38,466	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328	62,487	64,995	32
40,676	44,903	48,602	51,966	56,061	58,964	65,247	67,803	34
42,879	47,212	50,998	54,437	58,619	61,581	67,985	70,588	36
45,076	49,513	53,384	56,896	61,162	64,181	70,703	73,351	38
47,269	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766	73,402	76,095	40
52,729	57,505	61,656	65,410	69,957	73,166	80,077	82,876	45
58,164	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490	86,661	89,561	50
63,577	68,796	73,311	77,380	82,292	85,749	93,168	96,163	55
68,972	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952	99,607	102,695	60
74,351	79,973	84,821	89,177	94,422	98,105	105,988	109,164	65
79,715	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215	112,317	115,578	70
85,066	91,061	96,217	100,839	106,393	110,286	118,599	121,942	75
90,405	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321	124,839	128,261	80
101,054	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299	137,208	140,782	90
106,364	113,038	118,752	123,858	129,973	134,247	143,344	146,990	95
111,667	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169	149,449	153,167	100

2.P.4 lentelė. Stjudento skirstinio P–osios kritinės reikšmės

$n \diagdown P$	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005
1	1,0000	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	127,321	318,309	636,619
2	0,8165	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	14,0890	22,3271	31,5991
3	0,7649	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	7,4533	10,2145	12,9240
4	0,7407	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	5,5976	7,1732	8,6103
5	0,7267	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	4,7733	5,8934	6,8688
6	0,7176	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	4,3168	5,2076	5,9588
7	0,7111	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	4,0293	4,7853	5,4079
8	0,7064	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	3,8325	4,5008	5,0413
9	0,7027	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	3,6897	4,2968	4,7809
10	0,6998	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	3,5814	4,1437	4,5869
11	0,6974	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	3,4966	4,0247	4,4370
12	0,6955	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,4284	3,9296	4,3178
13	0,6938	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,3725	3,8520	4,2208
14	0,6924	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,3257	3,7874	4,1405
15	0,6912	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	3,2860	3,7328	4,0728
16	0,6901	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,2520	3,6862	4,0150
17	0,6892	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,2224	3,6458	3,9651
18	0,6884	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,1966	3,6105	3,9216
19	0,6876	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,1737	3,5794	3,8834
20	0,6870	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,1534	3,5518	3,8495
22	0,6858	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,1188	3,5050	3,7921
24	0,6848	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,0905	3,4668	3,7454
26	0,6840	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,0669	3,4350	3,7066
28	0,6834	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,0469	3,4082	3,6739
30	0,6828	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,0298	3,3852	3,6460
34	0,6818	1,3070	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284	3,0020	3,3479	3,6007
38	0,6810	1,3042	1,6860	2,0244	2,4286	2,7116	2,9803	3,3190	3,5657
42	0,6804	1,3020	1,6820	2,0181	2,4185	2,6981	2,9630	3,2960	3,5377
46	0,6799	1,3002	1,6787	2,0129	2,4102	2,6870	2,9488	3,2771	3,5150
50	0,6794	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	2,9370	3,2614	3,4960
60	0,6786	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	2,9146	3,2317	3,4602
70	0,6780	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	2,8987	3,2108	3,4350
80	0,6776	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	2,8870	3,1953	3,4163
90	0,6772	1,2910	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	2,8779	3,1833	3,4019
100	0,6770	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	2,8707	3,1737	3,3905
200	0,6757	1,2858	1,6525	1,9719	2,3451	2,6006	2,8385	3,1315	3,3398
300	0,6753	1,2844	1,6499	1,9679	2,3388	2,5923	2,8279	3,1176	3,3233
400	0,6751	1,2837	1,6487	1,9659	2,3357	2,5882	2,8227	3,1107	3,3150
500	0,6750	1,2832	1,6479	1,9647	2,3338	2,5857	2,8195	3,1066	3,3101
∞	0,6745	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	2,8070	3,0902	3,2905

2.P.5 lentelė. Fišerio skirstinio su m ir n laisvės laipsnių P–osios kritinės reikšmės

$n \diagdown m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54
2	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,330	19,353	19,371	19,385
3	10,128	9,5521	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406	8,8867	8,8452	8,8123
4	7,7086	6,9443	6,5914	6,3882	6,2561	6,1631	6,0942	6,0410	5,9988
5	6,6079	5,7861	5,4095	5,1922	5,0503	4,9503	4,8759	4,8183	4,7725
6	5,9874	5,1433	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839	4,2067	4,1468	4,0990
7	5,5914	4,7374	4,3468	4,1203	3,9715	3,8660	3,7870	3,7257	3,6767
8	5,3177	4,4590	4,0662	3,8379	3,6875	3,5806	3,5005	3,4381	3,3881
9	5,1174	4,2565	3,8625	3,6331	3,4817	3,3738	3,2927	3,2296	3,1789
10	4,9646	4,1028	3,7083	3,4780	3,3258	3,2172	3,1355	3,0717	3,0204
11	4,8443	3,9823	3,5874	3,3567	3,2039	3,0946	3,0123	2,9480	2,8962
12	4,7472	3,8853	3,4903	3,2592	3,1059	2,9961	2,9134	2,8486	2,7964
13	4,6672	3,8056	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153	2,8321	2,7669	2,7144
14	4,6001	3,7389	3,3439	3,1122	2,9582	2,8477	2,7642	2,6987	2,6458
15	4,5431	3,6823	3,2874	3,0556	2,9013	2,7905	2,7066	2,6408	2,5876
16	4,4940	3,6337	3,2389	3,0069	2,8524	2,7413	2,6572	2,5911	2,5377
17	4,4513	3,5915	3,1968	2,9647	2,8100	2,6987	2,6143	2,5480	2,4943
18	4,4139	3,5546	3,1599	2,9277	2,7729	2,6613	2,5767	2,5102	2,4563
19	4,3807	3,5219	3,1274	2,8951	2,7401	2,6283	2,5435	2,4768	2,4227
20	4,3512	3,4928	3,0984	2,8661	2,7109	2,5990	2,5140	2,4471	2,3928
21	4,3248	3,4668	3,0725	2,8401	2,6848	2,5727	2,4876	2,4205	2,3660
22	4,3009	3,4434	3,0491	2,8167	2,6613	2,5491	2,4638	2,3965	2,3419
23	4,2793	3,4221	3,0280	2,7955	2,6400	2,5277	2,4422	2,3748	2,3201
24	4,2597	3,4028	3,0088	2,7763	2,6207	2,5082	2,4226	2,3551	2,3002
25	4,2417	3,3852	2,9912	2,7587	2,6030	2,4904	2,4047	2,3371	2,2821
26	4,2252	3,3690	2,9752	2,7426	2,5868	2,4741	2,3883	2,3205	2,2655
27	4,2100	3,3541	2,9604	2,7278	2,5719	2,4591	2,3732	2,3053	2,2501
28	4,1960	3,3404	2,9467	2,7141	2,5581	2,4453	2,3593	2,2913	2,2360
29	4,1830	3,3277	2,9340	2,7014	2,5454	2,4324	2,3463	2,2783	2,2229
30	4,1709	3,3158	2,9223	2,6896	2,5336	2,4205	2,3343	2,2662	2,2107
40	4,0847	3,2317	2,8387	2,6060	2,4495	2,3359	2,2490	2,1802	2,1240
50	4,0343	3,1826	2,7900	2,5572	2,4004	2,2864	2,1992	2,1299	2,0734
60	4,0012	3,1504	2,7581	2,5252	2,3683	2,2541	2,1665	2,0970	2,0401
70	3,9778	3,1277	2,7355	2,5027	2,3456	2,2312	2,1435	2,0737	2,0166
80	3,9604	3,1108	2,7188	2,4859	2,3287	2,2142	2,1263	2,0564	1,9991
100	3,9361	3,0873	2,6955	2,4626	2,3053	2,1906	2,1025	2,0323	1,9748
150	3,9042	3,0564	2,6649	2,4320	2,2745	2,1595	2,0711	2,0006	1,9428
200	3,8884	3,0411	2,6498	2,4168	2,2592	2,1441	2,0556	1,9849	1,9269
500	3,8601	3,0138	2,6227	2,3898	2,2320	2,1167	2,0279	1,9569	1,8986
∞	3,8415	2,9957	2,6049	2,3719	2,2141	2,0986	2,0096	1,9384	1,8799

2.P.5 lentelė. Fišerio skirstinio su m ir n laisvės laipsnių P–osios kritinės reikšmės

$n\diagdown m$	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241,88	243,91	245,95	248,01	249,05	250,09	251 14	252,20	253,25	254,31
2	19,396	19,413	19,429	19,446	19,454	19,462	19,471	19,479	19,487	19,496
3	8,7855	8,7446	8,7029	8,6602	8,6385	8,6166	8,5944	8,5720	8,5494	8,5265
4	5,9644	5,9117	5,8578	5,8025	5,7744	5,7459	5,7170	5,6877	5,6581	5,6281
5	4,7351	4,6777	4,6188	4,5581	4,5272	4,4957	4,4638	4,4314	4,3985	4,3650
6	4,0600	3,9999	3,9381	3,8742	3,8415	3,8082	3,7743	3,7398	3,7047	3,6689
7	3,6365	3,5747	3,5108	3,4445	3,4105	3,3758	3,3404	3,3043	3,2674	3,2298
8	3,3472	3,2839	3,2184	3,1503	3,1152	3,0794	3,0428	3,0053	2,9669	2,9276
9	3,1373	3,0729	3,0061	2,9365	2,9005	2,8637	2,8259	2,7872	2,7475	2,7067
10	2,9782	2,9130	2,8450	2,7740	2,7372	2,6996	2,6609	2,6211	2,5801	2,5379
11	2,8536	2,7876	2,7186	2,6464	2,6090	2,5705	2,5309	2,4901	2,4480	2,4045
12	2,7534	2,6866	2,6169	2,5436	2,5055	2,4663	2,4259	2,3842	2,3410	2,2962
13	2,6710	2,6037	2,5331	2,4589	2,4202	2,3803	2,3392	2,2966	2,2524	2,2064
14	2,6022	2,5342	2,4630	2,3879	2,3487	2,3082	2,2664	2,2230	2,1778	2,1307
15	2,5437	2,4753	2,4034	2,3275	2,2878	2,2468	2,2043	2,1601	2,1141	2,0658
16	2,4935	2,4247	2,3522	2,2756	2,2354	2,1938	2,1507	2,1058	2,0589	2,0096
17	2,4499	2,3807	2,3077	2,2304	2,1898	2,1477	2,1040	2,0584	2,0107	1,9604
18	2,4117	2,3421	2,2686	2,1906	2,1497	2,1071	2,0629	2,0166	1,9681	1,9168
19	2,3779	2,3080	2,2341	2,1555	2,1141	2,0712	2,0264	1,9795	1,9302	1,8780
20	2,3479	2,2776	2,2033	2,1242	2,0825	2,0391	1,9938	1,9464	1,8963	1,8432
21	2,3210	2,2504	2,1757	2,0960	2,0540	2,0102	1,9645	1,9165	1,8657	1,8117
22	2,2967	2,2258	2,1508	2,0707	2,0283	1,9842	1,9380	1,8894	1,8380	1,7831
23	2,2747	2,2036	2,1282	2,0476	2,0050	1,9605	1,9139	1,8648	1,8128	1,7570
24	2,2547	2,1834	2,1077	2,0267	1,9838	1,9390	1,8920	1,8424	1,7896	1,7330
25	2,2365	2,1649	2,0889	2,0075	1,9643	1,9192	1,8718	1,8217	1,7684	1,7110
26	2,2197	2,1479	2,0716	1,9898	1,9464	1,9010	1,8533	1,8027	1,7488	1,6906
27	2,2043	2,1323	2,0558	1,9736	1,9299	1,8842	1,8361	1,7851	1,7307	1,6717
28	2,1900	2,1179	2,0411	1,9586	1,9147	1,8687	1,8203	1,7689	1,7138	1,6541
29	2,1768	2,1045	2,0275	1,9446	1,9005	1,8543	1,8055	1,7537	1,6981	1,6377
30	2,1646	2,0921	2,0148	1,9317	1,8874	1,8409	1,7918	1,7396	1,6835	1,6223
40	2,0772	2,0035	1,9245	1,8389	1,7929	1,7444	1,6928	1,6373	1,5766	1,5089
50	2,0261	1,9515	1,8714	1,7841	1,7371	1,6872	1,6337	1,5756	1,5115	1,4383
60	1,9926	1,9174	1,8364	1,7480	1,7001	1,6491	1,5943	1,5343	1,4673	1,3893
70	1,9689	1,8932	1,8117	1,7223	1,6738	1,6220	1,5661	1,5046	1,4351	1,3529
80	1,9512	1,8753	1,7932	1,7032	1,6542	1,6017	1,5449	1,4821	1,4107	1,3247
100	1,9267	1,8503	1,7675	1,6764	1,6267	1,5733	1,5151	1,4504	1,3757	1,2832
150	1,8943	1,8172	1,7335	1,6410	1,5902	1,5354	1,4752	1,4074	1,3275	1,2226
200	1,8783	1,8008	1,7166	1,6233	1,5720	1,5164	1,4551	1,3856	1,3024	1,1885
500	1,8496	1,7716	1,6864	1,5916	1,5392	1,4821	1,4186	1,3455	1,2551	1,1132
∞	1,8307	1,7522	1,6664	1,5705	1,5173	1,4591	1,3940	1,3180	1,2214	1,0000

Literatūra

1. Abramowitz M., Stegun I. Handbook of Mathematical Functions. Vertimas į rusų kalbą.– Maskva: Nauka, 1979.

2. Bagdonavičius V., Kruopis J. Matematinė statistika. Vilnius: TEV, I dalis, 2007.

3. Bickel P.J., Doksum K.A. Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics. New York: Prentice and Hall, 2001.

4. Bolšev L. N. Rinktiniai darbai. Tikimybių teorija ir matematinė statistika (rusų kalba). Maskva: Nauka, 1983.

5. Bolšev L. N., Smirnov N. V. Matematinės statistikos lentelės (rusų kalba). Maskva: Nauka, 1983.

6. Borovkov A.A. Mathematical Statistics. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 1999.

7. Čekanavičius V., Murauskas G. Statistika ir jos taikymai. Vilnius: TEV, I dalis – 2000. II dalis – 2002.

8 Härdle W. K., Spokoiny V., Panov V., Wang W. Basics of Modern Mathematical Statistics. Exercises and Solutions. Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2014.

9. Knight K. Mathematical statistics. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2000.

10. Kruopis J. Matematinė statistika. Vilnius: Mokslo ir enciklopedijų redakcija, 1993.

11. Kubilius J. Tikimybių teorija ir matematinė statistika. Vilnius: VU leidykla, 1996.

12. Lehmann E.L. Testing Statistical Hypotheses. 2nd edn. Springer, 1997.

13. Levulienė R. Statistikos taikymai naudojant SAS. Vilnius: VU leidykla, 2009.

14. Mardia K. V. Statistics of Directional Data. London, New York: Academic Press, 1972 (yra vertimas į rusų kalbą).

15. Rao C. R. Linear Statistical Inference and its Applications. 2nd edn. Wiley, 2002.

16. Shao Jun. Mathematical Statistics. Springer, 1999.

17. Spokoiny V., Dickhaus T. Basics of Modern Mathematical Statistics. Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2015.

18. Van der Vaart A. Asymptotic statistics. Cambridge university press, 1998.

Dalykinė rodyklė

Vilijandas Bagdonavičius, Julius Jonas Kruopis
Matematinė statistika: vadovėlis
Pirma dalis. Parametrinė statistika. – Vilnius: Vilniaus universitetas, 2015. – 293 p.
ISBN 978–609–459–515–8

Pirmojoje vadovėlio dalyje matematinės statistikos uždaviniai sprendžiami remiantis parametriniais statistiniais modeliais. Tariama, kad imties skirstinys yra žinomo pavidalo, tačiau priklauso nuo baigtinio matavimo nežinomo parametro. Todėl uždaviniai gali būti suformuluoti šių nežinomų parametrų terminais. Nagrinėjami nežinomų parametrų taškinių ir intervalinių įvertinių radimo metodai. Tiriamos gautųjų įvertinių savybės. Kuriami nežinomų parametrų patekimo į tam tikras aibes hipotezių tikrinimo kriterijai.

519.2(075.8)

Vlijandas Bagdonavičius, Julius Jonas Kruopis
Matematinė statistika. I dalis. Parametrinė statistika
Vadovėlis

Lietuvių kalbos redaktorė *Danutė Petrauskienė*
Maketuotoja *Rūta Levulienė*

Išleido *Vilniaus universiteto leidykla*